

**Theo/funktion**

$$\theta(z, w) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} e^{-\pi i n^2 w}$$

$\Gamma$  ist wohldef auf  $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$   $z = x+iy$   $w = it$

$$|e^{2\pi i n z} \cdot e^{\pi i n^2 w}| = e^{-2\pi n y} \cdot e^{-\pi n^2 t}$$

zeigen  $\sum_{n=-N}^N e^{2\pi i n z} e^{\pi i n^2 w} \xrightarrow{glim} \theta(z, w)$  auf beschränkter Menge  $\Omega$

$$\sum_{n=-N}^N |e^{2\pi i n z} e^{\pi i n^2 w}| \leq \sum_{n=-N}^N |e^{2\pi n y} \cdot e^{-\pi n^2 t}| = \sum_{n=-N}^N e^{2\pi n y} e^{-\pi n^2 t}$$

$$= \sum_{n=-N}^N e^{2\pi n y} + \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{2\pi n y} e^{-\pi n^2 t} \leq M + \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-2\pi n t} < \infty$$

- 1)  $\theta(z, w)$  analyt in  $z, w$
- 2)  $\theta(z+1, w) = \theta(z, w)$
- 3)  $\theta(z, w, w) = e^{-2\pi i(z+\frac{1}{2})w} \theta(z, w)$
- 4)  $\theta(\frac{1+w}{2}, w) = 0$
- 5)  $\theta(z, w) = 0 \iff z = \frac{1+w}{2} + k + iw$
- 6)  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+i} \theta(z, w) dz = e^{-2\pi i \frac{z^2}{w}} \theta(\frac{z}{w}, -\frac{1}{w})$  Jakobi Identität

- 1)  $\theta(z, w)$  glm. linear u. analyt. Funkt.
- 2) klar
- 3)  $\theta(z, w, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n(z+w)} e^{\pi i n^2 w}$  Setze  $m=n+1$   
 $= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m(z+w)} e^{-2\pi i m(z+w)} e^{\pi i (m-1)^2 w}$   
 $= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i m(z+w)} e^{\pi i m^2 w} = e^{-2\pi i(z+\frac{1}{2})w} \theta(z, w)$
- 4)  $\theta(z) = \theta(-z)$   
 $\theta(\frac{1+w}{2}) = \theta(-\frac{1+w}{2}) = \theta(\frac{1-w}{2}) = \theta(\frac{1+w}{2}) \cdot e^{-2\pi i} = -\theta(\frac{1+w}{2})$
- 5)  $\theta(z, w) = 0 \iff \theta(z+iw, w) = 0$  da  $\theta$  ganze Funkt.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+i} \theta'(z, w) dz = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+i} (\theta'(z, w) + 2\pi i e^{-2\pi i(z+\frac{1}{2})w} \theta(z, w)) dz$$

$$\theta'(z, w) = e^{-2\pi i(z+\frac{1}{2})w} \theta'(z)$$

$$\theta'(z, w) = -2\pi i e^{-2\pi i(z+\frac{1}{2})w} \theta(z) + e^{-2\pi i(z+\frac{1}{2})w} \theta'(z)$$

$$= \int \frac{\theta'(z, w)}{\theta(z, w)} + 2\pi i dz \implies \neq NST = -1$$

$$\int_0^1 \theta^2(z, w) dz = \theta(0, w)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \theta^2(z, it) dz = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

weil zuerst  $\theta(-z) = \overline{\theta(z)}$   
 $\int_0^1 |\theta^2(z, w)| dz = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i n^2 w e^{-2\pi i n^2 w} dz$  auf  $\mathbb{H}$   
 identisch  $\implies$  auf ganz  $\mathbb{H}$   
 $\int_0^1 \theta^2(z, it) = \int_0^1 \theta(0, it) = \theta(0, -\frac{1}{t})$  Jakobi  
 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

6)  $\rightarrow$  Vorl. sehr inter. Beweis

**ganze Funkt.**

$$E(u, p) = (1-u) e^{\frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}}$$

Produktform o. Weierstrass

$\exists z_n$  Folge ohne endl. NP  $f(z)$  ganze Funkt. mit NST  $z_n \neq 0$   
 $\implies \exists \{p_n\}$  Folge in  $\mathbb{N}$   $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{z_n}, p_n) \cdot e^{g(z)}$   $g(z)$  ganz

$\Gamma$   $\log E(u, p) = \log(1-u) + (u \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}) = -(\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \dots)$  kann bel. klein gemacht werden (loc)

$\leq \log E(u, p)$  konv.  $\dots$

zähl: nehmen  $|z| < r$  Es exist. endl viele NST  $z_1, \dots, z_N$  mit  $|z_j| \leq r$ . Die werden abgespalten. Damit o. E. d. A für Konvergenz. wählen  $p_n = n-1$  erreichen wir  $u \leq 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{z_n}, p_n) = \sum \log E(u, p)$$

$$\log E(u, p) = -(\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \dots)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log E(u, p) = \sum_{n=1}^{\infty} u^n < \infty$$

**Gammafunktion**

Fortsetzung von n!

Def:  $\Gamma(z) = \frac{1}{z} \cdot e^{-z} \prod_{n=2}^{\infty} (1 + \frac{z}{n})^{-1} e^{\frac{z}{n}}$

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^{-1} e^{\frac{z}{n}}$$

- 1)  $\Gamma(z)$  ist meromorphe Funktion
- 2)  $z=0, -1, -2, \dots$  einzige Singul Stellen im Endlichen sind einf. Pol
- 3)  $\Gamma(z)$  hat keine NST
- 4)  $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$
- 5)  $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z$  ;  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}}$   $g(z)$  ganze Funktion mit NST  $-n$   $n \geq 1$

$n \leq |z|$  mit  $g(z) = \prod_{n=1}^n (1 + \frac{z}{n}) \prod_{n=n+1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1 + \frac{z}{n}) - \frac{z}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{z}{n^2} + \frac{z^2}{n^3} + \dots|$  konv glm da  $|z| < n$

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-z}}{z \cdot g(z)} = \frac{e^{-z(z-1)}}{z \cdot g(z-1)} = \frac{e^{-z(z-1)}}{g(z-1)}$$

$\implies \Gamma(z) \cdot z = \Gamma(z+1)$   $\forall z$  3) klar da  $g(z)$  ganz  $z$  ganz  $e^{-z}$  keine NST

$$z \cdot g(z) \cdot g(-z) = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$$
 ( $\rightarrow$  Sin Funktion)

$\frac{g(z-1)}{z \cdot g(z)}$  ganz ohne NST:  $\frac{g(z-1)}{z \cdot g(z)} = \frac{g(z-1)}{g(z-1)} \cdot \frac{g(z-1)}{z \cdot g(z)}$  ganz mit NST  $z=1$

$\frac{d}{dz} \log \frac{g(z-1)}{z \cdot g(z)} = 0$  denn  $= \frac{g'(z-1)}{g(z-1)} - \frac{1}{z} - \frac{g'(z)}{g(z)} = 0$

$\frac{g'(z-1)}{g(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)}$

$\log \frac{g(z-1)}{g(z-1)} = \text{Const} = \frac{g'(0)}{g(0)} = \frac{1}{g(0)} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})} = e^{-1}$

$= e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \log(\frac{1}{n+1})} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n} = e^{\gamma}$

5)  $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \Gamma(z) \cdot z \cdot \Gamma(-z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} = \frac{\sin \pi z}{\pi}$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x) \quad (\text{Euler})$$

$\Gamma(m) = m!$

**Sin-funktion**

$$\sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) = S(z)$$

$\frac{S(z)}{\sin z}$  ganze Funkt ohne NST (vgl.  $g(z)$  oben)

$\implies \frac{S(z)}{\sin z} = e^{g(z)}$   $g(z)$  ganz logari. ableiten:

$\pi \cdot \cot \pi z = \frac{1}{z} + g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n})$

$\implies g'(z) = 0$   $g(z) = -1$  weil  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi$

Riemannsche Zetafunktion

Satz von Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

$$\Gamma(1-2^{-s}) \zeta(s) = \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} (1-2^{-s})$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

Riemannsche Funkl. gl.

$$\pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-1/2} (1-s) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s)$$

S → 1-S Symmetrie

Folgerungen:

$$\zeta(-2n) = 0$$

denn  $\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$  ist meromorph mit Polen 0, 1

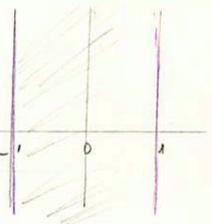
folgt aus

$$\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right) \sum_{n=21}^{\infty} e^{-2n^2 x} dx$$

ganz

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

denn:  $\pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{s}{2} \left(\frac{1}{s(s-1)} + s \int_1^{\infty} \dots\right)$   
 $s \rightarrow 0 \dots \zeta(0) = -\frac{1}{2}$



Fouriertransformationen

$$f \in L^1 \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$\check{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iux} dx$$

Bsp.  $f(x) = 1_{[-a, a]}$   
 $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ika} - e^{ika}}{-ik} = \frac{2 \sin(ka)}{k \sqrt{2\pi}}$

$e^{-\frac{x^2}{2}}$  Fixpunkt d. Fouriertrafo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\theta$$

ableiten  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{2}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{-1}{2\sqrt{2\pi}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-1) \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{(-1)^m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{2^m \sqrt{2\pi}} = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^m 2^m m!} = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} m!}$$

$$+1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{(2m)!}{2^{2m} m!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2^m} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ikx)^m}{m!} dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-k)^m (2m)!}{(2\pi)^{m+1/2} m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-k)^m}{m!} = e^{-\frac{k^2}{2}}$$

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$$

- (i)  $\sup_{k \in \mathbb{R}} |\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$
- (ii)  $\check{\check{f}}(u) = f(u)$
- (iii)  $f \in C_0(\mathbb{R})$
- (iv)  $\widehat{f(x+y)}(k) = e^{+iky} \hat{f}(k)$
- (v)  $\widehat{f(\lambda x)}(k) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{k}{\lambda}\right)$
- (vi)  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{f \cdot g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \hat{g}(k-\xi) d\xi$
- (vii)  $f = \hat{g} \Rightarrow f = g \cdot \check{f}$
- (viii)  $f$  stetig in  $u \Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx$

- (i)  $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$
- (ii)  $\check{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{iku} dk$
- (iii)  $\hat{f} \in C(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(k+h) - \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} (e^{ihx} - 1) dx \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$

$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0$  Riemann Lebesgue Lemma

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$\check{\hat{f}}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{iku} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} e^{iku} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik(x-u)} dx = f(u)$$

$$(iv) \widehat{f(x+y)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} e^{iky} dx = e^{iky} \hat{f}(k)$$

$$(v) \widehat{f(\lambda x)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik \frac{x}{\lambda}} dx = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{k}{\lambda}\right)$$

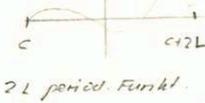
$$(vi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \hat{g}(k) dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) e^{-ik(x+y)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx$$
 (Fubini)

$$(viii) \hat{f}(k) = \hat{g} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{iku} dk = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{iku} \phi(\epsilon k) dk = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \phi(\epsilon k) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik(x-y)} \phi(\epsilon k) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(\epsilon k) e^{-ik(x-y)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-y) dx = f(y)$$

$$\times \left( \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{iku} dk \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{iku} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{iku} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{iku} dk = \hat{g}(k) = \hat{f}(k)$$

**Fourierreihen**

reell



Def.  $L = \frac{1}{2} c = 0$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} \quad c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

w  $L = \pi \quad c = -L$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx + \frac{a_0}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

reell  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}) \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) dx$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

komplex  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \pi x / L} \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} f(x) e^{-i n \pi x / L} dx$

Zusatz:  $\Gamma f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \cos(n\pi x / L) + i c_n \sin(n\pi x / L)$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx - i \frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2} a_n + b_n i) \cos \frac{n\pi x}{L} + i (a_n - b_n i) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{2} b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \cos \frac{n\pi x}{L})$$

**Besselsche Ungl.:**

$$f \in C^0(I)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 \in \|f\|^2$$

$\Gamma 0 \leq \|f - S_n\|^2 = \sum_{k=-n}^n |f_k - S_{nk}|^2 = \sum_{k=-n}^n |f_k|^2 - 2 \sum_{k=-n}^n f_k S_{nk} + \sum_{k=-n}^n |S_{nk}|^2$

$$= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=-n}^n |f_k|^2 + \sum_{k=-n}^n |f_k|^2$$

denn  $\langle f, S_n \rangle = \sum_{k=-n}^n \langle f, e^{-2\pi i k x} \rangle f_k$

$$= \sum_{k=-n}^n |f_k|^2 = \langle S_n, f \rangle$$

$$\langle S_n, S_n \rangle = \sum_{k=-n}^n |f_k|^2 \langle e^{-2\pi i k x}, e^{-2\pi i k x} \rangle$$

$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k t}$  Dirichlet kern

$F_n(t) = \sum_{m=0}^n D_m(t)$  Fejer kern

$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t} \quad F_n(t) = \frac{1}{n} \left( \frac{\sin \pi t}{\sin t} \right)^2$

$$D_n(t) = e^{-2\pi i n t} \sum_{k=0}^{2n} e^{2\pi i k t} = e^{-2\pi i n t} \frac{e^{2\pi i (2n+1)t} - 1}{e^{2\pi i t} - 1}$$

$$= \frac{e^{2\pi i (n+1)t} - e^{-2\pi i (n+1)t}}{e^{2\pi i t} - e^{-2\pi i t}} = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}$$

$F_n(t) = \left[ \frac{f(x+t) + f(x)}{\sin \pi t} \right] \frac{e^{2\pi i t}}{2i}$  nicht Fejer kern!

- stetig weil  $F_n(0) = \frac{1}{2n+1}$
- periodisch

**Fourierentwicklung**

$$f \in C^0(I) \quad S_n(x) \xrightarrow{g.l.m.} f$$

$$\sup_{0 \leq x < 1} |S_n - f| \leq \frac{1}{2n} \|f\|$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{2\pi i n x}$$

$\Gamma S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \int_0^1 f(x-y) e^{2\pi i k x} dy \cdot e^{2\pi i k x}$

$$= \int_0^1 f(x-y) D_n(x-y) dy = \int_{-1/2}^{1/2} f(x+t) D_n(t) dt$$

$$S_n(x) - f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} [f(x+t) - f(x)] D_n(t) dt$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} F_n(t) e^{2\pi i n t} dt - \int_{-1/2}^{1/2} F_n(t) e^{-2\pi i n t} dt$$

$$= F_n^+(x-n) - F_n^-(x-n)$$

Besselsche Ungl.  $\Rightarrow \sum_{k=-n}^n |F_n^+(k)|^2 \in \|F_n^+\|^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^+(k) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^-(k) = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) - f(x) = 0$$

punktweise Konv.

$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-2\pi i k x}$

$$\Gamma \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \int_0^1 e^{-2\pi i (n-k)x} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \delta_{n-k} = f_n$$

$|S_n(x) - S_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n |f_k| \leq \sum_{k=m+1}^n |f_k| \leq \frac{1}{2n} \|f\|$

$$\Rightarrow \|f - S_n\| \leq \|f\| \cdot \frac{1}{2n}$$

**Parseval:**  $\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 \quad f \in C^0(I)$

$\Lambda: C^0(I) \rightarrow L_2$  injektiv

$f \in C^0(I) \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 < \infty$

Schrittweite d. Konvergenz

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |2\pi k|^2 |f_k|^2 \in \left\| \frac{d}{dx} f \right\|^2 < \infty$$

**Satz von Fejer**

$$f \in C^0(I) \quad \sum_{n=0}^{\infty} S_n \xrightarrow{g.l.m.} f$$

$f = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  Cesaro

$\Gamma S_n = \int_{-1/2}^{1/2} f(x+t) F_n(t) dt$

$$S_n - f = \int_{-1/2}^{1/2} [f(x+t) - f(x)] F_n(t) dt$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} f(x+t) F_n(t) dt + \int_{-1/2}^{1/2} (-f(x)) F_n(t) dt$$

$I = \sup_{x \in [0,1]} \sup_{t \in [0,1]} |f(x+t) - f(x)| \in \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

da  $f$  g.l.m. stetig auf  $[0,1]$  kompakt

$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)\pi t$

$$= \frac{1}{n} \sin \pi t \cdot \lim_{m \rightarrow 0} \sum_{k=0}^m \cos(2k)\pi t$$

$$= \frac{1}{n \sin \pi t} \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\cos(2m+1)\pi t - \cos \pi t}{2i \sin \pi t}$$

$I \leq \frac{2 \cdot \|f\| \cdot \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sin^2 \pi t} dt}{n}$

$$\leq \frac{40 \|f\|}{n} \left( \frac{1}{\sin^2 \pi t} \right)^2$$

**Fourierreihen als spezielle Laurentreihen**

$f(z)$  meromorph mit Polstelle  $\lambda$

$$f(z) = F(e^{2\pi i z}) = F(\xi)$$

$$F(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \xi^n \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} F(\xi) \xi^{-n-1} d\xi$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z} \quad c_n = \int_0^1 f(z) e^{-2\pi i n z} dz$$

Anwend.  $f(x) = x - \frac{1}{2} \quad f(n) = \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) e^{-2\pi i n x} dx = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \frac{1}{-2\pi i n} & n \neq 0 \end{cases}$

$$\|f\|^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 = \frac{1}{40} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{12} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**Winkel**

$$\cos B = \frac{1}{2} (\cos(A-B) + \cos(A+B))$$

$$\sin B = \frac{1}{2} (\cos(A-B) - \cos(A+B))$$

$$\cos B = \frac{1}{2} (\sin(A-B) + \sin(A+B))$$

wichtige Binomienenerw.

$\sqrt{12} x = 12x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 + \dots$

$\sqrt{12} x = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4$

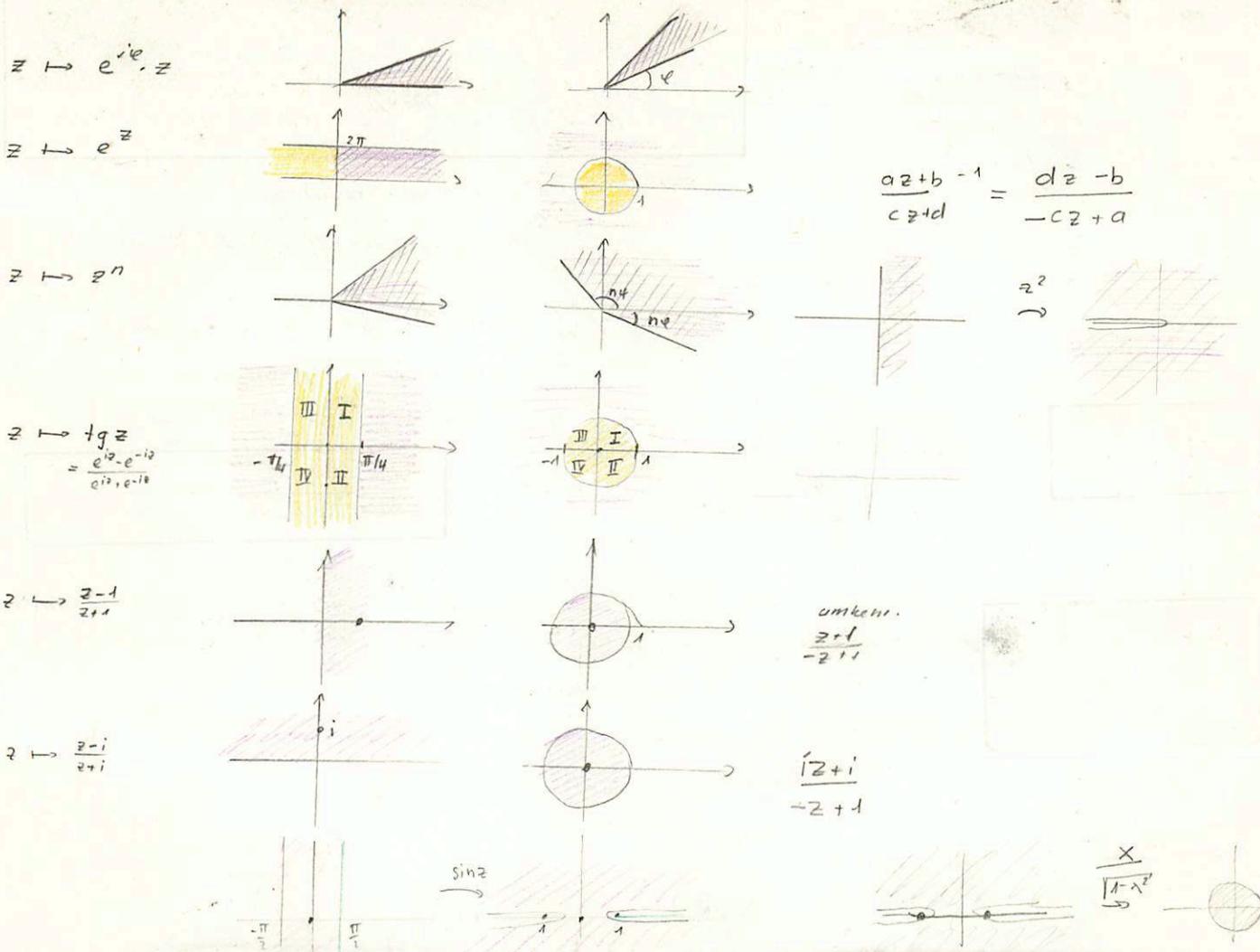
$70nx = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{5} x^3 + \frac{17}{245} x^4 + \frac{67}{2835} x^5$

$\cos x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} + \frac{x^2}{45} + \frac{2x^4}{945}$

$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{920} x^6 + \dots \quad \frac{F_n}{(n!)!}$

$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6} x + \frac{7}{360} x^3 + \frac{31}{45360} x^5 + \dots$

Bijektive komplexe Abbildungen



$$\frac{az+b}{cz+d}^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

umkehr.  
 $\frac{z+1}{-z+1}$

$$\frac{|z+i|}{-z+1}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Entwicklung in Laurentreihen

- $\frac{1}{p(x)}$  → Partialbruchzerlegung
- $f(e^{gx})$  → Zerlegung von  $e^x$

Bsp  $\frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (z-1)^n$   
 $(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$

Bsp  $\frac{1}{z^2-5z+6} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$  Laurentreihe um  $z=3$

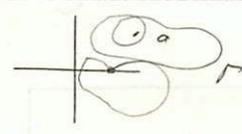
$w = z-3 \Rightarrow f(w+3) = \frac{1}{w} - \frac{1}{w+1} = \frac{1}{w} - \sum_{n=0}^{\infty} (-w)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-w)^n$

$w = \frac{z}{2} \Rightarrow f\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{\frac{z}{2}-3} - \frac{1}{\frac{z}{2}-2} = \frac{2}{z-6} - \frac{2}{z-4} = 2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{6}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n \right)$  Laurentreihe um  $z=6$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (3^n - 2^n) \frac{1}{z^{n+1}}$   $|z| > 3$

Umlauf einer Kurve um Punkt a

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z-a}$$



$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^{n+1}}{n+1}$$

Laurentreihe von  $\frac{1}{z \sin z}$  Ansatz:  $\frac{1}{z \sin z} = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$

$$z \cdot \sin z = \left( z^2 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \dots \right)$$

Koeff. vergl.

$$\left( z^2 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \dots \right) \left( \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots \right) = 1$$

$\Rightarrow a_{-2} = 1 \quad a_{-1} = 0$

$\frac{1}{z \sin z}$  ist gerade Funktl  $\Rightarrow$  ungerade Koeff. d. Laurentreihe verschwinden

Berechn. bestimmte Integrale

Sing. Punkte  $a_1, \dots, a_n$   
 $\Rightarrow$  mind zweit. Nst von  $f(z)$   $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}[f(z), a_i]$

$\Rightarrow$  Bsp  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$  bei  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}[f(z), a_i]$

genügl. einfache Nullstelle von  $f(z)$

Sing. Punkte  $a_1, \dots, a_n \notin \mathbb{R}^+$   
 $\Rightarrow$  mind zweit. Nst  $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx = - \sum_{i=1}^n \text{Res}[r(z), a_i]$

$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} r(z) \ln z dz$   $\left( \int_{\gamma} r(z) \ln z dz = - \int_{\gamma} r(z) (\ln z + 2\pi i) dz \right)$   
 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx = - \sum_{i=1}^n \text{Res}[r(z), a_i]$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$   $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}}$   $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$   $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$   $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$   
 $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a}$   $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi(a+b)}{2ab^3(a+b)^2}$   $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx = \frac{1}{16} \pi a^{-3}$   $a > 0$

Bsp  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx = 2\pi i \text{Res}[f(z), a_i] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d^2}{dz^2} \frac{z^2}{(z+ai)^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8a^3}$

analyt. Fortsetzung:

$f: D_f \rightarrow \mathbb{C}$   $g: D_g \rightarrow \mathbb{C}$  analyt.  $\Rightarrow$   $f$  analyt. fortsetz. v.  $g$   
 $f(z) = g(z) \forall z \in D_f \cap D_g \neq \emptyset$   $\Rightarrow$   $g$  analyt. fortsetz. von  $f$

Eindeutigkeit d. Fortsetzung: Identitätssatz

Ident. Satz:

$f: G \rightarrow \mathbb{C}$   $g: G \rightarrow \mathbb{C}$   
 $f(a_n) = g(a_n) \quad \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit HP  $a$  verschärfen  
 $\Rightarrow f = g$  auf  $G$

$\Rightarrow$  A.H.  $f \neq g$   
 $f(z) \neq 0$  zeigen  $(\exists U(z_0)) (\forall \varepsilon \in U) z \neq 0$   
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad a_n \neq 0$   
 $|R_{k+1}| \leq \frac{C}{\delta^{k+1}}$  Cauchy ungl.  
 $|f(z)| \geq |z|^k (|a_k| - \sum_{j=0}^k |a_{k+j}| |z|^j)$   
 $> |z|^k (|a_k| - \frac{C}{\delta^{k+1}} |z|^{k+1})$   
 $= |z|^k (|a_k| - \frac{C}{\delta} |z|) > 0 \quad \text{für } |z| \text{ genügl. klein}$   
 $\text{für } z_0 = 0$

Bsp einer analyt. nicht fortsetzbaren Funktion  
 $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m$  konv. in  $|z| < 1$   
 $z = r e^{i \frac{2\pi}{q}}$   
 $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m e^{i m \frac{2\pi}{q}}$   
 $= \sum_{m=0}^{\infty} r^m e^{i m \frac{2\pi}{q}}$   $\sum_{m=0}^{\infty} r^m$   
 nicht isolierte Singul.  $r \rightarrow 1$

Bsp einer analyt. fortsetzbaren Funktion  
 $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m$  konv. in  $|z| < 1$   
 $g(z) = \frac{1}{1-z}$  ist analyt. Fortsetzung von  $f(z)$  (einfache Polstelle in  $d$ )

Umbilden eine Potenzreihe  
 $f(z-a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$   
 $z-a = (b-a) + (z-b) = d + \xi$   
 $f(z-b) = c_0 + c_1(d+\xi) + c_2(d+\xi)^2 + \dots = [c_0 + c_1(b-a) + c_2(b-a)^2 + \dots] + [c_1 + 2c_2(b-a) + 3c_3(b-a)^2 + \dots] \cdot (z-b) + [c_2 + 3c_3(b-a) + 6c_4(b-a)^2 + \dots] \cdot (z-b)^2 + \dots$

Liouville  $f$  ganz  $|f(z)| \leq C|z|^N$   
 $\Rightarrow f$  Polynom von Grad höchst  $N$   
 Spez  $f$  ganz  $|f(z)| \leq C$   
 $\Rightarrow f$  konst.

$\Gamma(a_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-a)^n}$   
 $|a_n| \leq C \cdot |z|^N \cdot \frac{1}{|z|^n} = C \cdot R^{N-n} \rightarrow 0 \quad n > N \quad R \rightarrow \infty$

Anwend.: Fundam. Satz d. Algebr

$P$  Polynom ohne Nullst.  
 $\Rightarrow \frac{1}{P}$  ganz  $P \rightarrow \infty \Rightarrow z \rightarrow \infty$   
 schweht  $\frac{1}{P}$  beschränkt  $\Rightarrow \frac{1}{P}$  konst.  $\nabla$

genau:  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$   
 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{a_n z^n} = 1 \Rightarrow \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$   
 $\Rightarrow \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 > -\varepsilon \Rightarrow \frac{P(z)}{a_n z^n} > 1 - \varepsilon$   
 $\Rightarrow \frac{P(z)}{a_n z^n} > 1 - \varepsilon \Rightarrow \frac{P(z)}{a_n z^n} > 1 - \varepsilon$

Maximumprinzip  
 $f$  stetig auf  $\bar{D}$  analyt. auf  $D$   
 $|f(z)|$  nimmt Maximum auf  $\partial D$  an

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi e^{i\theta}) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) r d\theta$   
 $|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| r d\theta$   
 arithm. Mittel d. Werte auf Randkurve

**Lautenreihen**

**Polenreihen:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$  konv. radius  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$  falls exist.

Bsp.:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$   $R=0$   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$   $R=1/4$   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  konv. für  $\theta \neq k\pi$

$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$   $R=1$

**Taylorreihen:**  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$   $a_n = \frac{d^n f}{dz^n} \frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$   $n \geq 0$

Vor.  $f \in \mathcal{H}(D)$

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} f(w) dw$

**Lautenreihen:**  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$   $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$   $n \in \mathbb{Z}$

Vor.  $f$  analyt. in Ring  $D$  hegt. durch  $\gamma_1, \gamma_2$  um  $z_0$  ( $z_0$  schlichte Singul. d.h.  $\exists U(z_0)$  analyt.)

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$

$\frac{1}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$  für 1. Integral

$\frac{1}{\zeta-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(\zeta-z_0)^n}$  für 2. Integral

**Singularität:**  $U(a)$  hat holom. Seiten  $\exists U(a)$   $f$  von Holom. Stelle nach  $a$  fortsetzbar } sonst  $f$  nicht analyt.

$c_n = 0$   $n \geq 0$  hebbare Singul.

$c_n = 0$   $n \leq m < 0$  Pol mit Vielfachheit  $m$

$c_n \neq 0$   $n \leq -\infty$  wesentliche Singul.

isoliert: kein HP von Sing  
schlicht isoliert:  $\exists U$   $f$  analyt. in  $U$

Bsp  $f = \frac{1}{z}$  0 schlichte isolierte Singul.

$f = \frac{1}{\sqrt{z}}$  0 isolierte nicht schlichte

$f = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$  0 nicht isolierte Singul.

$f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  nicht isol. Singul. in  $|z|=1$

$f = \ln z$  isolierte nicht schlichte Singul.

$f = e^{1/z}$  wesentl. Sing. in  $z=0$   
 $= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$

$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$

Hauptteil analyt. Teil

einl. Pole:  $f = \frac{1}{g}$

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z-z_0)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z}{g'(z)}$

Berechn. d. Koeffizienten indem Koeff. von  $(z-a)^n \cdot f(z)$  bestimmt werden

$a_m = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-n}}{dz^{m-n}} (z-a)^n f(z) \cdot \frac{1}{(m-n)!}$

$\text{Res}(f(z), a) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z) \cdot \frac{1}{(n-1)!} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$   $n=1$  d.h. einfache Pol

**Residuensatz**  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, a_i)$   $a_i$  Singul.

**Argumentenprinzip**  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n-p$   $n \neq \text{Nst}$  mit  $p \neq \text{Pole}$  wie oben

logarithm. Residuensatz

$f(z) = (z-z_1)^{n_1} \cdot h(z)$   $h(z) \neq 0$  in der Nähe von  $z_1$ ; Nst

$f(z) = \frac{1}{(z-z_1)^{p_1}} \cdot k(z)$   $k(z) \neq 0$  in der Nähe von Pol  $z_1$

$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum \frac{n_i}{z-z_i} + \frac{h'}{h} = \sum \frac{-p_i}{z-z_i} + \frac{k'}{k}$

$\int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum n_i - \sum p_i = n-m$

**Satz von Rouché**  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$  auf  $\gamma$  ( $f, g$  analytisch)

$\Rightarrow f(z)$  und  $g(z)$  haben gleiche # Nullstellen innerhalb  $\gamma$

$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \rightarrow \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1$  inhomogene  $\frac{f(z)}{g(z)} \neq 0$

$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\frac{f}{g})'}{\frac{f}{g}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'f - f'g}{g^2} dz = \int_{\gamma} \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f} = 0$

Sturm-Liouville Probleme

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (x) \quad y(0), y(1), y'(0), y'(1) \text{ vorgeg.} \\ x \in [0, 1]$$

Lösung

- $\exists \text{ fun } \lambda \text{ lösbar} \Leftrightarrow \lambda = \mu_n$
- $\mu_n = n^2 \pi^2 + \int_0^1 q(x) dx + \mu_0 \quad \forall n^2 \in \mathbb{Z}$
- Lösung  $g_n(x)$  hat genau  $n+1$  NST in  $[0, 1]$
- $g_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x + o(\frac{1}{n})$
- $(g_n, g_m) = \delta_{nm} \quad \int_0^1 \langle f, g_n \rangle g_n$

Bsp

$$q(x) = 0 \quad y(0) = y(1) = 0 \\ \Rightarrow \mu_n = 4\pi^2 n^2 \\ g_n = \sqrt{2} \sin n\pi x \cdot \text{const}$$

Details

$$\langle g_n, g_m \rangle = \delta_{nm} \quad \int_0^1 m^2 \pi^2 (g_n, g_m) = (g_n, -g_m'') = \int_0^1 (g_n', g_m') = \int_0^1 (g_n', g_n) = \delta_{nm}$$

Aufgaben

zeigen dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

$$\int_0^1 x^2 e^{-2\pi i n x} dx = \begin{cases} \frac{1}{3} & n=0 \\ \frac{1}{2n^2 \pi^2} - \frac{1}{2\pi i n} & n \neq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6}) e^{-2\pi i n x} dx \\ = \begin{cases} \frac{2}{4\pi^2 n^2} & n \neq 0 \\ 0 & n=0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x e^{-2\pi i n x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=0 \\ \frac{1}{-2\pi i n} & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 e^{-2\pi i n x} dx = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^4} = \frac{1}{180} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{ged}$$

$f$  ganz  $|f(z)| \leq C|z|^n \quad \forall z$

$\exists \neq 0$  o. Teil A  $f = a_n z^n + \dots + a_0$  Liouville verall.

$$|a_n z^n + \dots + a_0| \leq C|z|^n \Rightarrow \frac{|a_n z^n + \dots + a_0|}{z^n} \leq C$$

$$\Rightarrow a_{n-1} = a_n = \dots = a_1 = 0$$

Satz v. Arzela Ascoli

$C(R, S)$   $R$  Gebiet in  $\mathbb{C}$   $S$  metrischer Raum

$F \subseteq C(R, S)$  quasikompaht  $\Leftrightarrow F$  glm. stetig auf jede komp. Teilmenge  $E \subset R$

$(\forall z \in R) \{f(z) | f \in F\} \subseteq A$  kompakt  $\subseteq S$

... für analyt. Funktionen

$F \subseteq \Theta(R)$  <sup>glm.</sup> quasikompaht  $\Leftrightarrow F$  glm. beschränkt auf  $A$  kompakt  $\subseteq R$

Monodromiesatz

$\gamma_1, \gamma_2$  homotop  $\Rightarrow$  analyt. Fortsetzung längs  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ergeben gleichen Funktionswert am Endpunkt

Satz v. Weierstrass

$f$  analyt. mit wesentl. Singul.  $a$

$$\exists \epsilon > 0 \quad (\forall \delta > 0) (\forall \epsilon > 0) (\exists \eta > 0) (\exists \rho > 0) \quad |z-a| < \rho \quad |f(z)-c| < \epsilon$$

Satz v. Hurwitz

$f_n(z) \in \Theta(D)$   $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$  auf komp. Unterraum  $A$

$f_n \neq 0 \Rightarrow f \neq 0 \quad \forall f \neq 0$

$f \neq 0 \Rightarrow |f(z)|$  hat Minimum auf  $\{z = z_0 | r \leq |z-z_0| \leq R\}$

$\rightarrow \frac{1}{f_n(z)} \xrightarrow{\text{glm.}} \frac{1}{f}$  auf  $\{z = z_0 | r \leq |z-z_0| \leq R\} = C$

$\frac{1}{f_n(z)} \xrightarrow{\text{glm.}} \frac{1}{f}$  auf  $\{z = z_0 | r \leq |z-z_0| \leq R\}$

$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$

Satz

$\forall \delta > 0 (\forall \epsilon > 0) (\exists \eta > 0) (\exists \rho > 0) \quad |z-a| < \rho \quad |f(z)-c| < \delta$

Monodromie:  $(\exists \delta > 0) \exists M \quad |f(z)| \leq M \quad |z-a| < \delta$

$a, b \in \mathbb{R}^n$  Cauchy  $\Rightarrow a_n = 0$

1. Fall  $f(z) = c$  hat NST in  $|z-a| < \delta \Rightarrow$  Teil

2. Fall keine NST in  $\dot{U}(a, \delta)$

$\rightarrow \frac{1}{f(z)-c}$  analyt. in  $|z-a| < \delta, z \neq a$

$f(z) = \frac{1}{g(z)} + c \quad g(z)$  wesentl. Singul. in  $z=a$

$\Rightarrow (\forall M) (\exists \eta > 0) \quad |z-a| < \eta \quad |f(z)-c| > M$

$\Rightarrow \frac{1}{|f(z)-c|} > M \Rightarrow |f(z)-c| < \frac{1}{M}$

- ①  $f$  analytisch in  $\emptyset$
- ②  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \exists! \forall a \in \emptyset$
- ③  $\oint f(z) dz = 0 \quad \forall \emptyset \in \emptyset$
- ④  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \forall a \in \emptyset$
- ⑤  $f = u+iv$   $u, v$  stetig, diffbar  
Cauchy-Riemann Bed.  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -i \frac{\partial f}{\partial z}$
- ⑥  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = 0$
- ⑦  $f$  konform (Winkel u. Orientierung)

①  $\Leftrightarrow$  ② Def

②  $\Leftrightarrow$  ③ " "

$$\frac{d}{dz} f(z) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \frac{u(x+\xi, y) - u(x, y)}{\xi} + i \frac{v(x+\xi, y) - v(x, y)}{\xi} \right)$$

$$= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \frac{u(x, y+\xi) - u(x, y)}{i\xi} + i \frac{v(x, y+\xi) - v(x, y)}{\xi} \right)$$

$$= u_x - v_y \quad v_x = -u_y$$

③  $\Leftrightarrow$  ④ trivial

④  $\Leftrightarrow$  ⑤ Green

$$\oint f dz = \int \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$$

⑤  $\Leftrightarrow$  ⑥ Cauchy Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$\frac{d^n f}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

$$|a_n| r^n \leq M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{Cauchy ungl.}$$

$f$  ganz  $|f(z)| \leq C \cdot |z|^N \Rightarrow f$  Polynom von Grade  $\leq N$

Verallgemeinern von Liouville

Maximumprinzip

$$D \text{ offen zush. } f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\bar{D})$$

$$\sup_{z \in \partial D} |f(z)| = \sup_{z \in \bar{D}} |f(z)|$$

Schwarz'sches Lemma

$$f(z) \in \mathcal{O}(\{ |z| < 1 \})$$

$$|f(z)| \leq 1, f(0) = 0 \Rightarrow |f(z)| \leq |z|$$

$$|f'(z)| = |z| \quad (z=0) \Rightarrow |f'(0)| \leq 1$$

Identitätssatz

$$f \in \mathcal{O}(D) \quad \exists z_0 \in D \quad z_0 \in \mathbb{R} \quad f(z_0) = 0$$

$$\Rightarrow f \equiv 0$$

Residuumprinzip

$$f \text{ meromorph}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = n \cdot \text{Res}_{z=a} f(z) \quad n \neq n_{\text{St}}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z f(z)}{z-a} dz = \sum_{i=1}^p a_i - \sum_{j=1}^q p_j$$

Umlaufzahl

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

Differentialgleichungen

Wärmeleit. Gleich.

$$u_t = \frac{\alpha}{2} u_{xx}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = f(x)$$

$x \in (-\infty, \infty) \quad t > 0$   
Cauchy Problem

Lösung: Fourierreihe

$$\hat{u}_t = \alpha \cdot \left(-\frac{k^2}{2}\right) \cdot \hat{u} \Rightarrow \hat{u} = e^{-\frac{\alpha k^2}{2} t} \cdot \hat{f}(k)$$

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha k^2}{2} t} \hat{f}(k) e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha k^2}{2} t} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2 \alpha}{2} t} \cdot f(x)$$

Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx} \quad x \in [0, \ell] \quad t > 0$$

$$u(0, x) = f(x) \quad u_x(0, x) = g(x) \quad u(0, t) = u(\ell, t) = 0$$

1. Lösung (mit Fourierreihe)

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -k^2 \hat{u} \Rightarrow \hat{u} = A(k) e^{ikt} + B(k) e^{-ikt}$$

$$\hat{u}(0, k) = A(k) + B(k) = \hat{f}(k)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, k) = ikA(k) - ikB(k) = \hat{g}(k)$$

$$A(k) = \hat{f}(k) - \frac{1}{2} \hat{g}(k) \quad B(k) = \hat{f}(k) + \frac{1}{2} \hat{g}(k)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell} A(k) e^{ik(x+it)} + B(k) e^{ik(x-it)} dk$$

2. Lösung (mit Fourierreihen)

Ansatz  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell}$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} C_n(t) = -\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} C_n(t) \Rightarrow C_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi t}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi t}{\ell}$$

$$C_n(0) = a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad \frac{\partial}{\partial t} C_n(0) = b_n \frac{n\pi}{\ell} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi t}{\ell} \right)$$

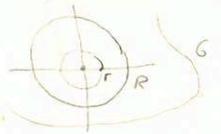
$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

Aufgaben

Anwend. zum Maxim. Prinzip:

62

$f, g$  analyt. auf  $\{ |z| \leq R \}$   
 $f, g \neq 0$  auf  $\{ |z| < R \}$   
 $H = |g|$  auf  $\{ |z| = R \}$   $\rightarrow f = c \cdot g$



$\Gamma$   $r < R$   $\frac{f}{g}, \frac{g}{f}$  analyt. in  $\{ |z| < r \}$

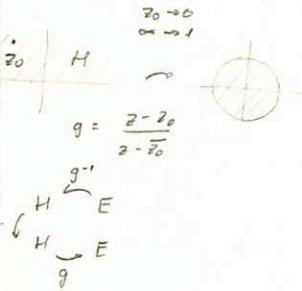
$|\frac{g}{f}|, |\frac{f}{g}| \leq 1$  Maximumprinzip  $\frac{f}{g}, \frac{g}{f}$  stetig auf Rand (da beschränkt) stetig fortsetzbar

$\rightarrow |\frac{g}{f}| = 1$  in  $\{ |z| < r \}$  d.h.  $f = c \cdot g$  in  $\{ |z| < r \}$

Fortsetzen auf ganz  $G$ .  $\square$

Anwend. d. Schwarz'schen Lemmas

$f$  analyt. in  $H$   $f(H) \subseteq H$   
 zeige  $(\forall z_0 \in H) \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) - \overline{f(z_0)}} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \right|$



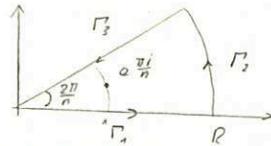
$\Gamma g \circ f \circ g^{-1} : E \rightarrow E \quad 0 \mapsto 0$

Schwarz  $\Rightarrow |(g \circ f \circ g^{-1})(w)| \leq |w|$

$|g \circ f(z)| \leq |g(z)|$

$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) - \overline{f(z_0)}} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \right| \quad |g \circ f(z)| \leq |g(z)|$

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}$$



$\int_{\Gamma_2} \rightarrow I_n \quad (R \rightarrow \infty)$

$\int_{\Gamma_3} \frac{dz}{1+z^n} = - \int_{\Gamma_1} \frac{e^{2\pi i/n} dz}{1+z^n} = -e^{2\pi i/n} \cdot I_n$

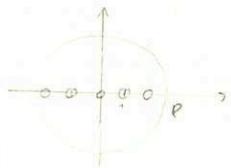
$\int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^n} = \int_0^{2\pi/n} \frac{Rie^{i\theta} d\theta}{1+R^n e^{in\theta}} \rightarrow 0 \quad (R \geq 2)$

d.h.  $I_n (1 - e^{2\pi i/n}) = 2\pi i \text{Res} \left( \frac{1}{1+z^n}, e^{2\pi i/n} \right)$

$\lim_{z \rightarrow e^{2\pi i/n}} \frac{(z - e^{2\pi i/n})}{1+z^n} = \lim_{z \rightarrow e^{2\pi i/n}} \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{n e^{2\pi i(n-1)/n}} = \frac{1}{n e^{2\pi i(n-1)}} = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{2\pi i/n}}{1 - e^{2\pi i/n}} \cdot 2\pi i = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}$  qed.

$\int_{\Gamma} \frac{z}{\sin \pi z} dz$

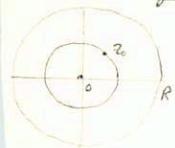


$\int_{\Gamma} \frac{z}{\sin \pi z} dz = 2\pi i \sum_{|n| < R} \text{Res} \left( \frac{z}{\sin \pi z}, n \right)$

$\text{Res} \left( \frac{z}{\sin \pi z}, n \right) = \lim_{z \rightarrow n} \frac{(z-n)z}{\sin \pi z} \stackrel{H}{=} \lim_{z \rightarrow n} \frac{z^2 - n^2}{\pi \cos \pi z} = \frac{n \cdot (-1)^n}{\pi}$

$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \text{Res} \left( \frac{z}{\sin \pi z}, n \right) = 0$

konverg. radius



$f$  analyt. in  $\{ |z| < R \}$  mit Ausnahme v.  $z_0$  wo einfache Pol  
 $\sum a_n z^n$  Taylorentwicklung von  $f$  im Ursprung  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r_0$

$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} g(z)$   $g$  analyt. in  $\{ |z| < R \}$

$= \left( \frac{1}{z_0} \right)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^n} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{k+n}} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{k+n+m}} b_m z^{n+m}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{k+n+m}} b_m z^{n+m} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = z_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{z_0^{n+1}} \cdot \frac{z_0^n}{c_n} = z_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{z_0^{n+1}} \cdot \frac{z_0^n}{c_n}$

$= z_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{z_0^{n+1}} \cdot \frac{z_0^n}{c_n} = z_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(z_0)}{g(z_0)} = z_0$

$f$  analytisch und nicht konst. auf  $\{z \mid |z| < 1\}$   
 $|f|$  konst auf  $|z|=1 \Rightarrow f$  hat mind eine NST.

keine NST  $\left. \begin{array}{l} \frac{|f(z)|}{h} = 1 \text{ auf Rand} \\ \frac{|f(z)|}{h} \text{ analyt} = 1 \text{ auf Rand} \end{array} \right\} \begin{array}{l} |f(z)| = h \text{ überall} \\ \text{(Maximumprinzip)} \\ \Rightarrow f(z) = \text{konst} \end{array}$

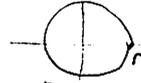
Cauchy Abschätzung

$P$  Polynom  $n$  ten Grades  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = P(z)$   
 $|z| < 1 \Rightarrow |P(z)| < M$   
 $|z| > 1 \Rightarrow |P(z)| < M \cdot |z|^n$

$\Gamma$  innerhalb  $\{z \mid |z| < r\}$

$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$  (Cauchy)

$|z| < r \Rightarrow |P(z)| \leq \sum_{m=0}^n |a_m| r^m < M \cdot |z|^n$



$\sum_{m=0}^n \frac{1}{r^m} \rightarrow 1 \text{ m} \rightarrow \infty$

Minimumprinzip

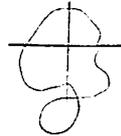
$f$  analytisch in  $\{z \mid |z| < 1\}$  stetig in  $\{z \mid |z| = 1\}$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1 \quad f(z_1), f(z_2), \dots$  beschränkt

1. Fall  $f$  hat keine NST.  $\Rightarrow \frac{1}{f}$  analyt. hat Maxim. auf  $\{z \mid |z| = 1\}$   
 $\Rightarrow f$  hat endl Minimum auf  $\{z \mid |z| = 1\}$   
 konst. Folg. nach  $z_0 \quad f(z_0) < \infty \quad f(z_n) \rightarrow \infty$  komp. Mang.

2. Fall  $f$  hat unendl. viele NST.  $\Rightarrow$  identisch  $f = 0$   
 3. Fall  $f$  hat endl. viele NST  $f = \prod_{i=1}^n (z - a_i) g(z)$

Umlaufzahl

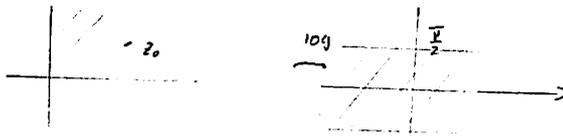
$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z^4} = \pi i$  Umlaufstetigkeit um 0?



$n i = \int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z^4} = n \cdot 2\pi i \cdot \text{Res} \left( \frac{e^z}{z^4}, 0 \right)$

$\Rightarrow n = 3$

Zerlegeweise von  $\log z$  in  $z_0$



$a_0 = \log z_0 \quad a_n = \frac{1}{z_0^n} \quad a_1 = -\frac{1}{z_0} \quad \dots \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n z_0^n}$

$\Rightarrow \log z = \log z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n z_0^n} (z - z_0)^n$

nützliche Sätze

$\alpha$  Pol v. ordn.  $n$  von  $f(z)$   
 $\text{Res}(f(z), \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{ (z-\alpha)^n f(z) \}$

$z = Re^{i\theta} \quad |f(z)| \leq \frac{M}{\rho^k} \quad k > 1 \quad M \text{ konst}$   
 $\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0$

$z = R e^{i\theta} \quad |f(z)| \leq \frac{M}{\rho^k} \quad k > 0 \quad M \text{ konst}$   
 $\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sin \theta f(z) dz = 0 \quad m > 0$

$r$  rationale Funktion mit  $n$  Nullst.  $z_j$  die nicht zu  $\mathbb{R}$  gehören  
 $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = -\sum_{j=1}^n \text{Res}(f(z), z_j) \cdot \ln(z_j)$

$\Gamma f(z) = \frac{a_1 n}{(z-\alpha)^n} + \frac{a_2 n-1}{(z-\alpha)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z-\alpha} + a_n + \dots$   
 $(z-\alpha)^n f(z) = a_1 n + a_2 n-1(z-\alpha) + \dots + a_{n-1} (z-\alpha)^{n-1} + a_n (z-\alpha)^n + \dots$   
 $\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-\alpha)^n f(z) = a_1 (n-1)! + 0 + \dots$   
 $\lim_{z \rightarrow \alpha} \dots = a_1 = a_{n-1} (n-1)! \quad |$

$\Gamma \int_0^{2\pi} f(z) dz \leq \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| R d\theta \leq \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^{k-1}} d\theta \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty$

$\Gamma \int_0^{2\pi} |f(z) dz| \leq \int_0^{2\pi} |e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})| R d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-mR \sin \theta} \dots$   
 $= \int_0^{\pi} e^{-mR \sin \theta} \frac{M}{R^{k-1}} R d\theta \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi} e^{-mR \sin \theta} d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \theta} d\theta$   
 $\leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR \frac{2\theta}{\pi}} d\theta = \frac{2M}{R} (1 - e^{-mR}) \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty$   
 $\rightarrow$  erlöse:  $2M/R$

gleichw. Integration  
 $\sum_{r=0}^b h_r$  konv. g.lm  $\Rightarrow \int_a^b \sum_{r=0}^b f_r(x) dx = \sum_{r=0}^b \int_a^b f_r(x) dx$

Cauchy Integral  
 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^0$  monoton fallend  $\sum_{r=0}^b f(r)$  konv  $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \exists$  Bsp  $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$

uneigent. Integrale  
 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r} dx = \frac{1}{1-r} x^{1-r} \Big|_1^{\infty} \quad r > 1$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln  \sec x + \tan x $	$\int x \cdot \sin ax = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cdot \cos ax}{a}$	$\int \tan ax = -\frac{1}{a} \ln  \cos ax $
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \text{arsinh} \frac{x}{a}$	$\int \frac{1}{\sin x} dx = -\ln  \csc x + \cot x $	$\int x^2 \cdot \sin ax = \frac{2x}{a^2} \sin ax - (\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^2}) \cos ax$	$\int \cot ax = \frac{1}{a} \ln  \sin ax $
$\int \frac{1}{1+x^2} = \text{arctanh} \frac{x}{a}$	$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2ax$	$\int x \cdot \cos ax = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \cdot \sin ax}{a}$	$\int \ln x = x \ln x - x$
	$\int \sin^2 ax dx = -\frac{1}{2a} \cos ax + \frac{1}{4a} \cos 2ax$	$\int x^2 \cdot \cos ax = \frac{2x}{a^2} \cos ax + (\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^2}) \sin ax$	
	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2ax$	$\int \frac{1}{\sin ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln \left  \frac{1}{\sin ax} - \cot ax \right $	
	$\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2a} \sin ax - \frac{1}{4a} \sin 2ax$	$\int \frac{1}{\cos ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln \left  \frac{1}{\cos ax} + \tan ax \right $	

Bestimmt Integrale

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^a} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1)$	$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad a > 0$
$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^a} = -\pi \cot a\pi \quad (0 < a < 1)$	$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x^s} dx = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \cdot \sin(\pi/2 s)} \quad 0 < s < 2$	$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^2}$
$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = \frac{\pi}{b \cdot \sin \frac{a\pi}{b}} \quad 0 < a < b$	$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x^s} dx = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \cos \pi/2 s} \quad 0 < s < 1$	$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a < 0 \end{cases}$
		$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} \quad a > 0, n \geq -1$

### Integralrechnung

Lemma v. Fatou

$$f_1, f_2, \dots : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ a.e.} \Rightarrow \int f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx$$

Satz von Lebesgue

$$f_1, \dots : \text{integrierbar}$$

$$f_n(x) \leq F(x) \text{ a.e.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ a.e.}$$

$$\Rightarrow f \text{ integrierbar} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx$$

Satz v. Fubini

$$\int_a^b \int_c^d |f(x,y)| dx dy \text{ absolut konv.}$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx$$

### Reihensummen

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

### Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1 \quad x > 0$$

### Trigonometrische Identitäten

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

### Integrale für Fourierreihen

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int x \cdot \sin ax dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cdot \cos ax}{a}$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2x}{a^2} \sin ax - \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cos ax$$

$$\int x^3 \sin ax dx = \left( \frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \sin ax - \left( \frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3} \right) \cos ax$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx)$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cdot \cos bx + b \cdot \sin bx)$$

### Potenzreihen

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Darstellung kompakt. topol. Gruppen

$G$  komp. topol. Gruppe

$C(G) = \{ f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig} \}$  Banachraum wenn  $0 \in \text{int } G$

$\|f\|_\infty = \sup_{z \in G} |f(z)|$

\*

lassen  $G$  auf sich selbst operieren, definieren Isometrie  $\| \cdot \|_2$  auf  $C(G)$

$0 \in G \implies f \in C(G)$   
 $L(a)f(z) = f(a^{-1}z)$   
 $R(a)f(z) = f(za^{-1})$   
 $\chi f(z) = f(\frac{z}{\chi}) = f(z \cdot \chi^{-1})$

$\|L(a)f\|_2 = \|f\|_2$

$L(ab)f(z) = L(a) \cdot L(b)f(z)$   
 $R(a-b)f(z) = R(a)R(b)f(z)$   
 $IR(a)f(z) = L(a) \chi f(z)$

Haarsches Integral:  $I : C(G) \rightarrow \mathbb{C}$  linear, stetig,  $L, R, \chi$  invariant  
 $I(\chi) = 1$  normiert

$\exists!$  positiv def. Haarsches Integral

$I(f) = \int_G f(g) dg$

können auf  $C(G)$  inneres Prod. definieren

$\langle f, g \rangle = I(f \cdot \bar{g}) = \int_G f(z) \bar{g}(z) dz$

d.h.  $C(G)$  wird Hilbertraum

$L^2(G)$  erweitert von  $C(G)$  her Norm

$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2}$

$\mathcal{S}$  irred. unit. Darst. von  $G$  mit dim  $m$

$\langle \mathcal{S}_{ij}, \mathcal{S}_{kl} \rangle = \frac{1}{m} \delta_{ik} \delta_{jl}$

$\mathcal{S}_{ij}$  nicht äquiv. irred. Darst.

$\langle \mathcal{S}_{ij}, \mathcal{S}_{kl} \rangle = 0$

$\langle \mathcal{S}_{ij}, \mathcal{S}_{kl} \rangle = \frac{1}{m} \delta_{ik} \delta_{jl}$

Birkhoff Satz

$\{ \mathcal{S}_{ij}^d \}_{d \in A}$  alle nicht äquiv. irred. Darstellungen  
 $\mathcal{S}_{ij}^d \quad d \in A \quad \sum_{i,j} \dim \mathcal{S}^d$   
 orthogonale Basis für  $L^2(G)$

$G$  kommutat.

$L^2(G)$  kommutat. Banachalgebra mit Spektrum  $M = \hat{G} = \{ \text{irred. Darstellungen} \}$  und hat Fourier-Info:  $L^1(G) \rightarrow L^1(\hat{G})$   
 $M$  ist Spektrum eines diskret. topol. Gruppe

$G$ -kommutat.:

Spektrum  $M$ : Raum der Charaktere  
 Raum der irred. Darstellungen von  $G$  ist keine Gruppe mehr.

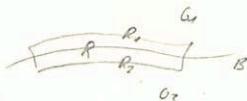
geg: In  $x$  haben wir eine Darstellung von  $G$  in ihrem Banachraum  $C(G)$   
 Die Existenz eines Haarsches Integrals macht es uns möglich, die Darstellung in  $L^2(G)$ , einem Hilbertraum, einzugliedern wo wir nach Peter weil sogar eine Basis haben.

KS 2 Ponkagin  
 DS 19  
 "Introduction to compact transformations groups"

Schwarz'sches Stetigkeitsprinzip

$D_{G_1} \cap D_{G_2} = B \quad f_1 \in \mathcal{O}(G_1) \quad f_2 \in \mathcal{O}(G_2)$   
 $f_1 \in C(B) \quad f_2 \in C(B) \quad f_1(z) = f_2(z) \text{ auf } B$   
 $\implies f_1$  und  $f_2$  sind analyt. Fortsetzungen voneinander

Bew

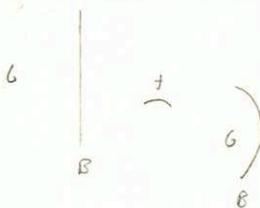


definieren in  $R$ :  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(w)}{w-z} dw$

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_2} \frac{f(w)}{w-z} dw$

$f$  stellt in  $R_1$   $f_1$  dar, in  $R_2$   $f_2$  dar

Involter: Spiegelungsprinzip



$f \in \mathcal{O}(G) \cap C(\bar{G}) = D \cup B \quad f|_B$  Möbiustransf.  
 $\implies f|_B$  über  $B$  hinaus so analytisch fortsetzbar:  $G^* = \sigma(G)$   
 $f(z^*) = \overline{f(z)}$

kleine Satz von Picard

Verhältnis von Wertesatz

$f \in \mathcal{O}(U(a)) \quad a$  wesentliche Singul.  
 $(\forall \epsilon \exists \delta \exists \eta) \quad f(U(a, \delta) \setminus U(a, \eta)) = \mathbb{C} \setminus \Omega_\epsilon$  (jeder Wert von  $\mathbb{C}$  wird mit angen. mit höchstens eine Ausnahme)

Satz von Picard

$f$  ganz  $f(z) = e^{-\xi} \{ \exists \delta \exists \eta \exists \epsilon \}$   $a=b \implies f$  konstant

↑  
 Sätze sind äquivalent

①  $\implies$  ②

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$a=0$  o. F.d.A

$g(z) := f(\frac{z}{\xi})$  ganze Funktion nimmt jeden Wert von  $\mathbb{C}$  mit höchst eine Ausnahme an

②  $\implies$  ①

$f$  ganz transzendent  $g(z) := f(\frac{z}{\xi})$  hat in  $0$  wesentl. Singul. nimmt in jeder Umgeb. von  $0$  jeden Wert mit höchst eine Ausnahme an

Fourierkoeffiz.

Faltung

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \quad f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$$

Schwartzraum

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall m, n \geq 0 \exists C \text{ s.t. } |f(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} \}$$

- (i)  $f \hat{=} \delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f}(\xi) = f(-\xi)$
- (ii)  $\lambda \text{ EW von } A \Rightarrow \lambda = \pm 1, \pm i, \dots$
- (iii)  $f * g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \forall f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
- (iv)  $f * g = \hat{f} \cdot \hat{g}$
- (v)  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
- (vi)  $f * g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
- (vii)  $f * g = g * f \quad (f * g)(x) = \int f(x-y)g(y) dy = \int f(y)g(x-y) dy = (g * f)(x)$

- (i)  $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \hat{f}(-\xi) = f(-\xi)$
- (ii)  $f = \lambda f \Rightarrow \hat{f} = \lambda \hat{f}$
- (iii)  $\|f * g\| = \frac{1}{2\pi} \int \|f * g(x)\| dx = \int \|f(x-y)g(y)\| dy dx = \|f\| \|g\|$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = (ik)^n \hat{f}(k) \quad ; \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x) = (-i\xi)^n \hat{f}(\xi)(k)$$

- (iv)  $|k^m \frac{d^n}{dx^n} f(x)| = |k^m (-i\xi)^n \hat{f}(\xi)(k)| = |(ik)^m (-i\xi)^n \hat{f}(\xi)(k)| = \left| \frac{d^m}{dx^m} (-i\xi)^n \hat{f}(\xi)(k) \right| \rightarrow 0 \text{ da } \frac{d^m}{dx^m} (-i\xi)^n \hat{f}(\xi) \in \mathcal{S}'$
- (v)  $f * g = \hat{f} \cdot \hat{g}$  da (iv) und schon in (vi) gezeigt  $\Rightarrow f * g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
- (vi)  $f * g = \hat{f} \cdot \hat{g} = \hat{g} \cdot \hat{f} = \widehat{g * f} \Rightarrow f * g = g * f$   
 wobei  $\int f(x-y)g(y) dy = \int f(y)g(x-y) dy = \int f(y)g(x-y) dy$

$$\hat{f * g} = \frac{1}{2\pi} \int \int f(x-y)g(y) e^{-i\xi(x-y)} e^{-i\xi y} dy dx = \frac{1}{2\pi} \int \int f(x)g(y) e^{-i\xi x} e^{-i\xi y} dy dx = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$\int \frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d}{dx} f(x) e^{-i\xi x} dx = ik \cdot \hat{f}(k)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \hat{=} \frac{1}{2\pi} \int f(x) e^{-i\xi x} dx = (-i\xi) \hat{f}(\xi)$$

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \supseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$$

$$\int \int f(x-y)g(y) h(y) dy dx = \int \int f(x)g(x-y)h(y) dy dx = \int \int f(x)g(y)h(x-y) dy dx = f * (g * h)$$

Differentialoperatoren

$$A = \frac{1}{i} \left( \frac{d}{dx} + x \right)$$

$$A^* = \frac{1}{i} \left( -\frac{d}{dx} + x \right)$$

$$H = A^*A = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1 \right)$$

$$A \hat{f} = i A^* \hat{f} \quad A^* \hat{f} = -i A \hat{f}$$

$$H \hat{f} = H^* \hat{f}$$

$$A \hat{f} = \frac{1}{i} \left( \frac{d}{dx} \hat{f} + x \hat{f} \right) = \frac{1}{i} (ik \hat{f} + i \frac{d}{dx} \hat{f}) = -\hat{f} + \frac{d}{dx} \hat{f}$$

$$A^* \hat{f} = \frac{1}{i} \left( -\frac{d}{dx} \hat{f} + x \hat{f} \right) = \frac{1}{i} (-ik \hat{f} + i \frac{d}{dx} \hat{f}) = -i \hat{f} + \frac{d}{dx} \hat{f}$$

$$H \hat{f} = A^*A \hat{f} = -i A^* \hat{f} = A^* A^* \hat{f} = H^* \hat{f}$$

Skalarprod. in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} dx$$

Hermitesche Funktl.

$$h_0 = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$h_n = \frac{(A^*)^n h_0}{\sqrt{n!}}$$

- (i)  $\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{ij}$
- (ii)  $A^* h_n = \sqrt{n+1} h_{n+1}$   
 $A^* h_n = \sqrt{n} h_{n-1}$   
 $H h_n = (n - \frac{1}{2}) h_n$
- (iii)  $\hat{h}_n = (-i)^n h_n$
- (iv)  $\langle f, A^* g \rangle = \langle A f, g \rangle$

\*  $[A, A^*] = 1$

Indukt:  $A A^* - A^* A = 1$

$$A A^* - A^* A = (A A^* - A^* A) A^* + A^* (A A^* - A^* A) = 2 A^*$$

$$A A^{n+1} - A^{n+1} A = (A A^* - A^* A) A^n + A^* (A A^* - A^* A) A^n + A^{n+1} (A A^* - A^* A) = 2 A^* A^n$$

$$= (n+1) A^* A^{n-1} + A^* A^n = (n+1) A^* A^{n-1} + n A^* A^{n-1} = (2n+1) A^* A^{n-1}$$

- (i)  $\langle A^* h_n, A^* h_n \rangle = n! \langle h_n, h_n \rangle$  durch Induktion  
 $\langle A^* h_n, A^* h_n \rangle = \langle A A^* h_n, A^* h_n \rangle$  (nach iv)  
 $= \langle A A^* h_n, A^* h_n \rangle = \langle [A, A^*] h_n, A^* h_n \rangle$   
 $= \langle n A^* h_n, A^* h_n \rangle$
- (ii)  $A^* h_n = \sqrt{n+1} h_{n+1}$  klar nach (i)  
 $H h_n = H A^* h_n = A^* A A^* h_n = A^* [A, A^*] h_n$   
 $= \frac{A^* A^{n+1}}{\sqrt{n!}} = \frac{A^* A^n}{\sqrt{n!}} = n \cdot h_n$

$$A h_n = A A^* h_n = \frac{A^* h_{n+1}}{\sqrt{n!}} = \sqrt{n+1} h_{n+1}$$

$$A^* h_n = \frac{A^* h_n}{\sqrt{n!}} = (-i)^n h_n$$

$$\text{folgt aus } \left( \frac{d}{dx} f, g \right) = \left( f, -\frac{d}{dx} g \right)$$

$$(x \cdot f, g) = (f, x \cdot g)$$

Hermitesche Entwicklung von f

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n \rangle h_n$$

$$\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n \rangle \hat{h}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n \rangle (-i)^n h_n$$

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, h_n \rangle|^2 = \|\hat{f}\|_2^2$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n \rangle \langle \hat{g}, h_n \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

A unitär  $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$

$$i \frac{d}{dx} s. o$$

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \sum \langle f, h_n \rangle \langle \hat{g}, h_n \rangle = \langle f, g \rangle$$

Wegen von  $i \frac{d}{dx}$

$$\forall \alpha \frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha \cdot f(x)$$

$$\left( i \frac{d}{dx} f \right)^\wedge = x \hat{f} = x \hat{f}$$

Parseval Ungl.

$$f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)|^2 dx \geq \frac{1}{2} \|f\|_2^2$$

- Eindeutigkeit
- $\langle f, h_n \rangle = 0 \quad \forall n \geq 0$
- $0 = \langle f, h_n \rangle = \langle f, \frac{A^* h_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \langle f, A^* h_{n+1} \rangle$   
 $= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \langle f, (A^* A) h_n \rangle = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \langle f, A^* h_n \rangle$
- $\Rightarrow 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle f, h_n \rangle = \int f(x) e^{ikx} dx$   
 $= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_0(k) dk \Rightarrow \hat{f}_0 = 0 \Rightarrow f = 0$
- vollst. weil?  $\downarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2m} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2m} |\hat{f}(k)|^2 dk = \int_{\mathbb{R}^n} |k|^{2m} |\hat{f}(k)|^2 dk$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |k|^{2m} |\hat{f}(k)|^2 dk \geq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |k|^{2m} |\hat{f}(k)|^2 dk \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)|^2 dk \right)^{1/2}$$

$$\geq \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |k|^{2m} |\hat{f}(k)|^2 dk \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)|^2 dk \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \|f\|_2^2$$

Vergleich Fourierreihen - Fouriertrafo

Fourierreihen

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{inx}$$

$$L^2(T) \leftrightarrow l_2(\mathbb{Z})$$

$$C^1(T)$$

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} f(k) = 0$$

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^2$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\widehat{f'(k)} = ik \widehat{f}$$

$$\widehat{f'(x)} = (-ix) \widehat{f(x)}$$

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$$

Fouriertrafo

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-inx} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{inx} dx$$

Trafo

$$L^2 \leftrightarrow L^2$$

$$C_0(T)$$

Räume

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} f(k) = 0$$

Riemann Lebesgue Lemma

$$\|f\|^2 = \|\widehat{f}\|^2$$

Parseval

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

in  $L^2(T)$  bzw.  $L^2$

$$\widehat{f'(k)} = ik \widehat{f}$$

$$\widehat{f'(x)} = (-ix) \widehat{f(x)}$$

Ableit.

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$$

unitär  $\rightarrow$  Parseval

allg. Fourierreihe

$$f(n) = \frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} f(x) e^{-2\pi i n x / 2L} dx$$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x / 2L}$$

allg. Fourtraf

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2L} \int_a^{a+2L} f(x) e^{-2\pi i n x / 2L} dx$$

$$f(x) = \int_a^{a+2L} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x / 2L} dn$$

Bei Fouriertrafo nach Symmetrisierung

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx = \frac{1}{16} \pi a^{-3} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2} \quad a, b > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)x^a} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad 0 < a < 1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = \frac{\pi}{b \cdot \sin \frac{a\pi}{b}} \quad 0 < a < b$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad a > 0 \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} \quad a > 0, n > -1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x^s} dx = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \sin s\pi/2} \quad 0 < s < 2$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cosh bx}{x^s} dx = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \cos s\pi/2} \quad 0 < s < 1$$

$f \in C^1(\bar{D})$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{df/dz}{z-w} dz \quad \text{Verallgem. von Cauchy}$$

$$\int_{\partial D} \frac{f(w)}{z-w} dw + \int_{|z-w|=\varepsilon} \frac{f(w)}{z-w} dw = \int_{\partial D} \frac{df(w)}{z-w} d\bar{w} + dw \quad \text{Green}$$

$\xrightarrow{s \rightarrow 0} -2\pi i f(z)$ 
 $\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F$

Jordanische Normalform

Beachte:

$$P(A) = (A - \lambda)^n$$

$$P(A)P(A') = P(A) [(A' - \lambda) P(A')] = [P(A)(A - \lambda)] P(A')$$

$$= (A - \lambda) P(A) P(A')$$

1. Streutheorie

$n$ : Anzahl Teilchen, die pro Zeiteinheit durch Flächeneinheit d. Strahlquerschnitts durchfließen

$$dN = 2\pi b db \cdot n d\varphi$$

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = 2\pi b db \cdot d\varphi \text{ Wirkungsquerschnitt}$$

$$d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi \cdot d\varphi \text{ Raumwinkel}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b \cdot db}{\sin \chi d\chi}$$

$$\chi = \pi - \Delta\varphi$$

nun gilt:

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b/r^2 dr}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{v_{\infty}^2}}}$$

totaler Wirk. querschnitt  $= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$

Einschussbene

Speziell:  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

$$\Delta\varphi = 2 \arccos \left( \frac{\alpha/\mu v_{\infty}^2 b}{1 + (\alpha/\mu v_{\infty}^2 b)^2} \right)$$

$$\rightarrow b^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_{\infty}^4} \cot^2 \left( \frac{\chi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\alpha}{2\mu v_{\infty}^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\chi/2)}$$

Rutherford'sche Streuformel

Bewegung im Zentralfeld

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r) \quad \text{cyclisch}$$

$$\frac{dL}{d\dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = H \text{ Drehimpuls} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{H}{m \dot{\varphi}}}$$

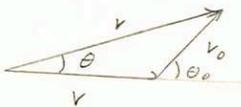
$$E = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{H^2}{2mr^2} + U(r) \right)$$

Werkn. d. Zentrifug. Kraft

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U) - \frac{H^2}{mr^2}}} \quad d\varphi = \frac{H}{mr^2} dt \quad \varphi = \int \frac{H}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{H^2}{r^2}}}$$

Zerfall von Teilchen

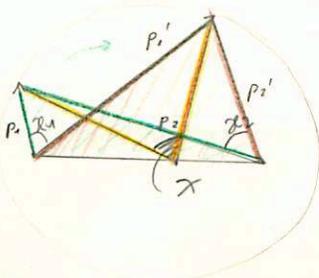
Umrechnung: Laborsystem, Schwerpunktsystem



$\theta_0, v_0$  im Schwerpunktsystem

$$\tan \theta = \frac{v_0 \cdot \sin \theta_0}{v + v_0 \cos \theta_0}$$

elastische Stoss von Teilchen:



Im Laborsystem haben wir eine Richtung  $\alpha$ .  
Im Schwerpunktsystem wird aus eine Richtung

## 2. Lineare Schwingungen

Auch nicht lineare Systeme, können durch Linearisierung angepackt werden.

Hamilton

$(M^{2n}, \omega)$  symplektische Mannigfaltigkeit

$H: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  Hamiltonfunktion  $\nabla H: TM^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \in T^*M^{2n}$

$-J\nabla H \in TM^{2n}$

$I: TM \rightarrow T^*M$  Isomorphismus

$$\dot{x} = -J \frac{dH(x)}{dx}$$

$$\xi \rightarrow \omega_\xi = \omega(\cdot, \xi)$$

$$\dot{x} = -J \nabla H(x) \quad \text{Hamiltonsche Bewegungsgln.}$$

wir studieren jetzt allgemeiner

$$\dot{x} = f(x)$$

wobei  $x_0$  ein Gleichgewichtspunkt sein soll, d.h.  $f(x_0) = 0$ . Im Punkt  $x_0$  ist das Vektorfeld  $f$  verschwunden. Das ist genau dann der Fall, wenn  $\frac{dU}{dq} \Big|_{q_0} = 0$

In der Nähe d. Gleichgewichtspunktes  $x_0$  können wir das System linearisieren:

$$\dot{x} = A \cdot x$$

Lösung dieses Systems mit Dyson Reihe:

$y$  Anfangspunkt

$$x(t) = y + \int_0^t A(t_1) x(t_1) dt_1 = y + \int_0^t A(t_1) y dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} A(t_2) x(t_2) dt_2 = \dots \quad \text{Dyson Reihe}$$

$$x(t) = R(t) \cdot y \quad \text{R(t) Propagator}$$

$$R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} y \prod_{i=1}^n A(t_i) dt_i$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{1}{n} A\left(\frac{t_i}{n}\right) \right) y$$

Konvergenz:  $\|R\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \int_0^t \dots \int_0^{t_{n-1}} \prod_{i=1}^n A\left(\frac{t_i}{n}\right) dt_i \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \max_i \|A\| \left(\frac{t_i}{n}\right) \frac{t^n}{n!} = e^{\max \|A\| t} < \infty$

Speziell: harmonisches System:  $A = \text{const} \Rightarrow R(t) = e^{At}$

später werden Stabilitäts-eigenschaften untersucht. Die Definitionen:

Stabilität

$x = x_0$  asymptot. oder Liapunov stabil  $\Leftrightarrow |y - x_0| < d \Rightarrow |x - x_0| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$

$x = x_0$  stabil  $\Leftrightarrow |y - x_0| < d \Rightarrow |x - x_0| < c \quad (t \rightarrow \infty)$

$x = x_0$  stark stabil  $\Leftrightarrow x = x_0$  stabil für  $R^t$  wenn  $\|R^t - R^0\| < \epsilon \quad \exists \epsilon$

normalerweise gelangt man so in die obige Problemstellung:

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - U(q) \quad \text{Lagrangefunktion}$$

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (\dot{q}, A(q) \dot{q})$$

$$U(q) = \frac{1}{2} (q, B(q) q)$$

Annahmen:  $A(q) > 0$  Massen nicht verschwindend

$A(q) = A(0)$  Linearisierung

$B$  symmetrisch  $\Rightarrow$  reelles Potential

In diesem Fall können wir neue Koordinaten so wählen, dass die erste Bilinearform diagonalisiert wird

$$L(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} (\dot{Q}, \dot{Q}) - \frac{1}{2} (Q, C Q) \Rightarrow \ddot{Q} = -C \cdot Q$$

$$x = \begin{pmatrix} Q \\ \dot{Q} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x} = A \cdot x$$

was jetzt, wie oben angegeben gelöst werden kann.

Lagrange Besch.

speziell kann man noch hamon. Systeme betrachten

$\dot{x} = Ax$   $A$  konst.

Dieses System können wir in Jordansche Normalform bringen:

$A = E^{-1} J E$   $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$   $J_p = \begin{pmatrix} \mu_p & & \\ & \mu_p & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_p \end{pmatrix}$   $J_p = \lambda_p \cdot I + N_p$   
 $N_p = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$   $p=1 \dots k$

$e^{At} = E^{-1} e^{Jt} E = E^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k t} \end{pmatrix} E$

$e^{J_p t} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ t & \ddots & \\ \frac{t^2}{2!} & & \ddots & \\ \dots & & & \dots \\ \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} & & & 1 \end{pmatrix}$  denn  $J_p^n = (\lambda_p I + N_p)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \lambda_p^m N_p^{n-m}$

Stabilitäts betracht.

$x=0$  asympt. stabil  $\iff$   
 $\text{Re } \mu_j < 0 \quad j=1 \dots r$   
 $\text{Re } \lambda_p < 0 \quad p=1 \dots k$   
 $x=0$  stabil  $\iff$   
 $\text{Re } \mu_j \leq 0 \quad j=1 \dots r$   
 $\text{Re } \lambda_p < 0 \quad p=1 \dots k$

Norm. System

nach spezielle wären hamonische Lagrange systeme.

$L(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} (\dot{Q}, \dot{Q}) - \frac{1}{2} (Q, C Q)$   $C$  konst. diagonal

wir können koordinaten ergeten, die diese Bilinearformen diagonalisieren.

$\ddot{Q}_i = -\omega_i Q_i$  Normalkoordinaten

in Hamilton Schreibweise:  $\dot{x} = A \cdot x$   $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix}$   $\text{Sp } A = 0$   
 $\implies \det e^{At} = 1$

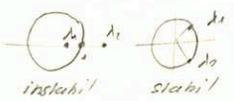
Der Fluss ist volumenerhaltend

wenn  $A$  nicht konstant ist sondern periodisch ändert, spricht man von parametrische Resonanz, d.h. es können für bestimmte Frequenzen Instabilitäten entstehen.

Ist in einem Lagrange System ein reelles EW  $\neq \pm 1 \implies$  System instabil.

Speziell im eindim. Fall:  $\det(P - \lambda I) = \lambda^2 - 1 \text{ Sp } P + 1$

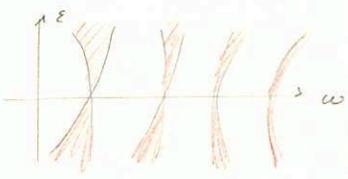
$\lambda_{1,2} = 1 \pm \frac{\text{Sp } P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{Sp } P}{2}\right)^2 - 1}$   $|\text{Sp } P| > 2 \implies$  Instabilität  
 $|\text{Sp } P| < 2 \implies$  instabilität



Als Illustration ein Bsp: Mathieu Gleichung

$\ddot{x} = -\omega^2 (1 + \epsilon \cos t) x$

$\epsilon = 0$   $A = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega & \frac{1}{\omega} \sin 2\pi\omega \\ -\omega \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{pmatrix}$   $\text{Sp } A = |2 \cos 2\pi\omega|$   
 $\omega = \frac{k}{2}$  instabil



Norm. Lagr. Systeme

Par. Resonanz

# Bewegung im Zentralfeld

Es gibt nur zwei Fälle in denen alle beschränkten Bahnen geschlossen sind, nämlich:

$$U = ar^2 \quad \text{und} \quad U = -\frac{k}{r} \quad k > 0$$

$a > 0$

## Lagrange Systeme → S. 83...

$M$  Konfig.raum,  $n$  dim Mannigfalt.

$TM$  Tangentialbündel

auf jedem Tangentialraum  $TM_x$  haben wir eine positiv def. quadr. Form  $TM_x \rightarrow \mathbb{R} \quad \xi \rightarrow \langle \xi, \xi \rangle$  d.h. eine Riemannsche Metrik

$M$  ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit

$L: TM \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktion

$\gamma$  heisst Beweg. im Lagrange System  $(M, L) \Leftrightarrow \gamma$  ist Extremum von  $\int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\gamma}) dt$   
 $\dot{\gamma}(t) \in TM_{\gamma(t)}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad q \text{ Koord. d. Punktes } \gamma(t)$$

natürlicher Lagrange System  $\Leftrightarrow L = T - U$

auton. Lagrange System  $\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0$

nicht auton. System  $\Rightarrow$  gleich lösen

System mit nichtholonomen Zwangsbedingungen

+ Zwangsgl.  $s = 1, \dots, r$   
 + Freiheitsgrade  $d = 1, \dots, t$

$$\sum \lambda^{(s)} \Lambda_{\alpha}^{(s)} \dot{q}^{\alpha} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} + \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} = \sum_s \lambda^{(s)} \Lambda_{\alpha}^{(s)}$$

### Noether Theorem

$h^s: M \rightarrow M$  einparam. Gruppe v. Diffeomorphismen  $L(h^s(q)) = L(q)$

$$\Rightarrow I(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{dh^s(q)}{ds} \Big|_{s=0} \quad \text{erster Integral} \quad \text{d.h.} \quad \frac{dI}{dt} = 0$$

$\Gamma \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  Lösung d. Lagrange gln

$$\phi(s, t) = h^s(\gamma(t)) = q$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial s}(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\partial L}{\partial q^i} \phi'^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{\phi}'^i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} q'^i + \frac{\partial L}{\partial q^i} q'^i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} q'^i \right) - L$$

$$\{H, F\} = 0 \Rightarrow \{F, H\} = 0$$

$$\{H, F\} = \omega^i(dH, dF) - dH(JdF)$$

$$\{F, H\} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(q_H^s(x))$$

$$= dF(dH) = \omega^i(dF, dH) = dH(JdF) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q^i}$$

Hamilton Systeme

$(M^{2n}, \omega)$  symplektische Mannigfaltigkeit

$T^*X$  (lang. Bündel auf  $V$  (ndim Mannf.)) hat symplektische Struktur:

$\omega^2 = dp \wedge dq$

ist sympl. Struktur:  $\omega' = p dq \quad \omega^2 = d\omega'$

können Isomorphismus  $J: T^*M \rightarrow TM$  bilden:  $\{ \rightarrow \omega'_\xi = \omega^2(\cdot, \xi) \}$

$H: M \rightarrow \mathbb{R}$  Hamiltonfunktion

$dH$  Differentialform auf  $M$

$JdH$  Vektorfeld auf  $M$  Hamiltonscher Vektorfeld

$g^t: M^{2n} \rightarrow M^{2n}$  Hamiltonsche Phasenfluss  $\Leftrightarrow \frac{d}{dt}|_{t=0} g^t x = JdH(x) \quad (M^{2n} = \mathbb{R}^{2n} \quad \dot{x} = JdH(x))$

Sympl. Struktur d. lang. Bündel

Kanon. Vektorfeld, sympl. Struktur

Lie Algebra d. Vektorfelder

Lie Algebra d. Skalar

Integral invariant von Poincaré-Cartan

Theorem von Liouville  $(g^t)^* \omega^2 = \omega^2$  Kanonische Trajektor Bew. S 204 Arnold

andere Formulierung (in Verteilung)

$\phi_{t,s}$  <sup>Fluss</sup> der lokal von  $J\dot{x} = \frac{dH}{dx}$  erzeugt wird  $\Leftrightarrow D\phi_{t,s}(x) \in Sp(2n, \mathbb{R})$

$\mathcal{V}_t$  Koordinaten von  $T$   $\phi_{t,s}$  Fluss zu  $J\dot{x} = \frac{dH}{dx} \quad y(t) = \mathcal{V}_t^{-1}(x(t))$   
 $\Rightarrow \exists k \quad \dot{y} = -J \frac{\partial k}{\partial y}$

symplekt. Gruppe  
 $PJ^T J M = J$   
 $\omega^2(M\xi, M\eta) = \omega^2(\xi, \eta)$   
 denn  $(PJ^T J M)^T = J^T M^T J M^T = -J^T J M^T = -J^T M^T J$

Der Raum der diffeom. Vektor auf  $M$  kann zu einer Lie algebra gemacht werden

Poisson Klammern, so definiert:

$A$  Vektorfeld  $A^t$  dazugeh. Fluss d.h.  $\frac{d}{dt}|_{t=0} A^t x = A(x)$

$e: M \rightarrow \mathbb{R}$   
 $L_A e(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} e(A^t x)$

$L_C = L_A L_B - L_B L_A \quad C = [A, B]$

Die zwei Flüsse  $A^t$  und  $B^s$  kommutieren  $\Leftrightarrow [A, B] = 0$

Auch der Raum der skalaren Funktionen von  $M$  kann zu einer Lie Algebra gemacht werden:

$F, H: (M^{2n}, \omega^2) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(F, H) = \frac{d}{dt} F(g^t_H(x)) \quad (F, H) = 0 \Leftrightarrow F$  erstes Integral  
 $= dF(JdH)$   
 $= \omega^2(JdF, JdH) \quad dH^T J dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i}$

Die Hamiltonschen Vektorfelder bilden eine Subalgebra d. obigen Algebra, ebenfalls die ersten Integrale (Poisson Theorem)

$[JdH_1, JdH_2] = 0 \Leftrightarrow (H_1, H_2)$  konst.

Noether neuformuliert:  $(H, F) = 0 \Leftrightarrow (F, H) = 0$   
 $F$  ist erstes Integral falls  $H$   $F$  respektiert.

Kanonische Formalismus

Stokes Lemma

$\oint \omega^t = \int \omega^t$   $\int_{\partial \Sigma} \omega^t = \int_{\Sigma} d\omega^t$   $\omega^t$  heißt d. Verteilung

Betrachten Form  $\omega^t = p dq - H dt$   $p = p(t) \quad q = q(t)$  Projektionen auf  $t$  Achse

$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$   $\oint p dq - H dt = \int p dq - H dt$   $p dq - H$  heißt Integral invariant von Poincaré-Cartan

Der Phasenfluss heißt die 2-Form  $dp \wedge dq$

$P(p, q) \quad Q(p, q)$  kanon. Trafo d. Koord.

$\Leftrightarrow pdq - PdQ = dS(p, q)$

Erzeugende Funktionen:  $\det \frac{d(Q, q)}{d(p, q)} \neq 0 \Rightarrow S(p, q) = S_1(Q, q)$

$pdq - PdQ = dS_1(Q, q) \Rightarrow \frac{dS_1}{dq} = p \quad \frac{dS_1}{dQ} = -P$  freie kan. Trafo

Suchen Erzeugende Funktion  $S$  sodass  $H(\frac{dS(Q, q)}{dq}, q, t) = k(Q)$

Damit wären die Hamiltongl. integrierbar

Können nicht immer Spitz  $S_1$  arbeiten + frei heisst, dass  $q, Q$  2n unabh. Koordin. sind  
Mit Legendetrafo erhalten wir weitere erzeugende Funktionen

$P, q$  unabh. lokale Koordin.  $pdq - PdQ = dS$   
 $pdq + QdP = d(PQ + S)$   
 $S_2$

Im ganzen können 2<sup>n</sup> erzeugende Funktionen angegeben werden

$P_i = (P_{i1} \dots P_{in}) \quad Q_j = (Q_{j1} \dots Q_{jn-k})$

Theorem

$g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  kanon. Trafo gegeben durch  $P(p, q), Q(p, q)$   
In der Umgebung jedes Punktes  $(p_0, q_0)$  mind. eine der 2<sup>n</sup> Mengen  $(P_i, Q_j, q)$  kann als unabh. Koordin. auf  $\mathbb{R}^{2n}$  gewählt werden

$\det \frac{d(P_i, Q_j, q)}{d(P_i, P_i, q)} = \det \frac{d(P_i, Q_j)}{d(P_i, P_i)} \neq 0$

Die kan. Trafo kann mit der erzeugend. Funktion

$S_2(P_i, Q_j, q) = (P_i, Q_j) + \int pdq - PdQ$  rekonstruiert werden

$p = \frac{dS_2}{dq} \quad Q_j = \frac{dS_2}{dP_i} \quad P_i = -\frac{dS_2}{dQ_j}$

Erzeugende Funktionen

Integrierte Systeme

$(M^{2n}, \omega)$  symplekt. Mannigfaltigkeit

$\exists F_1, \dots, F_n$  ( $F_i, F_j$ )<sup>in Involution</sup> = 0  $dF_i$  linear unabhängig d.h.  $\exists dt_i$  lin. unabh.

$M_f = \{x: F_i(x) = f_i \quad i=1, \dots, n\}$

- $\Rightarrow$  1.  $M_f$  glatte Mannigfaltigkeit, invariant unter Hamiltonschen Phasenfluss  $H \cdot F$
- 2.  $M_f$  kompakt, zusb.  $\Rightarrow M_f \cong T^n$  quasi d.h. nicht unker. geschlossen
- 3. Der von  $H$  erzeugte Fluss bestimmt period. Beweg.  $\frac{dq}{dt} = \omega$
- 4. Die kanon. Gln. mit Hamiltonpunkt  $H$  können integriert werden, durch Quadratur

Sekt. von Arnold

$H_1, \dots, H_f$  in Involution  $dH_i$  lin. unabh. lokal integriertes System

$\Rightarrow \exists$  lokal  $f$  Funktionen  $G_1, \dots, G_f$  sodass

$x = (q, p) \rightarrow y = (G_1, \dots, G_f, H_1, \dots, H_f)$  kanonisch

d.h.  $\{G_i, G_j\} = \{H_i, H_j\} = 0 \quad \{G_j, H_i\} = -\delta_{ij}$

Lambert

Die Lie Algebra d. Hamiltonfunktionen

$F, H : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$

$(F, H)(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(g_H^t(x))$

Poisson Klammern von F und H

$(F, H)(x) = \frac{dF(x)}{dt} \cdot \frac{d}{dt} g_H^t(x) = \frac{dF}{dt} \cdot JdH(x) = dF(I dH) = \omega^2(I dF, I dH)$

Koordinatmässige Berechnung:  $\omega^2(\xi, \eta) = (I\xi, \eta) = \xi^T I \eta$

$\Rightarrow \omega^2(I dF, I dH) = (*dF, I dH) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial q_1} & \frac{\partial F}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial q_n} & \frac{\partial F}{\partial p_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_n} \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \end{pmatrix}$   
 $= \sum \left( \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right)$

Cor 1 F ist ein erstes Integral d. von H erzeugten Flusses  $\Leftrightarrow (H, F) = 0$  wenn  $(F, H) = dF(I dH)$

Bem die Grundfunktionen  $p_i, q_i$  bilden eine symplektische Basis

$(p_i, p_j) = (q_i, q_j) = (p_i, q_j) = 0 \quad (q_i, p_i) = 1$

Cor 2  $\theta : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  kanonisch  $\Leftrightarrow d\theta = d p_i \wedge d q_i$

$\Gamma$  " " A kanonisch  $\Rightarrow \omega^2 = A^* \omega^2$

$\Gamma$  " "  $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i = \sum d p_i \wedge d q_i = A^* \omega^2 \Rightarrow A$  kanonisch

Die Hamiltonfunktionen bilden eine Lie Algebra auf M

Jakobi Identität:  $(F, H) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(g_H^t(x)) = dF(I dH) = \omega^2(I dF, I dH) = L_H(F)$

$((A, B), C) = L_C L_B(A)$

$((C, A), B) = -L_B L_C(A)$

$((A, B), C) + ((C, A), B) = (L_C L_B - L_B L_C)(A)$   
 Differential J. Ranges von A

Poisson Theorem

$F_1, F_2$  zwei erste Integrale  $\Rightarrow (F_1, F_2)$  erstes Integral

$\Gamma ((F_1, F_2), H) + ((F_2, H), F_1) + ((H, F_1), F_2) = 0$

Das Vektorfeld erzeugt von  $(H, G)$  ist gleich  $[H, G]$  falls

$(A(H, G)) = (A(H), G) - (A(G), H)$

$L_{(H, G)} = L_G L_H - L_H L_G = L[H, G]$

Die Hamilton Vektorfelder bilden eine Subalgebra von der Lie Algebra v. V. Felder. Die ersten Integrale eines Hamiltonschen Flusses bilden eine Subalgebra aller Hamiltonfunktionen.

Lie Algebra von Funktionen  $\Rightarrow$

Lie Algebra von Hamiltonfeldern

f surjektiv

Homomorph.

Kern =  $\{$  auf zush. Gebiet konstante Funktionen  $\}$   
 d.h. lokal konst. Fun.

$\Gamma [H, G] = (H, G) \rightarrow$  Homom. da  $\omega$  linear

$I dH \equiv 0 \Rightarrow dH \equiv 0 \Rightarrow H = \text{const}$

→ Die Flüsse erzeugt durch  $H_1, H_2$  kommutieren  $\Leftrightarrow$   
 $(H_1, H_2) = \text{lokal konst.}$

$$\Gamma [H_1, H_2] = 0 \Leftrightarrow d(H_1, H_2) = 0 \quad (H_1, H_2) = \text{lokal konst.}$$

! → verallgem. von Noether: gibt es einen Fluss  $Q$  mit dem  
 von  $H$  erzeugten Fluss kommutieren  
 →  $\exists$  erstes Integral.

$$\begin{aligned} \left( \frac{dF}{dt} \right. &= \sum \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \sum \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= (F, H) + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \quad \left. \right)$$

andere:  $(F, H) = dF(I dH) \quad (F, H) = 0$   
 $\Leftrightarrow dF$  erstes Integral

$\omega^2$  integralinvariante Major  $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  heißen kanon. Transform.

$H$  ist ein erstes Integral d. Phasenflusses erzeugt durch  $H$   
 $dH(\eta) = 0 \quad \eta = IdH$

$\Gamma \quad dH(\eta) = \omega^2(\eta, IdH) = \omega^2(\eta, \eta) = 0 \quad \_$

Die Lie Algebra d. Vektorfelder  
 $L_A$  Diferential auf  $\{ \varphi | \varphi: M \rightarrow \mathbb{R} \}$   $L_A \varphi = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(A^t x)$   
 $A$  Vektorfeld von Fluss  $A^t$  erzeugt  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A^t x = A(x)$   
 $C = [A, B] \Leftrightarrow L_C = L_B L_A - L_A L_B$  Poisson Klammern oder Kommutator d. Vektorfelder

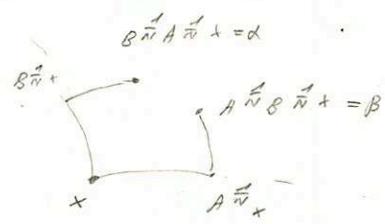
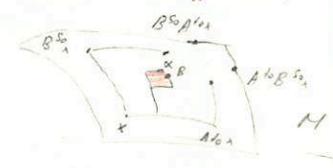
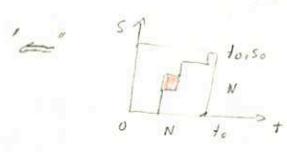
Theorem Der UR d. Vektorfelder auf  $M$  wird mit  $[ \ ]$  zu einer Lie Algebra

$\Gamma$  Jacobi Identit:  $L[A, B], C] = L[A, B] L_C - L_C L[A, B]$   
 $= L_A L_B L_C - L_B L_A L_C - L_C L_A L_B + L_C L_B L_A$

Zusammen f2  
 ausrechnen  
 o Formel. 3

Theorem  $A^t$  und  $B^s$  kommutieren  $\Leftrightarrow [A, B] = 0$

$\Gamma$  "  $\Rightarrow$  " Lemma  $\frac{d^2}{ds dt} \{ \varphi(A^t B^s x) - \varphi(B^s A^t x) \} = (L_B L_A \varphi - L_A L_B \varphi)(x)$   
 $\Gamma \frac{d}{dt} \varphi(A^t B^s x) = L_A \varphi(B^s x)$   
 $\frac{d}{ds} L_A \varphi(B^s x) = L_B L_A \varphi(x) = \frac{d^2}{ds dt} \varphi(A^t B^s x)$



Lemma  $\Rightarrow \forall \varphi \frac{d^2}{ds dt} \{ \varphi(A^t B^s x) - \varphi(B^s A^t x) \} = 0$  insbesondere für Norm  
 $\frac{d^2}{ds dt} |A^t B^s x - B^s A^t x| = 0$   
 $|A^t B^s x - x| = C \cdot \frac{t}{N^2} \Rightarrow |A^t B^s - B^s A^t| \leq N \cdot \max_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} C_{ij} \frac{1}{N^2}$

$[A, B]_j = \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i}$

$\Gamma L_B L_A \varphi = \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi = \sum_{i,j} B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi$   
 $+ \sum_{i,j} B_i A_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi$   
 $L_B L_A - L_A L_B \varphi = \sum_{i,j} B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi$

Formel von Stokes

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

$\Gamma$  Einteilung einer Zelle  $\sigma$  in  $N^k$  gleicher Parallelepiped  $\Pi_i$

$$\int_{\partial c} \omega = \sum_{i=1}^{N^k} \int_{\Pi_i} \omega = \sum_{i=1}^{N^k} d\omega + o(N^{-k+1})$$

Def geschlossene Differentialform  $\omega^k$   
 $\Rightarrow d\omega^k = 0$

Symplektische Struktur

$M^{2n}$  Mannigfalt.  $\omega^2$  nicht degenerierte geschlossene Diff'orm  
 d.h.  $d\omega^2 = 0 \quad \forall \xi \in T_x \quad \omega^2(\xi, \eta) \neq 0$   
 $(M^{2n}, \omega^2)$  symplektische Mannigfaltigkeit  
 d.h. wir haben einen asymmetrischen Tensor 2. Stufe der in jeder Spalte ein Element enthält und der z.B. auf ganz  $M$  konstant ist!

Bsp  $V$   $n$ -dim. diff' Mannigf.  $T^*V_x$  Cotangentenraum von  $V$   
 $TV_x$  Tangentialraum von  $V$   
 $T^*V_x$  hat symplektische Struktur  $\omega^2 = dp \wedge dq$   
 Legendre Transform:  $L: TV \rightarrow \mathbb{R} \rightsquigarrow H: T^*V \rightarrow \mathbb{R}$   
 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \in T^*V$

assozierte 1-Form zur sympl. Struktur  $(M^{2n}, \omega^2)$   
 $\omega_\xi^2(\eta) = \omega^2(\eta, \xi) \quad \forall \eta \in T_x M$  (Isomorphismus zwischen  $T_x M$  und Raum d. 1-Formen)  
 $I: T^*M \rightarrow T_x M$   
 $H$  Skalare Funktion auf  $M$   
 $dH$  Differentialform  $\Rightarrow I dH \in T_x M \quad I dH(x) = \dot{x}$  kanonische Gleichungen

Hamiltonsche Fluss

$H: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \quad g^t: M^{2n} \rightarrow M^{2n}$  1-Param. Scheiv von Diffeomorphismen  
 $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g^t(x) = -J dH(x) \iff g^t(x)$  Hamiltonsche Phasenfluss

Theorem Bei Hamiltonsche Phasenfluss respektiert die sympl. Struktur  
 $(g^t)^* \omega^2 = \omega^2 \quad \int_{g^t(c)} \omega^2 - \int_c \omega^2 = 0 \quad \omega^2$  Integralinvariant

$\Gamma$   $c$   $k$ -Kette  $g^t c$   $k$  Kette konst.  $k+1$  Kette  
 $0 = \int_{g^t c} d\omega^2 = \int_{g^t c} \omega^2 - \int_c \omega^2 = \int_c \int_0^t \frac{d}{ds} \omega^2(g^s(c)) ds = \int_c \int_0^t \underbrace{\frac{dH}{ds} \left( \frac{\delta g^s}{\delta s}(s), \frac{\delta g^s}{\delta t}(s) \right)}_{I dH(t(s))} dt ds = \int_c \int_0^t dH dt = 0$

# Mengen

## 1. Axiome d. axiom. Mengenlehre

$x, y, z, \dots$  Variablen für Klassen  
 $\varepsilon$  zweistellige Elementrelation

Def 1  $Mg x := (\exists y) x \varepsilon y$

Klassen die Elemente von Klassen sind heißen Mengen. In Worten heißt  $Mg x$  "x ist eine Menge"

Def 2  $x=y := (\forall z) x \varepsilon z \Leftrightarrow y \varepsilon z$   
 $(\forall z) z \varepsilon x \Leftrightarrow z \varepsilon y$

Die Gleichheit von Klassen

Axiome	
(1) $(\exists x) Mg x$	Existenzaxiom
(2) $(\forall z) z \varepsilon x \Leftrightarrow z \varepsilon y \Rightarrow x=y$	Extensionalitätsaxiom
(3) $(\forall x) (A(x) \Rightarrow Mg x) \Leftrightarrow (\exists y, \forall x) x \varepsilon y \Leftrightarrow A(x)$	Komprehensionsaxiom
(4) $Mg \emptyset$	Nullmengenaxiom
(5) $Mg x \Rightarrow Mg \{x\}$	Eindmengenaxiom
(6) $Mg x \wedge Mg y \Rightarrow Mg x \cup y$	1. Vereinigungsmengenaxiom
(7) $Mg x \Rightarrow Mg \cup y$	2. Vereinigungsmengenaxiom
(8) $(\exists x) Mg x \wedge \exists x \wedge (\forall y \varepsilon x \Rightarrow y \cup \{y\} \varepsilon x)$	Unendlichkeitsaxiom
(9) $Mg x \wedge f: x \rightarrow y \Rightarrow Mg y$	Funktionalaxiom
(10) $Mg x \Rightarrow Mg P(x)$	Potenzmengenaxiom
(11) $(\forall y)(\forall x) (Mg x \wedge x \varepsilon y) \Rightarrow \exists f: f(x) \varepsilon x$	Auswahlaxiom

Bem 1 Nach dem 8. Axiom müsste zuerst der Relationsbegriff definiert werden  $\rightarrow \exists$

Bem 2 Die Russellsche Antinomie ist nicht vermeidbar

$$A(x) := \neg x \varepsilon x$$

$$(\forall x) (\neg x \varepsilon x \Rightarrow Mg x) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} (\exists y) (\forall x) x \varepsilon y \Leftrightarrow \neg x \varepsilon x$$

$$\Rightarrow \exists y \forall x y \varepsilon x \Leftrightarrow \neg y \varepsilon y$$

$$\Rightarrow \neg (\forall x) (\neg x \varepsilon x \Rightarrow Mg x)$$

$$\Rightarrow \neg (\exists x) (x \varepsilon x \wedge Mg x)$$

d.h. es gibt eine Klasse, welche keine Menge ist.

## II. Relationen

Def 1  $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$  geordn. Paar

Prop 1  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

Def 2  $(x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$  n-Tupel

Def 3  $\prod_{i=1}^n M_i := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in M_i\}$  kartes. Produkt

Def 4  $R \subseteq \prod_{i=1}^n M_i$  n-stellige Relation

Def 5 Zweistell. Relation  $\Leftrightarrow$  Korrespondenz

### Eigenschaften von Relationen

a)  $R \subseteq M_1 \times M_2$

- (1)  $R$  links total, surjektiv  $\Leftrightarrow (\forall x_1) (\exists x_2) x_1 R x_2$
- (2)  $R$  rechts total, surjektiv  $\Leftrightarrow (\forall x_2) (\exists x_1) x_1 R x_2$
- (3)  $R$  bitotal, bijektiv  $\Leftrightarrow (1) \wedge (2)$
- (4)  $R$  links eind., inj  $\Leftrightarrow (\forall x_1, y_1) x_1 R y_1 \wedge z R y_1 \Rightarrow x_1 = z$
- (5)  $R$  rechts eind., sur inj  $\Leftrightarrow (\forall x_1, y_1) x_1 R y_1 \wedge x_1 R z \Rightarrow y_1 = z$
- (6)  $R$  eindeutig, biinj.  $\Leftrightarrow (4) \wedge (5)$

b)  $R \subseteq M \times M$

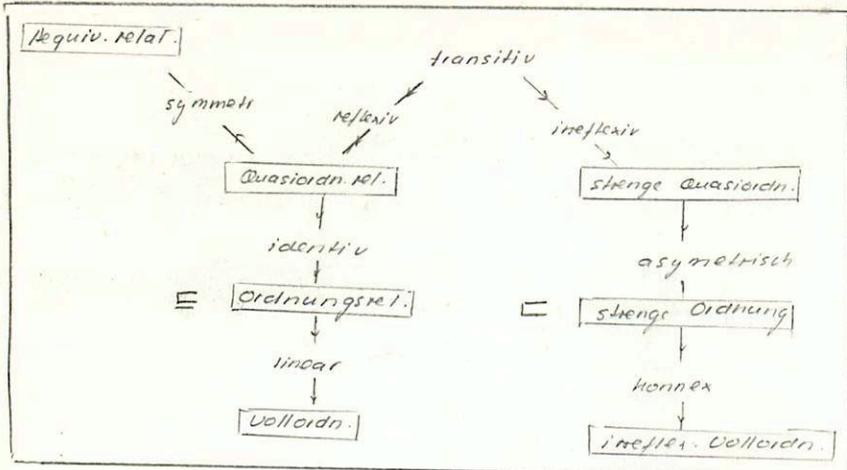
- (7)  $R$  reflexiv  $\Leftrightarrow (\forall x) x R x$
- (8)  $R$  irreflexiv  $\Leftrightarrow (\forall x) \neg x R x$
- (9)  $R$  symmetr.  $\Leftrightarrow (\forall x, y) x R y \Rightarrow y R x$
- (10)  $R$  asymmetr.  $\Leftrightarrow (\forall x, y) x R y \Rightarrow \neg y R x$
- (11)  $R$  identiv, antisymmetr.  $\Leftrightarrow (\forall x, y) x R y \vee y R x$
- (12)  $R$  linear, total  $\Leftrightarrow (\forall x, y) x R y \vee y R x$
- (13)  $R$  transitiv  $\Leftrightarrow (\forall x, y, z) x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$
- (14)  $R$  transitiv  $\Leftrightarrow (\forall x, y, z) x R z \wedge y R z \Rightarrow x R y$
- (15)  $R$  geordnet  $\Leftrightarrow (\forall x, y) (x R y) \wedge (y R x) \Rightarrow x = y$

Def 6  $f$  Abb.  $\Leftrightarrow (1), (5)$  -  $f$  korrespond.

Def 7  $f$  bijektiv  $\Leftrightarrow (3), (6)$  -  $f$  korrespond.

Def 8  $f$  umk. Abb  $\Leftrightarrow f$  bijektiv

### III. Ordnungsstrukturen



#### Bem.

Ord. rel.  $\Rightarrow$  reflex. Halbordn.  $\Rightarrow$  partiell geord.  
 strenge Ord.  $\Rightarrow$  ineff. Halbordnung  
 $\Rightarrow$  symmetri.  $\Rightarrow$  ineffektiv  
 Vollordn.  $\Rightarrow$  Ketten  $\Rightarrow$  reflex. Vollordn.  
 $\Rightarrow$  lineare Ord.  $\Rightarrow$  totale Ord.

Bem. irreflexiver und reflexiver Ast d. Baumes oben hängen so zusammen:

$$\subseteq \text{reflexive Ord.} \Leftrightarrow \subseteq / D = \{x, x\}_{x \in M} = \subseteq \text{irrefl. Ord.}$$

Def 1.  $T \subseteq M$  Auf  $T$  restr. Ordnungsstruktur: Teilordnung

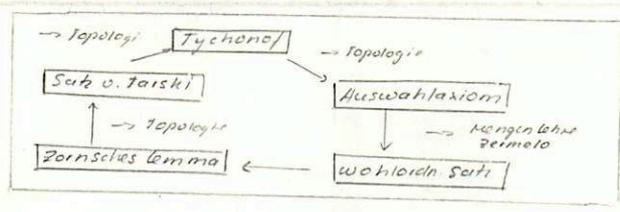
Def 2

$g$ gr. El. ( $T$ )	$\Leftrightarrow g \in T \wedge (\forall x) x \in T \Rightarrow x \in g$	grösstes Elem. od. Maximum
$m$ max. El. ( $T$ )	$\Leftrightarrow m \in T \wedge (\forall x) x \in T \wedge m \in x \Rightarrow x = m$	maxim. Elem.
$S$ ob. Sch. ( $T$ )	$\Leftrightarrow S \subseteq M \wedge T \wedge (\forall x) x \in T \Rightarrow x \in S$	obere Schranke
$O$ ob. Gr. ( $T$ )	$\Leftrightarrow S \subseteq M \wedge T \wedge O \in \{S \mid S = \text{ob. Sch.}(T)\}$	obere Grenze, Supremum

Def 3

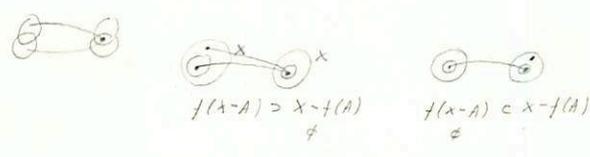
$M$  wohlgeordnet  $\Leftrightarrow (\forall T \subseteq M) T \neq \emptyset \exists \text{kleinst.}(T)$   
 $M$  induktiv geordnet  $\Leftrightarrow (\forall T \subseteq M) T$  total geord.  $\Rightarrow \exists \text{ob. Gr.}(T)$

Wohlordn. Satz: jede Menge lässt sich wohlordnen  
 Zornsches Lemma: jede induktiv geordnete Menge hat max. Element  
 Satz v. Tarski: jede Kette kann zu Ultrafilter erweitert werden  
 Satz v. Tychonoff: Produkt kompakter Räume kompakt

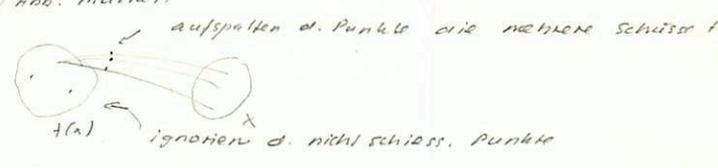


### IV. Abbildungen

$f$  Abb.  
 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$   
 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$   
 $f(X - A) \neq f(X) - f(A)$   
 aber  
 $f^{-1}$  ist Bijekt.  
 $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$   
 $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$   
 $f^{-1}(X - A) = f^{-1}(X) - f^{-1}(A)$



Denn man kann die Abb. leicht zu eine Abb. machen





$$\begin{aligned} \Rightarrow & (\exists G \in M) \times \exists G \in A \\ & \Rightarrow (\exists U \in \underline{U}(A)) U \in G \in A \\ & \Rightarrow A \in \underline{U}(A) \text{ (nach } U_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftarrow & A \in \underline{U}(A) \\ & \Rightarrow \exists V \in \underline{U}(A) \forall x \in A (\forall y \in V) U \in U(y) \text{ (nach } U_4) \\ & \Rightarrow U \in \underline{M} \text{ (nach Def von } \underline{M}) \end{aligned}$$

2. Schritt  $A_2 \Rightarrow A_1$

zeigen:  $(M, \underline{V}(x))$  erfüllt  $U_0 - U_4$  und das so erhaltene  $\underline{M}$  stimmt mit dem  $\underline{N}$  überein

$$\begin{aligned} - (U_0) & \underline{V}(x) \subseteq P(M) \text{ klar } (O_0) \\ & \underline{V}(x) \neq \emptyset \\ & \text{denn } M \in \underline{N} \text{ (} O_1) \end{aligned}$$

$$\bigcup_{G \in x} G \in \{V(x)\} \text{ (} O_2) \quad *$$

$$\begin{aligned} - (U_1) & (\forall U \in \underline{V}(x)) x \in U \\ & U \in \underline{V}(x) \Rightarrow \exists G \in \underline{N} \times \exists G \in U \\ & \Rightarrow x \in U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - (U_2) & (\forall V \in \underline{M}) (\exists U \in \underline{V}(x)) U \in V \Rightarrow V \in \underline{V}(x) \\ & U \in \underline{V}(x) \Rightarrow (\exists G \in \underline{N}) \times \exists G \in U \\ & V \supseteq U \Rightarrow \exists G \in V \times \exists G \in U \Rightarrow V \in \underline{V}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - (U_3) & (\forall U_1, U_2 \in \underline{V}(x)) U_1 \cap U_2 \in \underline{V}(x) \\ & \exists G_1 \in \underline{N} \quad \times \exists G_1 \in U_1 \\ & \exists G_2 \in \underline{N} \quad \times \exists G_2 \in U_2 \\ & G_1 \cap G_2 \in \underline{N} \text{ (nach } O_2) \\ & \times \exists G_1 \cap G_2 \in U_1 \cap U_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - (U_4) & (\forall U \in \underline{V}(x)) (\exists V \in \underline{V}(x)) V \supseteq U \text{ (} \forall V \in U) U \in \underline{V}(x) \\ & U \in \underline{V}(x) \Rightarrow (\exists G \in \underline{N}) G \supseteq U \times \exists G \in U \\ & (\forall y \in G) G \in \underline{M} \quad y \in G \in G \Rightarrow G \in \underline{V}(x) \text{ also } G \text{ ist univ. } V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \underline{M} & = \underline{N} \\ A \in \underline{N} & \Leftrightarrow A \in \underline{M} \text{ (} \forall x \in A) (\exists U \in \underline{V}(x)) U \in A \\ \Rightarrow & A \in \underline{N} \quad \times \exists A \Rightarrow A \in \underline{V}(x) \text{ wegen } (x) \text{ d.h. } \underline{N} \subseteq \underline{M} \\ A = \emptyset & \Rightarrow A \in \underline{V}(x) \text{ trivial} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftarrow & A = \emptyset \Rightarrow A \in \underline{N} \\ A = M & \Rightarrow A \in \underline{N} \\ A_1, A_2 \in \underline{M} & \quad A_1 \cap A_2 \in \underline{M} \\ A_1 \in \underline{M} & \Rightarrow U A_1 \in \underline{M} \text{ d.h. } \underline{M} \subseteq \underline{N} \end{aligned}$$

3. Schritt  $A_2 \Rightarrow A_3$

zeigen:  $\underline{L}$  erfüllt Axiome  $k_0 \dots k_4$  und  $\underline{L}$  stimmt mit  $\underline{N}$  überein

$k_0 - k_4$  trivial

$$\underline{L} = \underline{N} \quad \underline{N} \subseteq \underline{L} \text{ trivial} \\ \underline{N} \supseteq \underline{L}$$

$$\begin{aligned} - \emptyset \in \underline{L} & \text{ M} \in \underline{L} \\ - A_1, A_2 \in \underline{L} & \varphi(A_1) \cap \varphi(A_2) = \varphi(A_1 \cap A_2) = A_1 \cap A_2 \Rightarrow \in \underline{L} \\ - \{A_i\}_{i \in I} \in \underline{L} & \varphi(\bigcup_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} \varphi(A_i) \\ & \varphi(U(A_i)) \subseteq \varphi(U(A_i)) \\ & \varphi(U(A_i)) \subseteq \varphi(U(A_i)) \text{ nach } k_3 \\ & \Rightarrow U(A_i) \subseteq \varphi(U(A_i)) \end{aligned}$$



4. Schritt  $A_3 \Rightarrow A_2$

zeigen:  $\underline{L}$  erfüllt Axiome  $O_0 \dots O_3$  die Abb.  $\varphi$  und  $\sigma$  sind dieselben

$$\text{d.h. } \forall A \in P(M) \quad \varphi(A) = A^0$$

- $O_0$   $\underline{L} \subseteq \underline{P}(M)$  klar da  $\forall A \in \underline{L} \quad A \in \underline{P}(M)$
- $O_1$   $\emptyset \in \underline{L}$  da  $\emptyset(\emptyset) \subseteq \emptyset \Rightarrow \emptyset(\emptyset) = \emptyset \quad (K_2)$
- $O_2$   $G_1, G_2 \in \underline{L} \Rightarrow G_1 \cup G_2 \in \underline{L} \quad (K_4)$
- $O_3$   $\underline{S} \subseteq \underline{N} \quad \bigcup_{G \in \underline{S}} G \in \underline{L}$

$$\varphi\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} \varphi(G_i) \quad (K_2)$$

$$\varphi\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) \subseteq \varphi\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right)$$

$$\varphi^2\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) \subseteq \varphi\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right)$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \quad \text{da } \varphi \text{ eine Abbildung ist}$$

$$\forall A \in \underline{P}(M) \quad A^0 = \varphi(A)$$

$$A^0 = \bigcup_{\substack{B \in \underline{L} \\ B \subseteq A}} B$$

$$\varphi(A) \supseteq A^0 \quad \varphi(A) \subseteq A^0$$

$$A^0 \subseteq A \quad \varphi(A) \subseteq A$$

$$\varphi(A^0) \subseteq \varphi(A) \quad \varphi(A)^0 \subseteq A^0$$

$$A^0 \subseteq \varphi(A)$$

$$\bigcup_{\substack{B \in \varphi(A) \\ B \in \underline{L}}} B = \varphi(A) \Rightarrow \varphi(A)^0 = \varphi(A)$$

↑ weil  $\varphi(A) \in \underline{L}$

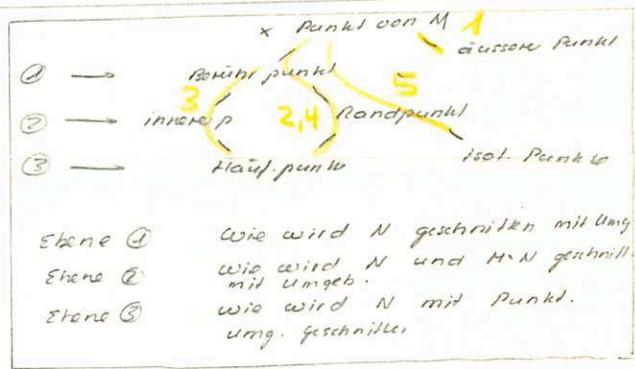
## II wichtige Begriffe f. d. Anjüng

### 1. Charakterisierung von Punkten

$$N \subseteq M$$

$x \in M$	Ber. Punkt v. $N \Leftrightarrow \forall U \subseteq U(x)$	$U \cap N \neq \emptyset$
$x \in M$	äuss. Punkt v. $N \Leftrightarrow \exists U \subseteq U(x)$	$U \cap N = \emptyset$
$x \in M$	inner. Punkt v. $N \Leftrightarrow \exists U \subseteq U(x)$	$U \subseteq N$
$x \in M$	Rand Punkt von $N \Leftrightarrow \forall U \subseteq U(x)$	$U \cap N \neq \emptyset$ $U \cap (M \setminus N) \neq \emptyset$
$x \in M$	isol. Punkt von $N \Leftrightarrow \exists U \subseteq U(x)$	$U \cap N = \{x\}$ $x \in N$
$x \in M$	Häuf. Punkt v. $N \Leftrightarrow \forall U \subseteq U(x)$	$U \cap N \neq \{x\}$

- $\bar{A}$  Menge d. Berühr. Punkte
- $A^0$  Menge d. inneren Punkte
- $\partial A$  Menge d. Randpunkte



- Ebene ① Wie wird  $N$  geschrieben mit Umg.
- Ebene ② Wie wird  $N$  und  $M \setminus N$  getrennt mit Umg.
- Ebene ③ Wie wird  $N$  mit Punkt. umg. geschnitten.

$$A^0 = \bigcup_{G \in \underline{I}} G \subseteq A$$

$$\bar{A} = \bigcap_{F \in \underline{F}} F \supseteq A$$



### 2. Charakterisierung von Mengen

$$N \subseteq M$$

$N$ offen	$\Leftrightarrow (\forall x \in N) \quad x$ innerer Punkt
$N$ abgeschl.	$\Leftrightarrow M \setminus N$ offen
$N$ dicht in $M$	$\Leftrightarrow (\forall x \in M) \quad x$ Berührpunkt von $N$ d.h. $\bar{N} = M$

3. Eigenschaften von  $\circ$  -

$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$  aber  $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$   
 $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$  aber  $\overline{A \cap B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

Bsp  $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$   
 $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}, A^\circ \cup B^\circ = B^\circ = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Bsp  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}, B = \{(0,1)\}$   
 $\overline{A \cap B} = \emptyset, \overline{A} \cap \overline{B} = \{(0,1)\}$

$(\cup A_i)^\circ \supseteq \cup A_i^\circ, \overline{\cup A_i} \supseteq \cup \overline{A_i}$   
 $(\cap A_i)^\circ \subseteq \cap A_i^\circ, \overline{\cap A_i} \supseteq \cap \overline{A_i}$

Bsp  $A_n = ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$   
 $\cap A_i^\circ = \{0\}, (\cap A_i)^\circ = \emptyset$

$(A^\circ)' = \overline{A'}, (\overline{A})' = \overline{A'}, A'^\circ \subseteq A^{\circ'}$   
 $\overline{A'} \subseteq \overline{A'}$

$(\overline{A})' = \overline{A'} - \partial A = (A')^\circ$   
 $(A^\circ)' = \partial A + A'^\circ = \overline{A'}$

$\overline{A^\circ} \neq \overline{A}^\circ$  i.o. denn  $A$  offen  $\Rightarrow \overline{A^\circ} = A$   
 $A^\circ \supseteq A$   
 $A$  abgesch  $\overline{A^\circ} \subseteq A$   
 $A^\circ = A$

$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}, A^\circ \times B^\circ = (A \times B)^\circ$

Dualitätsprinzip

Ersetzt man in einer topolog... Formel

$\cap$	$\leftrightarrow$	$\cup$
$-$	$\leftrightarrow$	$\circ$
$'$	$\leftrightarrow$	$'$
$\supseteq$	$\leftrightarrow$	$\subseteq$

abgeschl  $\leftrightarrow$  offen

so bekommt man wieder eine Formel deren Wahrh.gehalt Äquiv. ist!

Bsp.  $A \cup B \supseteq A, A \cap B \subseteq A$   
 $\overline{A} \supseteq A, A^\circ \subseteq A$   
 $A' \cup A = M, A' \cap A = \emptyset$   
 $(\cup A_i)^\circ \supseteq \cup A_i^\circ, \overline{\cap A_i} \supseteq \cap \overline{A_i}$   
 $A \subseteq B \Rightarrow A' \supseteq B'$

Bew Für Mengentheor. Aussagen  
 (Symbole  $\cap, \cup, '$ ) ist die Dualität klar (DeMorgan Regeln).  
 die andern Operationen können darauf zurückgef. werden

abgeschl., offen  $\rightarrow$  Axiome

$A \supseteq B \Leftrightarrow \exists C, A = B \cup C$   
 $A \subseteq B \Leftrightarrow \exists C, A = B \cap C$

$\overline{A} = \cap B, A^\circ = \cup B$   
 abgeschl. abgeschl.

### III Definitionen

#### 1. Kompaktheit

##### Mengensysteme

$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  (offene) Überdeckung von  $X \Leftrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supseteq X$  ( $A_\lambda$  offen)

$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  lokalendl. Überdeckung  $\Leftrightarrow (\forall x \in X) (\exists U \in \mathcal{U}(x)) A_\lambda \cap U \neq \emptyset$  / höchst. endl. viele  $A$

##### Kompaktheitskriterien

$X$  kompakt  $\Leftrightarrow$  jede offene Überd. enth. endl. Teilüberdeckung

$X$  Lindelöf  $\Leftrightarrow$  jede offene Überd. enth. abz. Teilüberdeckung

$X$  abz. komp  $\Leftrightarrow$  jede offene abz. Überd. enth. endl. Teilüberd.

$X$  rel. kompakt  $\Leftrightarrow \bar{X}$  kompakt

$X$  folgenkomp  $\Leftrightarrow \forall$  Folgen  $\exists$  konv. Teilfolge

$X$  rel. folgenkomp  $\Leftrightarrow \forall$  Folgen in  $X \exists$  in  $\bar{X}$  konv. Teilfolge

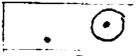
$X$  para komp  $\Leftrightarrow$  jede offene Überd. enth. lokalendl. (keine offene) Teilüberd.

$X$  lokal komp  $\Leftrightarrow (\forall x \in X) (\exists U \in \mathcal{U}(x)) U$  kompakt

$X$   $\epsilon$ -komp  $\Leftrightarrow X$  metr. Raum  $\wedge \exists$  endl. offene Teilüberd. mit  $d(A_i) \leq \epsilon$

manchmal: kompakt = quasi-komp  
komp +  $T_2$  = kompakt

#### 2. Trennungsaxiome

$T$	topol. Axiome		
$T_0$	$x \neq y \Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{U}(x)) (y \notin U) \vee (\exists V \in \mathcal{U}(y)) (x \notin V)$		 $T_0$
$T_1$	$x \neq y \Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{U}(x)) (y \notin U) \wedge (\exists V \in \mathcal{U}(y)) (x \notin V)$		 $T_1$
$T_2$	$x \neq y \Leftrightarrow (\exists U \in \mathcal{U}(x)) (\exists V \in \mathcal{U}(y)) U \cap V = \emptyset$ (Hausdorff)		 $T_2$
$T_3$	$x \neq F$ abgeschlossen $(\exists U \in \mathcal{U}(x)) (\exists V \in \mathcal{U}(F)) U \cap V = \emptyset$ $\wedge T_2$ (regulär)		 $T_3$
$T_4$	$F_1, F_2$ disj. abgeschl. $(\exists U_1, V_1) U_1 \supseteq F_1, U_2 \supseteq F_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ $\wedge T_2$ (normal)		 $T_4$

#### 3. Zusammenhang

$X$  zush  $\Leftrightarrow (\nexists G_1, G_2 \text{ offen}) G_1 \cap G_2 = \emptyset, G_1 \cup G_2 = X$

$X$  bogenw. zush  $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X) \exists f: [0,1] \rightarrow X$  stetig  $f(0) = x_1, f(1) = x_2$

$X$  lokal zush.  $\Leftrightarrow (\forall x \in X) (\exists U \in \mathcal{U}(x)) U$  lokal zush.

$A, B$  separiert  $\Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset \wedge \bar{A} \cap B = \emptyset$

#### 4. Basis

$\mathcal{B}$  Basis  $\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (B_1) \emptyset \notin \mathcal{B} \\ (B_2) x = \bigcup_{E \in \mathcal{B}} E \end{array} \right\} \text{Subbasis}$

$(B_3) E_1, E_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow E_1 \cap E_2 = \bigcup_{E \in \mathcal{B}} E$

$\mathcal{S}$  Subbasis  $\Leftrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{S}) = \{ \bigcap_{i=1}^n S_i \mid S_i \in \mathcal{S} \wedge n \in \mathbb{N} \}$  ist Basis  $(B_1, B_2)$  Axiome

$\mathcal{B}(x)$  Umgebungsbasis v.  $x \Leftrightarrow B(x) \in \mathcal{U}(x) \wedge (\forall U \in \mathcal{U}(x)) (\exists V \in \mathcal{B}(x)) V \subseteq U$   
lokale Basis

$X$  mit 1. Abzählbarkeitsbed.  $\Leftrightarrow (\forall x \in X) \exists$  abzählb. lokale Basis

## 5. Konstr. von Topologien aus Basen

Topologie aus Basis:

$$V(B) = \left\{ \bigcup_{E \in B} E \right\} \quad \text{aus } B \text{ erzeugte Topologie}$$

Topologie aus Subbasis

$$V(D(S)) \quad \text{aus } S \text{ erzeugte Topologie} \quad D(S) = \left\{ \bigcap_{i=1}^n S_{n_i} : S_{n_i} \in S \right\}$$

## 6. Stetigkeit

$$f: (X, \underline{M}) \rightarrow (Y, \underline{N})$$

$$f \text{ stetig} \iff \forall N \in \underline{N} \quad f^{-1}(N) \in \underline{M}$$

$$f \text{ offen} \iff \forall M \in \underline{M} \quad f(M) \in \underline{N}$$

$$f \text{ lokalstetig} \iff \forall V \in \underline{V} \exists A \ni x \quad f|_A \text{ stetig}$$

$$f \text{ glm. stetig} \iff x, y \text{ met. Räume } (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) \forall x \in U_\delta(x) \implies f(x) \in U_\epsilon(y) \quad \forall x \in X$$

## 7. Konstr. von Topol. mit Abbildungen

$$(M, \underline{M}) \text{ topol. Raum} \quad f: M \rightarrow N \text{ surj.}$$

$$\underline{N}_{fin} = \{ T \subseteq P(N) \mid f^{-1}(T) \in \underline{M} \}$$

finale Topol., welche  $f$  stetig macht

$$(N, \underline{N}) \text{ topol. Raum} \quad f: M \rightarrow N$$

$$\underline{M}_{init} = \{ f^{-1}(T) \mid T \in \underline{N} \}$$

initiale Topol., welche  $f$  stetig macht

a) Relativtopologie  $U \subseteq M \quad i: U \rightarrow M$  Einbettung

$$\mathcal{O}_U M$$

$$\underline{U}_{init}(i) \text{ Relativtopol auf } U$$

b) Summen topologie

$$(M, \underline{M}), (N, \underline{N}) \text{ topol. Räume} \quad M \cap N = \emptyset$$

$$\begin{matrix} \bigcirc & \bigcirc \\ M & N \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} i_M: M \rightarrow M \cup N \\ i_N: N \rightarrow M \cup N \end{matrix} \text{ Einbettungen}$$

$$\underline{U}_{fin}(i_M, i_N) \text{ Summentopologie auf } M \cup N$$

c) Quotiententopologie  $(M, \underline{M})$  topol. Raum

$M/\sim$  Quotientenmenge mit kan. Abb.  $\varphi$

$$\varphi: M \rightarrow M/\sim$$

$\underline{N}_{fin}(\varphi)$  Quotiententopologie auf  $M/\sim$

d) Produkt topologie

$$(X_\alpha, \underline{T}_\alpha) \text{ topol. Räume}$$

$$p_\alpha: \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\alpha \text{ Projektion}$$

$$\underline{T}_{init}(p_\alpha) \text{ Prod. Topol. auf } \prod X_\alpha$$

$$(\text{Basis } \prod_{\alpha \in I} Q_\alpha \quad Q_\alpha \in \underline{T}_\alpha \quad Q_\alpha = X_\alpha \quad \text{f. alle } \alpha)$$

$$(\text{Basis } \prod_{\alpha \in I} Q_\alpha \quad Q_\alpha \in \underline{T}_\alpha)$$

8. Folgen, Filter, Netze

Folge:  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} M \rightarrow X$  heisst Folge

$$\{x_n\} \rightarrow y \iff (\forall U \in \mathcal{U}(y)) (\exists n_0) (\forall n > n_0) x_n \in U$$

Filter:  $\mathcal{F}$  heisst Filter  $\iff$

- (1)  $F \in \mathcal{F} \implies \emptyset \notin \mathcal{F}$
- (2)  $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$
- (3)  $A \in \mathcal{F} \implies B \supseteq A \implies B \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}_0$  heisst Filterbasis  $\iff$

- (1)  $\emptyset \notin \mathcal{F}_0$
- (2)  $A, B \in \mathcal{F}_0 \implies \exists C \in \mathcal{F}_0 \ C \subseteq A \cap B$

$\mathcal{F} = \{ B \in \mathcal{P}(X) \mid B \supseteq A \text{ f\u00fcr } A \in \mathcal{F}_0 \}$  von  $\mathcal{F}_0$  erzeugte Filter

$$\mathcal{F} \rightarrow y \iff \mathcal{F} \ni U(y) \quad \mathcal{F}_0 \rightarrow y \iff \mathcal{F}_0 \ni U \ni y$$

Netz  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} D \rightarrow X$  heisst Netz  $D$  gericht. Menge

$$\{x_\alpha\} \rightarrow y \iff (\forall U \in \mathcal{U}(y)) (\exists \alpha_0) (\forall \alpha > \alpha_0) x_\alpha \in U$$

Zusammenhang Filter - Netz

<p><u>Netz <math>\rightarrow</math> Filter</u></p> <p><math>\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}</math> Netz</p> <p>assoz. Filter: <math>\{A \in \mathcal{P}(X) \mid x_\alpha \text{ schliessl. in } A\}</math></p>	<p><u>Filterbasis <math>\rightarrow</math> Netz</u></p> <p><math>\mathcal{F}_0</math> Filterbasis <math>x_\alpha = a</math></p> <p>kan assoz Netz: <math>D = \{(a, A) \mid a \in A \in \mathcal{F}_0\}</math></p> <p><math>(a, A) \geq (b, B) \iff A \subseteq B</math></p>
<p><math>\{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \rightarrow x \iff \mathcal{F}_{\text{assoz}} \rightarrow x</math></p> <p><math>\Gamma \iff</math> f\u00fcr <math>U \in \mathcal{U}(x)</math> gilt <math>x_\alpha</math> schliessl. in <math>U</math></p> <p><math>\implies U \in \mathcal{F}_{\text{assoz}}</math></p> <p><math>\Leftarrow</math> (<math>\forall F \in \mathcal{F}_{\text{assoz}}</math>) <math>x_\alpha</math> schl. in <math>F</math></p> <p>insbes. <math>x_\alpha</math> schliessl. in <math>U \in \mathcal{U}(x)</math> <math>\lrcorner</math></p>	<p><math>\mathcal{F}_0 \rightarrow x \iff \{x_\alpha\}_{\alpha \in D} \text{ assoz.} \rightarrow x</math></p> <p><math>\Gamma</math> zeigen <math>\mathcal{F}_0 \stackrel{?}{=} \mathcal{F}_{\text{assoz}}</math></p> <p><math>\uparrow</math> assoz <math>\mathcal{F}_0 \rightarrow \{x_\alpha\}</math> asso kan</p> <p>a) <math>A \in \mathcal{F}_0 \implies \{x_\alpha\}</math> schliessl. in <math>A</math></p> <p><math>d_0 = (b, B) \implies A \supseteq B \in \mathcal{F}_0</math></p> <p><math>\implies A \in \mathcal{F}_0</math></p> <p>b) <math>A \in \mathcal{F}_{\text{assoz}} \implies (\exists B \in \mathcal{F}_0) A \supseteq B</math></p> <p><math>\implies x_\alpha</math> schliessl. in <math>A</math></p> <p><math>\implies A \in \mathcal{F}_0</math> <math>\lrcorner</math></p>

9. Metrische, Semimetrische, Vollst\u00e4ndige R\u00e4ume

$(X, d)$  met. Raum bzw. semimet. Raum

- |  |   |               |   |            |
|--|---|---------------|---|------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>a) <math>d(x, y) = d(y, x)</math></li> <li>b) <math>d(x, x) = 0</math></li> <li>c) <math>d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)</math></li> <li>d) <math>d(x, y) = 0 \iff x = y</math></li> </ol> | } | semimet. Raum | } | metr. Raum |
|--|---|---------------|---|------------|

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy Folge  $\iff (\forall \epsilon > 0) (\exists n_0) (\forall m, n > n_0) d(x_m, x_n) < \epsilon$

$\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$  Cauchy Netz  $\iff (\forall \epsilon > 0) (\exists \alpha_0) (\forall \alpha, \beta > \alpha_0) d(x_\alpha, x_\beta) < \epsilon$

$\mathcal{F}_0$  Cauchy Filterbasis  $\iff (\forall \epsilon > 0) (\exists A \in \mathcal{F}_0) \sup_{(x, y) \in A} d(x, y) < \epsilon$

$(X, d)$  semimet. Raum

$X$  vollst\u00e4ndig  $\iff \forall$  Cauchy Filterbasen konv.

10. weitere Definitionen

$X$  topol. Raum

$K_X$  zush. komp. von  $X \iff K_X = \bigcup S$   
 $S \subseteq \mathcal{K}(X)$   
 $S$  zush.

$X$  total unzus.  $\iff (\forall A \subseteq X) K_A = \{x\}$

$X$  endl. Durchschnitts eigenschaft  $\iff \forall \{F_i\}_{i \in I}$  abgeschl. ist  $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset \implies \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$

Projektionen:  $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_B : p_B \quad p_B(z) = z_B$   
Injektionen:  $X_B \rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha : i_B^{(z)} \quad i_B^{(z)}(t) = (z_t, \dots, z_t, \dots)$

$Y \subseteq X$  Retrakt von  $X$   $\iff \exists r$  stetig auf  $r: X \rightarrow Y \quad r(y) = y \quad \forall y \in Y$   
 mit Retraktion  $r$

$Y \subseteq X$  kontinuum  $\iff Y$  kompakt, zush.

$Y \subseteq \mathbb{R}$  Intervall  $\iff Y$  zush  $\iff (\forall a, b \in A) a < c < b \implies c \in A$

$A \subseteq X$  semim. Raum  $d(A) = \sup_{x \in Y \subseteq A} d(x, Y)$  Durchmesser v. A  
 $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$  Abstand von A

# Übersicht über die wichtigsten Sätze

## Zusammenhang

in  $\mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}$  zush  $\Leftrightarrow A$  Intervall

$f: X \rightarrow Y$  stetig auf

$X \begin{cases} \text{zush} \\ \text{wegzush} \\ \text{zush} \end{cases} \rightarrow Y \begin{cases} \text{zush} \\ \text{wegzush} \\ \text{zush} \end{cases}$

$X$  lokal zush  $\Leftrightarrow Y$  lokal zush

in  $\mathbb{R}$   
zush  $\Leftrightarrow$  Intervall

in  $\mathbb{R}^n$   $\Delta$  offen  
zush  $\Leftrightarrow$  wegzush

$f: X \rightarrow Y$  stetig, abgekl. auf

$X$  lokal zush  $\rightarrow Y$  lokal zush

$\text{zush} \Leftrightarrow \text{wegzush}$

$\text{lokal zush} \Leftrightarrow \text{lokal wegzush}$

$\Gamma \cup S \subseteq X \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} U_i$  bay. zush?  
 $U$  offn  $\Leftrightarrow U_i$  offn  
 $\Rightarrow U = S \downarrow$

Leibniz' meng. zush. Weisheit mit Summenlog. zush

Produkt meng. zush Hengst zush lokal zush  
Unteräume  $\mathbb{R}^n$  nicht zush ( $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ )

$X$  zush.  $\Leftrightarrow X$  nicht als Vereinig. separierter Mengen darstellbar

$\Gamma \Rightarrow$  induktiv  $X = A \cup B \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset$   
 $\bar{X} = \bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{weil } \bar{A} \text{ offn } \bar{B} \text{ offn}$   
 $\Rightarrow A = \bar{A}^c \quad B = \bar{B}^c \quad A \cap B = \emptyset$   
 $\Leftrightarrow$  induktiv  $X = A \cup B \quad A \cap B = \emptyset \quad \bar{A} = \bar{B} \cup B$

$A$  zush.  $\rightarrow \bar{A}$  zush

## Stetigkeit

$f$  stetig global  $\Leftrightarrow (\forall \text{ Filter } F \text{ in } F \rightarrow x \Rightarrow f(F) \rightarrow f(x))$

$f^{-1}(\text{offen})$  offen

$f^{-1}(\text{Basiselem})$  offen

$f^{-1}(\text{abgesch})$  abgesch

$f^{-1}(\text{Subbasiselem})$  offen

$f(\bar{T}) \subseteq \overline{f(T)}$   
 $f^{-1}(\bar{T}) \subseteq \overline{f^{-1}(T)}$   
 $f^{-1}(T^0) \subseteq f^{-1}(T)^0$

$f$  lokalstetig in  $b \in X$

$f$  lokalstetig in  $x$

$f^{-1}(\text{Umg. v. } f(a))$  Umg. v.  $f(a)$

Jede Umg. v.  $f(a) \vee \exists$  Umg. v.  $x \quad U, f(U) \subseteq V$

$f^{-1}(\text{Umg. basiselem.})$  Umg. v.  $f(a)$

$\forall$  Filter  $F$  in  $F \rightarrow x \Rightarrow f(F) \rightarrow f(x)$

$f: X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  stetig  $\Leftrightarrow$  Proj. stetig

## IV. Übersicht über Differenzierungen topol. Räume

$(X, \underline{I})$  topol. Raum

### 1. Die Trägermenge $X$

- Kardinalität
- algebraische Strukturen
- Ordnungsstrukturen

### 2. Das Mengensystem $\underline{I}$

#### 2.1 lokale Eigenschaften (d.h. in Umgeb. eines Punktes)

- Trennbarkeit
- Überdeckbarkeit
- Zusammenhang d.h. Trennbarkeit
- andere Mengensysteme (Filter, ...)
- Kardinalität von  $\underline{I}$  lokal

#### 2.2 globale Eigenschaften

- Überdeckbarkeit
- Zusammenhang - Komponenten
- andere Mengensysteme (Basen, Filter, ...)
- Kardinalität von  $\underline{I}$

### 3. Erzeugbarkeit des Raumes durch andere Räume

- Einbettung andere Räume
- Faktorisierung

### 4. Vom Raum ableitbare Erweiterungsräume

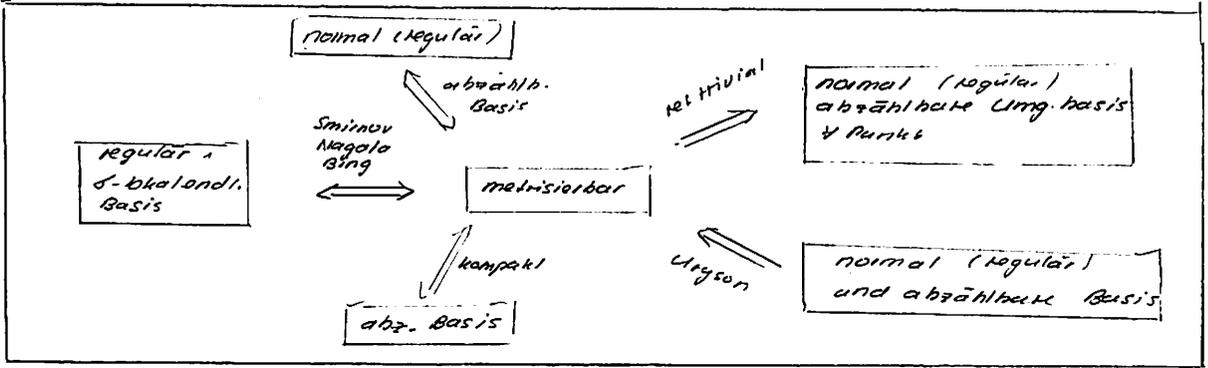
- Einbettung in andere Räume
- Produktbildung

### 5. Wechselwirkung mit anderen Strukturen (Homotopiegruppen etc.)

### 6. Invarianten

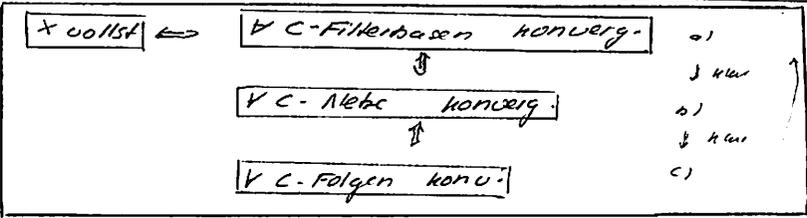
- Invarianten unter Homöomorphismen
- Invarianten unter stetigen Abbildungen

Metrisierbarkeit



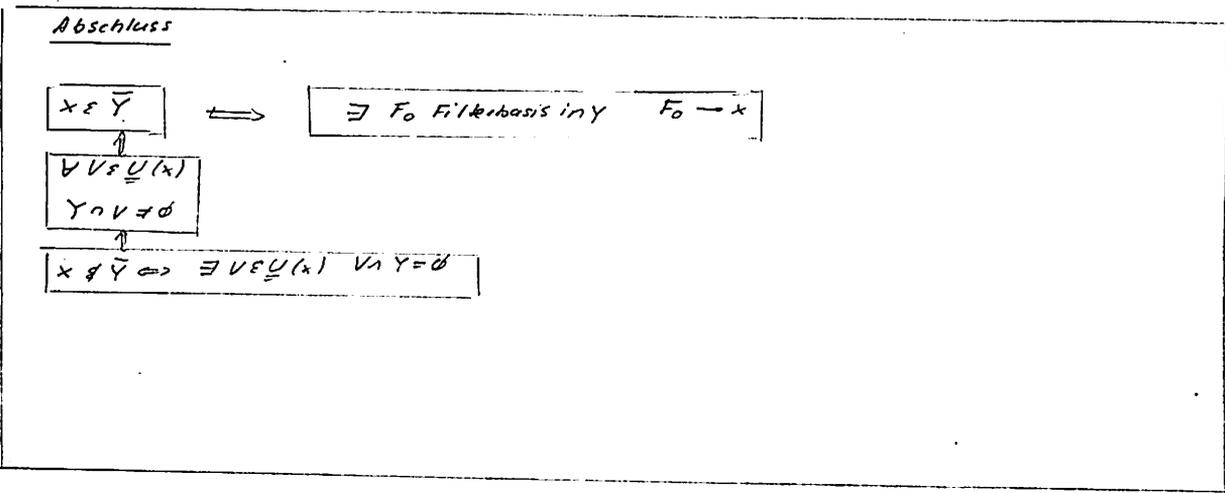
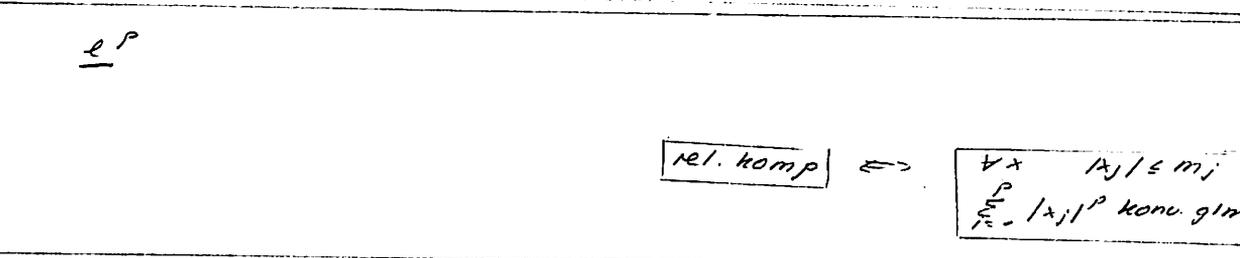
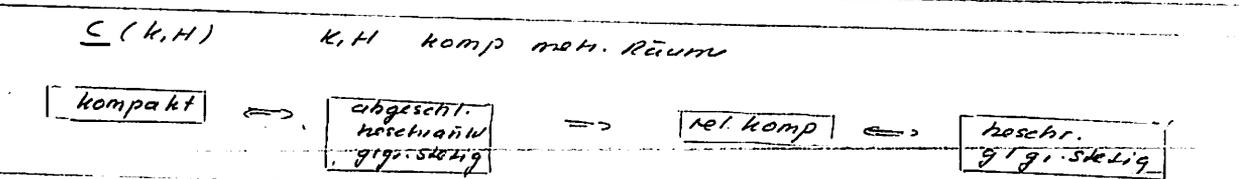
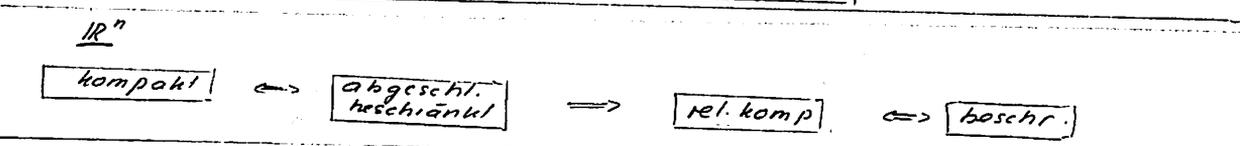
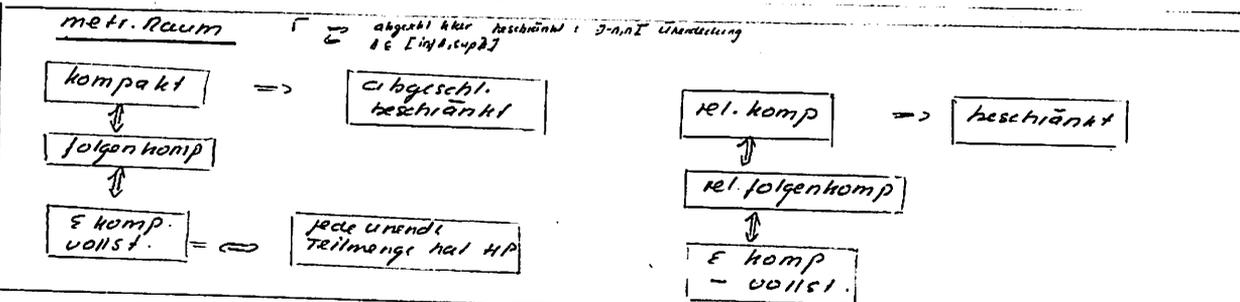
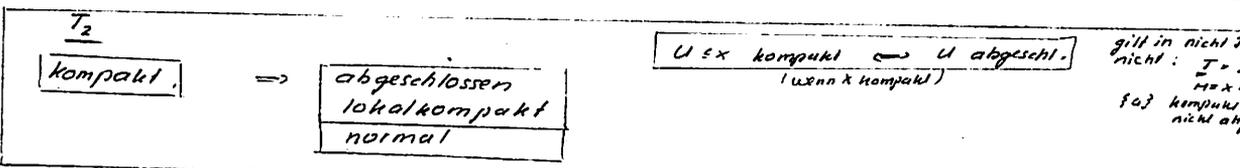
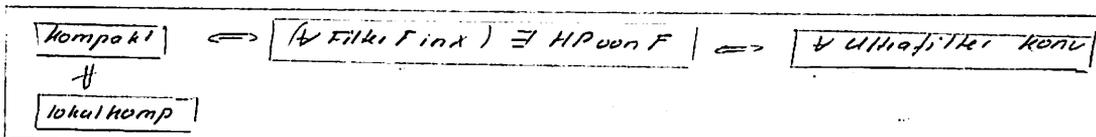
Vollständigkeit

$X$  semimetr. Raum  
 $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$  Cauchy Netz  $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists k) (\forall m, n > k) d(x_m, x_n) < \varepsilon$   
 $F_0$  Cauchy Filterbasis  $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists A \in F_0) \sup_{a, b \in A} d(a, b) < \varepsilon$



$\Gamma \forall$  Folgenkonv.  
 $F_0 \subset$  Filterbasis  
 wählen  $A_n \in F_0$   $\emptyset \neq A_n \subset \mathbb{N}$   
 wähle  $x_n \in A_n$   $\{x_n\}$  C-Folge:  
 $\varepsilon > 0$   $\eta > \frac{\varepsilon}{2}$   
 $(\forall m, n > k) d(x_m, x_n) < \varepsilon d(x_m, x_n) + d(x_m, x_n) = \varepsilon$   
 $\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$   
 zeigen  $F \rightarrow x$  d.h.  $N_\varepsilon \in F$   
 $U \in N_\varepsilon$   $B(x, \varepsilon) \in U$   
 wähle  $n > \frac{2}{\varepsilon}$   $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$   
 $(\forall y \in A_n) d(x_n) < d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$   
 $\rightarrow y \in B(x, \varepsilon) \in U \rightarrow U \cap F \neq \emptyset$   
 $A_n \in F_0 \rightarrow U \in F$

Kompaktheit



VI

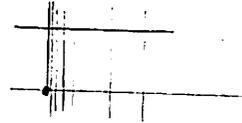
Bsp. von topol. Räumen

- ① Diskrete Topologie  $\underline{T} = \underline{P}(X)$
- ② Indiskrete Topologie  $\underline{T} = \{\emptyset, X\}$
- ③ kvendliche Topologie  $\underline{T} = \{G \mid G \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$
- ④ metrische Räume  $\underline{T} = \mathcal{U}(\mathcal{U}(x))$
- ⑤ Streifen Topologie  $(\mathbb{R}, \underline{R}) \times \{\emptyset, \mathbb{R}\}$  seminucht. Raum

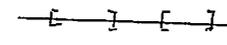
⑥ Poincaré sche Fundamentalpolygone  
Quotienten topol.

		Zylindermantel
		Möbius band
		Torus = $S^1 \times S^1$
		Klein'sche Flasche
		proj. Ebene

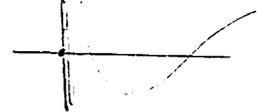
⑦ nicht lokal zust. Raum  $X = \{0,0\} \cup \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,y) \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$



⑧ nur lokal zust. Raum



⑨ nichtbogenweise zust. Raum



$S = \{(x,y) \mid y = \sin \frac{\pi}{x}\}$   
 $\bar{S}$  nicht bogenw. zust.

⑩ endl. topol. Räume (Verbände)

⑪ abzählb. zust. Raum Basis  $\mathcal{B}(a,b) = \{0, a+b, a+2b, \dots\} \mid (a,b) = 1\} \cup \emptyset$

⑫ Cantorsches Diskontinuum  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}, x_k = 0, 2\}$

⑬ kein  $T_0$  Raum  
kein  $T_1$  Raum  
kein  $T_2$  Raum  
kein  $T_3$  Raum  
kein  $T_4$  Raum

indiskr. Topol.  $X = \{0, 1\}$   
 $\underline{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\} \mid a \in \mathbb{R}\}$   
 $\underline{E} = \{0 \mid 0 = \mathbb{R} \setminus E \text{ endl}\} \cup \{\emptyset\}$   
 aus Subbasis  $\underline{S} = \{\emptyset, a, b \mid 0, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$   
 $H$  mit Basis  $\underline{O}, \underline{O}$

Metrisationssatz von Uryson

$X$   $T_4$  Raum abzählb. Basis  $\Rightarrow X$  metrisierbar

Beweisidee  $X$  homöomorph  $[0,1]^{\mathbb{N}}$  homöomorph  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Bew

$B$  abz. Basis von  $X$

$E := \{ (U, V) \mid U, V \in B, \bar{U} \subseteq V \} = \{ (U_k, V_k) \mid k \in \mathbb{N} \}$  da abzählb

$(\forall k) f_k : f_k \upharpoonright U_k = 0$   
 $f_k \upharpoonright V_k = 1$

$f(x) = (f_k(x), f_k(x), \dots)$

stetige Abb.  $X \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$   
 folgt aus Lemma von Uryson

- (1)  $f$  stetig klar da  $f_k$  stetig
- (2)  $f$  bijektiv da  $T_4$  Raum umkehrabb def.
- (3)  $f^{-1}$  stetig

Lemma von Uryson

$X$  normal  $\Leftrightarrow (\forall F_1, F_2 \text{ abgeschl. } F_1 \cap F_2 = \emptyset \rightarrow \exists f \text{ stetig } f \upharpoonright F_1 = 0, f \upharpoonright F_2 = 1)$

$D = \{ \frac{k}{2^n} \mid k \text{ ungerade oder } 0, 0 \leq k < 2^n \}$  diad. ration. Zahlen

konstruieren für jedes  $d \in D$   $G(d)$  offen mit  $d_1 < d_2 \Rightarrow \overline{G(d_1)} \subseteq G(d_2) \subseteq F_1^c$

$G(d)$  rekursiv bestimmt  $G(r)$  für  $k/2^n$  bestimmt  
 $n \rightarrow n+1 \dots \subseteq G(k-1/2^{n+1}) \subseteq G(k/2^{n+1}) \subseteq G(k+1/2^{n+1}) \subseteq G(k+2/2^{n+1}) \dots$

definieren  $f(x) : f(x) = 1 \quad x \in F_1$   
 $f(x) = \inf \{ d \in D : x \in G(d) \}$

zeige  $f$  ist stetig:  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) \{ x \in X \mid |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon \text{ schliesst.}$   
 a)  $f(x_2) < f(x_1) + \varepsilon$  schliesst.  
 b)  $f(x_2) > f(x_1) - \varepsilon$  schliesst.

Thermodynamik

univ. Gasgesetz

(ideale Gase)

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$$

$$= n \cdot R \cdot T$$

$$= \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

$$R = N_A \cdot k$$

$k = 1.3806 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  Boltzmann konst.  
 $R = 8.3143 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  univ. Gasconst.  
 $N_A = 6.0222 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  Loschmidtsche Zahl  
 $N = \# \text{ Gasmolek\u00fclen}$   
 $n = \# \text{ Mole}$   
 $m = \text{Masse}$   
 $M = \text{Molmasse}$

Normbed:  $T = 273.15 \text{ K}$   
 $p = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} = 1.01325 \text{ bar}$   
 1 Mol hat dann Volumen  $V_m = 22.414 \text{ l}$

van der Waals Zust.-gl.

(Mole Gas)

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right) (V - nb) = n \cdot R \cdot T$$

$$p^* = \frac{an^2}{V^2}$$

Binnendruck d. Wechselwirkung d. Molek\u00fclen (van der Waals Kr\u00e4fte)

$$b = 4V^*$$

Eigenolumina d. Molek\u00fclen  
 $V^*$  Volumen eines Mols

kritische Gr\u00f6\u00dfen

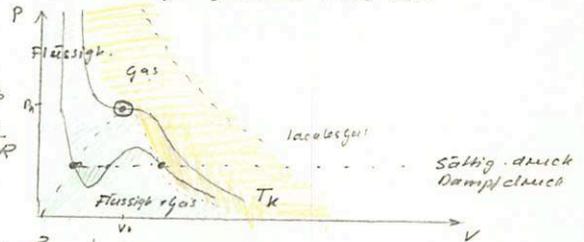
$$\frac{d^2p}{dV^2} \Big|_{T=T_k} = \frac{dp}{dV} \Big|_{T=T_k} = 0$$

$$\Rightarrow V_k = 3bn$$

$$p_k = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}$$

$$T_k = \frac{8}{27} \frac{a}{bR}$$

$$\frac{p_k \cdot V_k}{n \cdot R \cdot T_k} = \frac{3}{8}$$



Reduz. Zust.-gl.

$$p' = \frac{p}{p_k} \quad T' = \frac{T}{T_k} \quad V' = \frac{V}{V_k}$$

$$\left(p' + \frac{3}{V'^2}\right) (3V' - 1) = 8T'$$

W\u00e4rme, spez., molare W\u00e4rmekapazit\u00e4t

$$\delta Q = n \cdot C \cdot dT = m \cdot c \cdot dT$$

$C$  molare W\u00e4rmekapazit\u00e4t  
 $c$  spezif. W\u00e4rmekapazit\u00e4t  $c = \frac{C}{M}$

$$C_v = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_v \quad C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p$$

$\delta Q$  W\u00e4rme (keine Zust. gr\u00f6\u00dfe denn wird unterst. zw. Mittelwert u. W\u00e4rmestrom)

(Zust.:  $\delta Q + \delta A = dU$  1. HS)

$$\frac{(\delta Q)_v}{dT \cdot n} = \frac{dU}{dT \cdot n} = C_v$$

$$U = (f + f_{pot}) \frac{1}{2} n RT$$

$$\frac{(\delta Q)_p}{dT \cdot n} - \frac{p \cdot dV}{dT \cdot n} = \frac{dU}{dT \cdot n} \Rightarrow C_p - R = C_v$$

$$C_v = (f + f_{pot}) \frac{1}{2} R$$

1. Hauptsatz d. Thermodynamik

$$dU = \delta Q' + \delta A' = \delta Q' - p \cdot dV$$

Zustands\u00e4nderungen

irreversibel	k\u00f6nnen d. Umkehr nicht g\u00e4ngig gemacht werden
reversibel	" nicht g\u00e4ngig
isochor	$dV = 0$
isobar	$dp = 0$
isotherm	$dT = 0$
adiabatisch	$\delta Q = 0$

Reversible Zustands\u00e4nderungen

adiab.  $\delta Q = dU - \delta A = n C_v \cdot dT + p \cdot dV = 0$

$$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$$

$$n \cdot C_v \cdot \frac{dT}{T} + nR \cdot \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow C_v \cdot \ln T + R \cdot \ln V = \text{const}$$

$$p \cdot V^\gamma = \text{const}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

adiab. Zustgl.

$$\Rightarrow T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const}$$

$$\frac{p}{C_v} = \gamma - 1$$

$$p \cdot V = \text{const}$$

isoth. Zustgl.

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const}$$

$$T = p \cdot V / nR$$

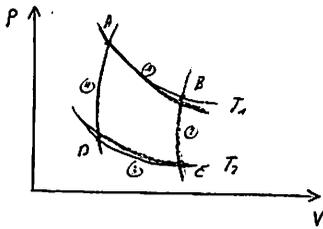
$$p \cdot V^\gamma = \text{const}$$

$$V = \frac{T}{p} \cdot \text{const}$$

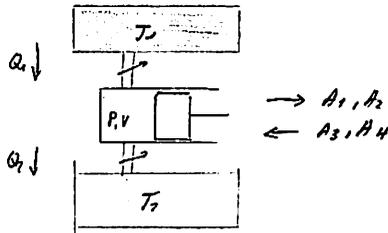
$$T \cdot p^{\frac{1}{\gamma-1}} = \text{const}$$

W

Carroll'scher Kreisprozess



- ⓐ isoth. Expans.  $Q_1 = A_1$
- ⓑ adiab. Expans.  $dQ=0 \rightarrow A_2$
- ⓒ isoth. Komp.  $Q_2 = A_3$
- ⓓ adiab. Komp.  $dQ=0 \rightarrow A_4$



Wirkungsgrad  $\eta = \frac{A}{Q_1}$  geleist. Arbeit / zugef. Wärme d. oberen Res.

$$A_1 = \int_{V_A}^{V_B} p dV = n \cdot R \cdot T_1 \ln \frac{V_B}{V_A} = -Q_1 \quad Q_2 = -A_2 \quad \text{denn } dU = n \cdot C_V \Delta T = 0 \Rightarrow dQ = -dA$$

$$A_2 = -n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1)$$

$$A_3 = n \cdot R \cdot T_2 \ln \frac{V_C}{V_D} = -Q_2$$

$$A_4 = n \cdot C_V \cdot (T_1 - T_2)$$

$$\eta = \frac{-dA}{Q_1} = \frac{n \cdot R \cdot (T_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + T_2 \ln \frac{V_C}{V_D})}{-n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_A}{V_B}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Wirkungsgrad von rev. Kreisprozessen  $\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \eta_c = \eta_{rev} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$   
 Wirkungsgrad von hel. Prozesse  $\eta \leq \eta_c$

Entropie

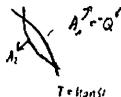
$dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$  Entropie ist vollst. Differential f. rev. Übergang

$\oint dS = 0$  Zustand d. Zustandes A  
 $\Rightarrow S_A = \int_0^A \frac{dQ}{T}$  (Entropie ist Zustandsvariable)

allg.  $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$   
 irrevers.

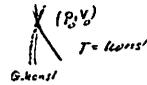
Isotermen, Adiabaten

strecken sich nicht:



$A_1 + A_2 + Q = 0$  f. 1. Z. HS

Adiab. Steile als Isoth.:



$p_1(V) = \frac{I}{V} \cdot \text{const}_1$   $\text{const}_1 = \frac{V_0}{V_0^\gamma} \cdot \text{const}_2$

$p_2(V) = \frac{I}{V^\gamma} \cdot \text{const}_2$

$\frac{dp_1}{dV} = -\frac{I}{V^2} \cdot \text{const}_1$   $\frac{dp_2}{dV} = -\gamma \cdot \frac{I}{V^{\gamma+1}} \cdot \text{const}_2$

$\Rightarrow -\frac{I}{V_0^{\gamma+1}} \cdot \text{const}_2 > -\frac{I}{V_0^{\gamma+1}} \cdot \text{const}_2 \cdot \gamma$

2. Hauptsatz d. Thermodynamik

Clausius  $\nexists$  per. Maschine, die Wärme von tieferem in höherem Niveau transport.

Thomson  $\nexists$  per. Maschine, welche Wärme in Arbeit verwandelt.

Wirkungsgrad  $\eta \leq \eta_c$  für Wärmemasch.  
 Entropie  $dS$  ist vollst. Differential

Entropie d. idealen Gases

$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{dU - dA}{T} = \frac{1}{T} (n \cdot C_V dT + p dV) = n C_V \frac{dT}{T} + n R \frac{dV}{V}$

$\Rightarrow S(T, V) = n \cdot C_V \cdot \ln(T) + n \cdot R \cdot \ln V$  und will keine  $V \rightarrow 0$

irreversible Prozesse Gesamtentropie positiv  
 reversible Prozesse Gesamtentropie 0

Druck:  $F(v_x, v_y, v_z) = \frac{\# \text{ Mole mit } v \text{ s } [v_x, v_y, v_z]}{\# \text{ Mole}}$   $\int \int \int F dv_x dv_y dv_z = 1$

$dN = \# \text{ auf Fläche } A \text{ auftreffende Moleküle}$   
 $= A \cdot v_x \cdot n \cdot F dv$   $n = \# \text{ Molekül/volumen.}$

$dF = 2m v_x dN$  mittlere Kraft

$dp = \frac{dF}{A} \cdot A = 2mn \int_0^\infty dv_x \int_{-\infty}^\infty dv_y \int_{-\infty}^\infty dv_z v_x^2 F(v_x, v_y, v_z) = 2mn \langle v_x^2 \rangle$   
 $\frac{1}{3} v^2$

$P = \frac{2}{3} n \langle \frac{m}{2} v^2 \rangle$

Gemisch aus 2 Gasen  $m_1, m_2$   $\vec{v}_s = \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{v}_2$   $\vec{w} = \vec{w}_1 - \vec{v}_2$

$\langle \vec{w} \cdot \vec{v}_s \rangle = 0$

$\rightarrow \langle \frac{m_1}{2} v_1^2 \rangle = \langle \frac{m_2}{2} v_2^2 \rangle$

$P \cdot V = \frac{2}{3} N \langle \frac{m}{2} v^2 \rangle = N \cdot k \cdot T \rightarrow T = \frac{2}{3k} \cdot \langle \frac{m}{2} v^2 \rangle$   $n = \frac{P}{kT}$

$U_{kin} = f \cdot \frac{1}{2} kT$   $f \neq \text{Frei grade}$

$U_{pot} = f_{osz} \cdot \frac{1}{2} kT$   $f_{osz} \neq \text{Frei grade d. Osz.}$  } Äquipartition der Energie

Bsp	U	Cv	Cp
1 Atom.	$3/2 RT$	$3/2 R$	$5/2 R$
2 Atom star.	$5/2 RT$	$5/2 R$	$7/2 R$
2 Atom vibr.	$7/2 RT$	$7/2 R$	$9/2 R$
Festkörper star.	$6/2 RT$	$6/2 R$	$8/2 R$

Dulong Regel

Geschw. vert. d. Moleküle

$\frac{dN(v)}{dv} = H T N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$  Maxwell Boltzmannsche Geschw. vert. d. Moleküle

$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{kT}{m}}$  Mittlere Geschw.

$\bar{z} = \sqrt{2} \sigma n \bar{v}$  Stossanzahl  $\sigma$  Wirkungsquerschnitt  $d^2T$  bei Molekül mit Durchmesser  $d$

$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}$  mittlere freie Weglänge

Maxwell Boltzmannsche vert. gesetz d. Energie

# Zustände der Energie  $E_i$  (pro Volumen)  $\sim e^{-\frac{E_i}{kT}}$

Bsp  $\frac{dN}{4\pi v^2 dv} = N \cdot \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$  Geschw. vert.

$\frac{dN}{Adz} = N \cdot \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgz}{kT}}$  Atmosphären vert.

$\frac{dN}{d\Omega} = \sim e^{-\frac{mB \cos \theta}{kT}}$

Magnetisierung

$M = n \cdot \langle m_z \rangle = n \cdot m_B \cdot \langle \cos \theta \rangle = n \cdot m_B \cdot \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \right) = \frac{m_B \cdot B}{kT}$   $\alpha = \frac{m_B \cdot B}{kT}$

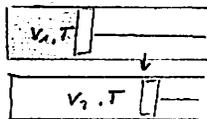
$L(\alpha) \approx \frac{\alpha}{3}$

$M = \frac{m_B^2 B}{3kT}$  Curie Gesetz

BSP isotherme reversible Expansion d. idealen Gases

$$S_2 - S_1 = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Entropiezunahme

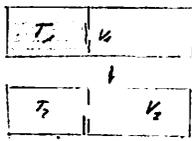


Abgegebene Energie

$$A^r = \int p dV = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

adiabatische irreversible Expansion

$$S_2 - S_1 = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$



$$T_1 = T_2 \quad \text{da} \quad 0 = dQ + \frac{dA}{\sigma}$$

obwohl  $dQ^d = 0$  beim ganzen Vorgang

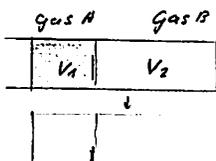
ist Entropieänd.  $\neq 0$  denn Entropie definiert  $\frac{dQ_{rev}}{T}$  ist Zustandsgröße

Bei revers. Adiab. Prozessen, Entropie konst.

Mischung zweier Gase mit gleich Temp

Gas A  $S_2^A - S_1^A = n_A \cdot R \cdot \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}$

Gas B  $S_2^B - S_1^B = n_B \cdot R \cdot \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}$

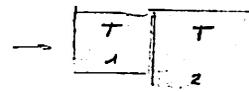
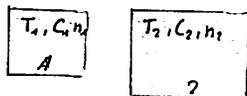


Entropieänd. gesamt:  $R \cdot \ln \left( \frac{(V_1 + V_2)^{n_A + n_B}}{V_1^{n_A} \cdot V_2^{n_B}} \right) > 0$

Wärmeübertragung u. 2 Mal. mit versch. Temp.

$$n_1 T_1 C_1 + n_2 T_2 C_2 = T (n_1 C_1 + n_2 C_2)$$

$$\Rightarrow T = \frac{n_1 T_1 C_1 + n_2 T_2 C_2}{n_1 C_1 + n_2 C_2}$$



Mal 1  $S_2^1 - S_1^1 = n_1 \cdot C_{1V} \cdot \frac{T_1}{T} - n_1 C_{1V} \ln \frac{T_1 (n_1 C_1 + n_2 C_2)}{n_1 T_1 C_1 + n_2 T_2 C_2}$

Mal 2  $S_2^2 - S_1^2 = n_2 \cdot C_{2V} \cdot \frac{T_2}{T} - n_2 C_{2V} \ln \frac{T_2 (n_1 C_1 + n_2 C_2)}{n_1 T_1 C_1 + n_2 T_2 C_2}$

$$\Delta S = n_1 C_1 \ln \frac{T_1}{T} + n_2 C_2 \ln \frac{T_2}{T} > 0$$

denn Entzug d. Energie unter hoch Temp als Zuf. d. Energie

Zust. gl. und innere Energie

$$dS = \frac{dS}{dV} \cdot dV + \frac{dS}{dT} \cdot dT$$

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + PdV}{T}$$

$$dS = \frac{1}{T} \left( \frac{dU}{dV} dV + \frac{dV}{dT} dT + PdV \right) \Rightarrow \frac{dS}{dV} = \frac{1}{T} \left( \frac{dU}{dV} + P \right)$$

$$\frac{dS}{dT} = \frac{1}{T} \frac{dU}{dT}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{T^2} \left( \frac{dU}{dV} + P \right) + \frac{1}{T} \left( \frac{d^2 U}{dV dT} + \frac{dP}{dT} \right) = \frac{1}{T} \frac{d^2 U}{dT dV} \Rightarrow \frac{1}{T^2} \left( \frac{dU}{dV} + P \right) = \frac{1}{T} \frac{dP}{dT}$$

$$\boxed{\frac{dU}{dV} = T \cdot \frac{dP}{dT} - P}$$

Bsp. ideales Gas:  $\frac{dU}{dV} = T \cdot \frac{P}{V} - P = 0$

Bsp. van der Waals Gas:  $P = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2} \quad \frac{dP}{dT} = \frac{nR}{V-nb}$

$$\frac{dU}{dV} = \frac{an^2}{V^2} \quad \frac{dU}{dT} = C_V$$

$$\Rightarrow dU = \frac{an^2}{V^2} dV + C_V dT$$

$$U = \frac{an^2}{V} + C_V T$$

W

isotherme Verteilung d. Atmosphäre

$$p = n \cdot k \cdot T \quad n = n(z)$$

$$p(z) \cdot A = p(z+dz) \cdot A + mg n A dz$$

$$p(z) \cdot A = p(z) \cdot A + \frac{dp}{dz} \cdot A \cdot dz + mg n A dz$$

$$0 = \frac{dn}{dz} k T A dz + mg n A dz$$

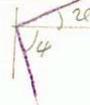
$$\Rightarrow \ln n(z) = -\frac{mg}{kT} z + \ln(n_0) \Rightarrow n(z) = n_0 \cdot e^{-\frac{mg}{kT} z}$$

Berechn. d. Gasdrucks mit unelast. Stoss

elast. Stoss



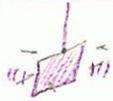
inelast. Stoss



$v_1, v_2$  unabhängig

=> gleicher Druck

Bestimmung d. Boltzmannkonst.



Brownsche Beweg. d. Spiegeltrens

Nichtrelativ. Moment:  $-D \cdot \dot{d} = H$

Mittelwert d. Quadrats d. Auslenkung:  $\langle x^2 \rangle$

Temperat. T

Equipart.-gesetz:  $\frac{1}{2} D \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$

$$\Rightarrow k = \frac{\langle x^2 \rangle \cdot D}{T}$$

Räumliche Verteil. in rotierend. Zylinder



Temper. T

$\omega$  Winkelgeschw.

N Moleküle

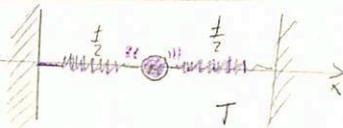
gesucht: räuml. Verteilung  $n(r)$

$$p(r) \cdot dA - p(r+dr) \cdot dA + m n(r) \cdot dr dA \omega^2 r = 0 \quad \text{Kräfte}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dr} = m n(r) \omega^2 r \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{dn}{dr} = -\frac{m \omega^2}{kT} r n(r)$$

$$\Rightarrow n(r) = e^{-\frac{m \omega^2}{2kT} r^2} \cdot n(0)$$

Brownsche Bewegung



Stossmass Dämpfung Feder

$$M \cdot \ddot{x} = k_s \cdot x - b \cdot \dot{x} - f \quad | \cdot x$$

$$M \cdot \dot{x} \dot{x} = k_s \cdot x \dot{x} - b \cdot \dot{x} \dot{x} - f \dot{x}$$

$$\frac{1}{2} M \frac{d}{dt} \langle \dot{x}^2 \rangle - M \langle \dot{x} \rangle^2 = x \cdot k_s - \frac{1}{2} b \frac{d \langle \dot{x}^2 \rangle}{dt} - f \dot{x}$$

mitteln

$$\frac{1}{2} M \frac{d}{dt} \langle \dot{x}^2 \rangle - k \cdot T = 0 - \frac{1}{2} b \frac{d \langle \dot{x}^2 \rangle}{dt} - k \cdot T$$

$$\frac{1}{2} M \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle + \frac{1}{2} b \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 0$$

$$\text{station. Lösung: } \langle x^2 \rangle = \text{const} = \frac{k \cdot T}{H}$$

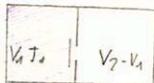
Molare Wärmekapazität von  $SF_6$



3 Translat. Freiheitsgrade  
3 Rotat. Freiheitsgrade  
15 Oszill. Freiheitsgrade

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} C_V = \frac{21}{2} R$$

Überhöhen eines Van der Waal Gases



innere Energie eines Van der Waal Gases pro mol

$$U(T, V) = C_V \cdot T - \frac{a}{V} + \text{const}$$

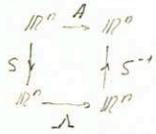
$$U_2(T, V) - U_1(T, V) = \frac{a}{V_2} - \frac{a}{V_1}$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 - \frac{a}{C_V} \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

gekoppelte Schwingungen

Normalmod. : entkoppelte Mod.  
 Normalbeweg. : nur eine Normalmod. ≠ 0

Entkoppelung



$\ddot{u} = A \cdot u$      $A$  diagonalisieren     $S^{-1} A S = \Lambda$

$u(t) = S \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega_1 t \\ \vdots \\ \cos \omega_n t \end{bmatrix} S^{-1} u_0$

$+ S \cdot \begin{bmatrix} \sin \omega_1 t \\ \vdots \\ \sin \omega_n t \end{bmatrix} S^{-1} u_0'$

$\omega_i = \sqrt{|\lambda_i|}$

$S = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$      $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Bew.  $A S = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & & & \\ & \lambda_2 x_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n x_n \end{bmatrix} = S \cdot \Lambda$

Seile

$\psi_{tt} = \frac{S_0}{\mu} \psi_{zz}$      $v_0 = \sqrt{\frac{S_0}{\mu}}$

$S_0$  Kraft  
 $\mu$  Masse pro Längeneinh.

Frequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{F_0}{m_0}}$



Spez. Lösung : Normalbewegungen

$\psi_j(z,t) = c \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi z}{l}\right) \cos\left(\frac{n \pi v_0 t + \varphi_j}{l}\right)$

allg. Lösung für  $\psi(z,0) = f(z)$   
 $\psi_t(z,0) = g(z)$

Fourier :  $\psi(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \cdot \sin \frac{n \pi x}{l}$

$\frac{d^2}{dt^2} c_n(t) = -\frac{n^2 \pi^2 v_0^2}{l^2} c_n(t) \Rightarrow c_n(t) = a_n \cdot \cos \frac{n \pi v_0 t}{l} + b_n \sin \frac{n \pi v_0 t}{l}$

$c_n(0) = a_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx$

$\frac{d}{dt} c_n(0) = b_n \cdot \frac{n \pi v_0}{l} = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l g(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx$

$\Rightarrow b_n = \frac{2}{n \pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx$

also :  $\psi(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n \pi z}{l} \cdot \left( a_n \cdot \cos \frac{n \pi v_0 t}{l} + b_n \sin \frac{n \pi v_0 t}{l} \right)$

$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx$      $b_n = \frac{2}{n \pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx$

Lösung zur Erzeug. fortlauf. Wellen

$P(z,t) = -S_0 \cdot \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} \frac{d \psi(z,t)}{dt}$

$F_x = -S_0 \cdot \sin x$   
 $= -S_0 \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0}$   
 $P = F_x \cdot \frac{d \psi(z,t)}{dt}$

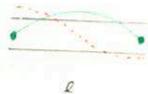
Schallwellen

schlanker Stab  
 longit. Wellen  
 Gase u. Flüssigk.

$\psi_{tt} = v_0^2 \psi_{zz}$      $v_0 = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}$   
 $\psi_{tt} = v_0^2 \psi_{zz}$      $v_0 = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot \alpha c}}$

$P(z,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \psi(z,t)}{dz}$

Flöte u. Klarinette



$P$   
 $\psi$

Grundschw.  $\lambda_1 = 2l = \frac{v_0}{\gamma}$      $v \lambda = v_0$

$\gamma = \frac{v_0}{2l}$     Frequenz von Flöten



Grundschw.  $\lambda_1 = 4l$

$v = \frac{v_0}{4l}$     Gr. Frequ. von Klarinetten

Schallgeschw. in Gasen

Berechn. von  $\alpha$  :

$\frac{\Delta V}{V_0} = -\alpha \cdot \Delta P$  (nach ref)

$\frac{1}{\alpha} = -V_0 \cdot \left( \frac{\Delta P}{\Delta V} \right)_{v=v_0}$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \gamma \cdot p_0$

$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}}$

$p(V) = p_0 \cdot \frac{V_0^\gamma}{V^\gamma}$

(adiab. Zustgl.  $p \cdot V^\gamma = \text{konst}$ )

$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p_0 V_0^\gamma}{V^{\gamma+1}} = -\gamma \frac{p_0}{V}$

$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{p_0 \cdot R \cdot T}{V_0} = \frac{p_0 \cdot T}{\rho_0 \cdot M} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\gamma \cdot \frac{R \cdot T}{M}}$

M

Schallwellen im Raum

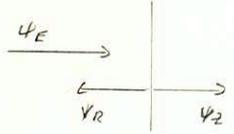
3-dim wellenegl.  $\frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = v_0^2 \Delta p(\vec{r}, t)$

kugelwelle  $p(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \cdot \cos(k \cdot r - \omega t - \alpha)$

$u(\vec{r}, t) = \frac{r_0}{r} f(t - \frac{r-r_0}{v_0})$  bei helob. bewegte kugelmembran  $u(r_0, t) = f(t)$

stehende welle

$P_{\text{em}}(x, y, z, t) = A \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t)$



Reflexion

$u_E(z, t) = A \cos(k_1 z - \omega t)$   
 $u_R(z, t) = R \cdot A \cdot \cos(k_1 z + \omega t)$   
 $u_T(z, t) = T \cdot A \cdot \cos(k_2 z - \omega t)$   
 $u_1 = u_E(z, t) + u_R(z, t)$   
 $u_2 = u_T(z, t)$

$u_1(0, t) = u_2(0, t) \Rightarrow A(1+R) = A \cdot T \quad 1+R=T$   
 $F_1(A k_1 \sin \omega t - R A k_1 \sin \omega t) = F_2 \cdot T \cdot A \cdot k_2 \cdot \sin \omega t$

$\Rightarrow R = \left(1 - \frac{E_2 k_2 T}{E_1 k_1}\right) \frac{1}{k_1 E_1} = \left(1 - \frac{E_2 v_{01}}{E_1 v_{02}}\right) \frac{1}{k_1 E_1}$

$z = \frac{E}{v_0}$

Charakt. Impedanz

$\Rightarrow z_1(1-R) = z_2 \cdot T$

$\Rightarrow R = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \quad T = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}$

spez. Felswand  $z_1 \ll z_2$   
 $R = -1 \quad T = 0$

spez. Stehende  $z_1 \gg z_2$   
 $R = +1 \quad T = 0$

Doppler effekt

bewegte Quelle



n # Maximim in  $\Delta t$

$c \cdot \Delta t = n \cdot \lambda$   
 $(c-v) \Delta t = n \cdot \lambda'$   
 $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{c}{c-v} \Rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{c}{c-v}$

bewegl. Detektor

$v' = v \left(1 + \frac{v}{c}\right)$

$p(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(k \cdot \vec{r} - \omega t)$

Schallintensität

(Leistung d. Welle d.h. im Zeitmittel durch Einheitsfläche senkrecht hindurchtransportierte Energie)

$\bar{w}_c = \frac{E A^2 \omega^2}{2 \cdot v_0}$

für kugelwelle  $\bar{w}_c = \frac{E A^2 \omega^2}{2 r^2 v_0}$

M

losgelassener Reifen



Reifen dreht sich um Nullpunkt was passiert, wenn loslassen

$$\Theta = mr^2 + mr^2 \quad (\text{Steiner})$$

$$L = 2mr^2 \cdot \omega$$

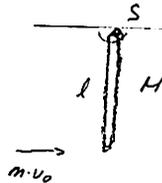
Impulserh.  $p = m\omega r \Rightarrow v = \omega r = \text{konst}$

Drehimpulserh.  $L' = \frac{r \cdot v \cdot m}{\omega \cdot r^2} + mr^2 \omega' = 2mr^2 \omega \Rightarrow \omega' = \omega$



ballist. Pendel

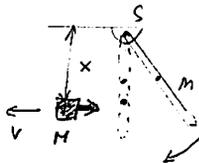
Schuss auf Pendel



$$\Theta_{zz} = \frac{Ml^2}{3} + ml^2$$

$$m \cdot v_0 \cdot l = \omega \cdot \Theta_{zz} \Rightarrow \omega = \dots$$

Jetzt Energieerhaltung



wo muss aufgelegt werden, damit in S kein Schlag entsteht.

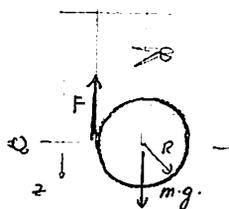
Impulserh  $M \cdot v = m \cdot \frac{l}{r} \omega$

Drehimpulserh  $\frac{m}{3} l^2 \omega = M \cdot v \cdot x$

$$\frac{m}{3} l^2 \omega = M \frac{l}{r} \omega x$$

$$x = \frac{2l}{3}$$

fallengelassenes Jojo



Geschw  $v = ?$

$$\frac{m}{2} \dot{z}^2 + \frac{\Theta}{2} \omega^2 = m \cdot g \cdot z$$

$$\omega = \frac{\dot{z}}{R}$$

$$\Theta = \frac{R^2}{2} m$$

$$\frac{3}{4} m \dot{z}^2 = m \cdot g \cdot z$$

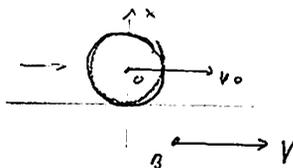
$$v(z) = \sqrt{\frac{4}{3} g z} \quad \omega = \frac{4}{3} \frac{g z}{R^2}$$

Fadenkraft:

$$F \cdot R = \Theta \cdot \dot{\omega} = \frac{R^2}{2} m \cdot \frac{4}{3} \frac{g}{R^2} \dot{z} = \frac{2}{3} m g \dot{z}$$

$$F = \frac{2}{3} m g \frac{\dot{z}}{R}$$

Relativität d. moment. Drehachse



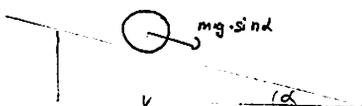
Beobachter B

wo liegt für ihn momentane Drehachse?

$$\omega = \frac{v_0}{R} \quad v(r) = \frac{v_0}{R} x + v_0 = V$$

$$\Rightarrow x = \frac{(V - v_0) R}{v_0}$$

Rollende Kugel



$$\Theta = \frac{2}{5} mr^2$$

$$mr^2 \ddot{\omega} + \dot{\omega} \cdot \Theta = r \cdot mg \sin \alpha$$

Drehimpulserh

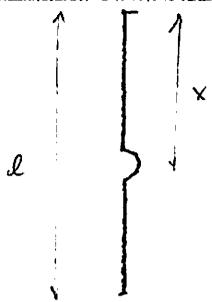
$$\ddot{\omega} = \frac{r mg \sin \alpha}{mr^2 + \Theta}$$

$$L = \frac{\Theta}{2} \dot{\omega}^2 + \frac{1}{2} \dot{v}^2 m + v \cdot r \cdot \sin \alpha \cdot mg$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} = \Theta \dot{\omega} + r^2 m \dot{\omega} = \frac{dL}{d\dot{\omega}} = r \cdot \sin \alpha \cdot mg \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{r \cdot mg \cdot \sin \alpha}{r^2 m + \Theta}$$

M

Fallpunktgeschw. einer Seilwelle



$$c^2 = \frac{F}{\mu} \quad F = (l-x)\mu \cdot g$$

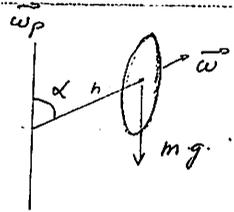
$$\rightarrow c = \sqrt{(l-x)g} = \frac{dx}{dt}$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{(l-x)g}} \rightarrow T = \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{(l-x)g}}$$

$$= \frac{-\sqrt{(l-x)g}}{g} \Big|_0^l = \frac{2\sqrt{lg}}{g}$$

vgl. freier Fall  $\sqrt{\frac{2l}{g}}$

Keine Präzession des Kreisels



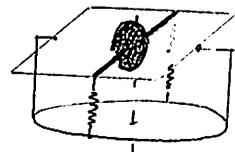
$\vec{\omega}_p = ?$  ohne Nutation

$$M = \frac{d\vec{L}}{dt} = \omega_p \times L$$

$$h \cdot m \cdot g \sin \alpha = \omega_p \cdot L \sin \alpha$$

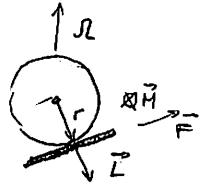
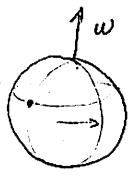
$$\rightarrow \omega_p = \frac{m \cdot g \cdot h}{L}$$

Kreisellkompass



Wie stellt sich die Federachse ein?

Die Federn zwingen d. Kreisell, horizontal zu bleiben. Die Erde rotiert. Man ändert den Null. Es gibt daher ein Drehmoment das die Kreisellachse senkrecht zum Breitenkreis zwingt.



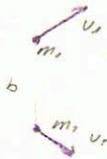
$\vec{M} \perp \vec{L}$  Richtung von  $\vec{F}$

Der Kreisell wird sich in Nord-Süd-Richtung legen

$$M = \frac{dL}{dt} = \Omega \times L$$

→ Nord-Richtung

Abtrennungenergie



unter welchen Umständen Abtrennung möglich?

kin. Energie im Schwerpunktsystem

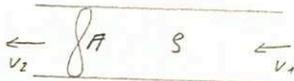
$$E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

pot. Energie

$$U = \frac{m_1 m_2}{b}$$

$$U \leq E(\infty) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_0^2 - \frac{m_1 m_2}{b}$$

Schub- & Düsentriebwerk



$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot (v_1 - v_2) = \dot{m} \cdot v_1 (v_1 - v_2)$$

ebene Massenverteilung



ebene Massenverteilung in x,y Ebene

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$$

$$I_{xx} = \int y^2 dm \quad I_{yy} = \int x^2 dm$$

$$I_{zz} = \int r^2 dm = \int x^2 + y^2 dm = I_{xx} + I_{yy}$$

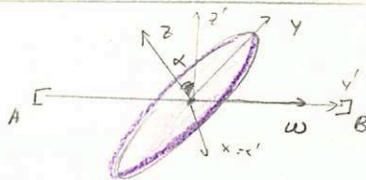
Anwendung: Trägheitsmoment einer Kreisscheibe:



$$I_{zz} = \frac{1}{2} m r^2$$

$$\Rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m r^2$$

Schief rotierende Scheibe



x,y,z Körperfestes KS

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} m r^2 \quad \text{Trägheitstensor in Körperfest. System}$$

x',y',z' Raumfestes KS

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \omega \cos \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\omega \sin \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_0 = I \cdot R = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} m r^2 \omega \cos \alpha \\ \frac{1}{4} m r^2 \omega \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

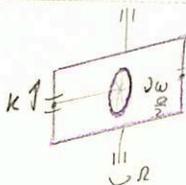
$$L_0 = R_0^T L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} m r^2 \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin^2 \alpha + 1 \\ -\sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \frac{1}{4} m r^2 \omega$$

$$L(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & 0 & \sin \omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \omega t & 0 & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin^2 \alpha + 1 \\ -\sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \frac{1}{4} m r^2 \omega$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin \omega t & \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ \sin^2 \alpha + 1 \\ -\cos \omega t & \frac{\sin 2\alpha}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{4} m r^2 \omega$$

$$M = \frac{dL}{dt} = \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ 0 \\ \sin \omega t \end{pmatrix} \frac{\sin 2\alpha}{8} m r^2 \omega^2$$

Kreiselring



$$M = R \cdot I \cdot L = \dot{L}$$

$$R \cdot m r^2 \omega = M$$

$$R = \frac{R m r^2 \omega}{\omega}$$

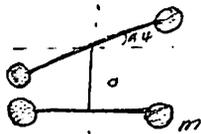
vgl. Resultat mit Corioliskraft

$$M = \int_0^{2\pi} \frac{dm}{\omega} \cdot \frac{R \cdot \omega \cdot r \cdot \sin^2 \alpha \cdot r}{R \cdot v \text{ projiziert}} = m R r^2 \omega$$



M

Wellenkette



Rückwärtscharakteres Drehmoment  $M_2 = -\frac{c}{a} A u$

$$\theta \cdot \Delta \ddot{\psi} = -\frac{c}{a} A u$$

$$\theta \cdot \ddot{\psi}_n = -\frac{c}{a} (u_n - u_{n-1}) + \frac{c}{a} (u_{n+1} - u_n) \quad n=1 \dots N$$

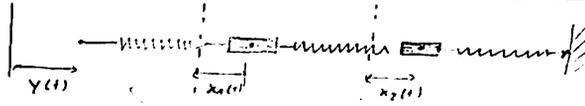
Tayloransatz:  $u_{n+1} = u_n(z+a, t) = u_n(z, t) + \frac{d u_n}{d z} a + \frac{d^2 u_n}{d z^2} \frac{a^2}{2}$

$$u_{n-1} = u_n(z-a, t) = u_n(z, t) - \frac{d u_n}{d z} a + \frac{d^2 u_n}{d z^2} \frac{a^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \theta \cdot \ddot{\psi}_n &= \frac{c}{a} \left[ -2u_n + 2u_n + \frac{d u_n}{d z} a - \frac{d u_n}{d z} a + \frac{d^2 u_n}{d z^2} a^2 \right] \\ &= c \cdot a \cdot \frac{d^2}{d z^2} u_n \end{aligned}$$

$$\ddot{\psi}_n = \frac{c \cdot a}{\theta} \frac{d^2}{d z^2} u_n$$

Resonanzanregung



$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 = -m \Gamma \dot{x}_1 - f(x_1 - y) + f(x_2 - x_1) \\ m \ddot{x}_2 = -m \Gamma \dot{x}_2 - f(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \Gamma \dot{x}_1 + \frac{2f}{m} x_1 - \frac{f}{m} x_2 - \frac{y_0 t \cos \omega t}{m} = 0 \\ \ddot{x}_2 + \Gamma \dot{x}_2 - \frac{f}{m} x_1 + \frac{2f}{m} x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \Gamma \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 (x_1 - x_2) = \frac{y_0 t \cos \omega t}{m} \\ \ddot{x}_2 + \Gamma \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 (x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \quad \text{gekoppeltes Diffsyst.}$$

$$\begin{cases} (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \Gamma(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \omega_0^2 (x_1 + x_2) = F_0 \cos \omega t \\ (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \Gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + 2\omega_0^2 (x_1 - x_2) = F_0 \cos \omega t \end{cases} \quad \text{entkoppelt}$$

Intensität einer Schallquelle

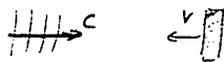
Kugelwelle  $\bar{w}_c = \frac{E A^2 \omega^2}{2 \rho v_0} = \frac{1}{8} \frac{A^2 \omega^2}{\rho v_0} = \rho \cdot \rho_0 \cdot \frac{A^2 \omega^2}{2 \rho v_0}$

Zerfall von Teilchen

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tau$  mittlere Lebensdauer

Dopplereffekt am bewegten Spiegel

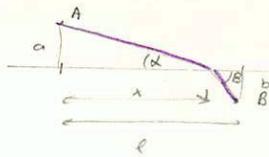


wenn v empfangene Frequenz  $\gamma' = \gamma_0 \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$   
 Spiegel als Sender mit  $\gamma'' = \gamma' \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$

M

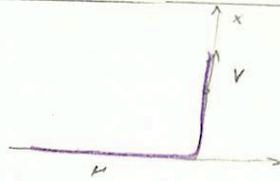
Mechanik Übungen Loisi

Prinzip von Fermat



$\sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(l-x)^2+b^2}$  minimal  
 $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-l}{\sqrt{(l-x)^2+b^2}} = 0$   
 $\cos \alpha + n \cdot \cos \beta = 0 \Rightarrow n = -\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$

beschleunigte Kette



konst. Geschw. v  
 Kraft F(t)  
 impulsesh.  $v \cdot \mu \cdot x = p$   
 $\frac{d}{dt} v \mu \cdot x = F + \mu \cdot x \cdot g$   
 $F = v^2 \mu - \mu \cdot x \cdot g$

potentielle axiale Vektoren

$p \cdot p = p$   
 $a + a = a$   
 $p \cdot a = a$   
 $a \cdot a = a$   
 $p \cdot a = p$

Satz von Steiner

$\theta = \theta_S + M l^2$



$\theta = \int (\vec{r} + \vec{l})^2 dm = \int r^2 dm + \int l^2 dm + 2l \int r \cos \alpha dm$

Auto auf schief. Ebene



$\sum T_i = 0$   
 $\sum T_i = C$

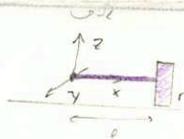
Drehmoment Motor-Achse = Drehmoment Rad-Boden

Beschleunigung

neue Reibungsrichtung  
 Auf Lagereibung

alle Reib. Kräfte  
 $m \cdot g \cdot \sin \alpha + \frac{\theta \cdot \dot{\omega}}{r}$   
 $m \cdot g \cdot \cos \alpha$

Woltergang



Trägheitstensor

$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{xx} & & \\ & \theta_{yy} & \\ & & \theta_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2} r^2 & & \\ & m(\frac{r^2}{4} + l^2) & \\ & & m(\frac{r^2}{2} + l^2) \end{pmatrix}$

(Berechn. d. Trägheitstensors)

Tensor d. Hülfskreise  $\begin{pmatrix} \frac{m}{2} r^2 & & \\ & \frac{m}{4} r^2 & \\ & & \frac{m}{4} r^2 \end{pmatrix}$

Drehvektor

$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega \cdot \frac{l}{r} \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$

Steine  $\begin{pmatrix} \frac{m}{2} r^2 & & \\ & \frac{m}{4} r^2 + 4l^2 & \\ & & \frac{m}{4} r^2 + ml^2 \end{pmatrix}$

Drehmoment

$\vec{L} = \theta \cdot \vec{\omega}$

Billardkugel



wo muss geschlossen werden, damit die Kugel gerade rollt (keine Reibung)

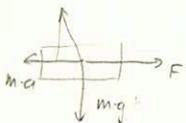
$\int F dt = m \cdot v = m \cdot \omega r$  (Impulserhaltung)

$\int x F dt = L = \theta \cdot \omega$  (Drallenerhaltung)

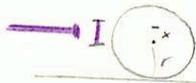
$\Rightarrow \phi \cdot \omega = m \cdot \omega \cdot r \cdot x \Rightarrow x = \frac{\theta}{m r} = \frac{2}{5} r$

jetzt mit Reibung:

$\mu$  Haftreib. -Koeff. in welchem Bereich muss jetzt angeschlagen werden?



$m \cdot g \cdot \mu = F \cdot m \cdot a$



$\int (F - m \cdot g \cdot \mu) dt = m \cdot v = m \cdot \omega r$

$\int x \cdot F + r \cdot m \cdot g \cdot \mu dt = \theta \cdot \omega$

$x \cdot m \cdot \omega r - \int (x-r) m \cdot g \cdot \mu dt = \theta \cdot \omega$

$x \cdot m \cdot \omega r - (x-r) m \cdot g \cdot \mu \cdot t = \theta \cdot \omega$

$x = \frac{\theta \cdot \omega + m g \mu t}{m \omega r + m g \mu t}$

$t \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -1$   
 $\mu \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -r$

für  $t \rightarrow 0$  bekommt man das alte Resultat

Es kommt jetzt darauf an in welcher Zeit es auf welches  $\omega$  beschleunigt u

rel. Mechanik

Lorenztrafo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \gamma & -\gamma v & \\ & -\gamma v & \gamma & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$x' = x \quad y' = y \quad z' = \gamma(z - vt)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{vz}{c^2}) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

S' bewegt. Inert. System  
rel. zu S

Umkehrtrafo

$$\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ ct' \end{pmatrix}$$

$\tanh u = \frac{v}{c}$  Drehung im Minkowski-Raum

andere Sicht: 4-Vektoren

$$\begin{pmatrix} iz \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iz' \\ ct' \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} ix \\ iy \\ iz \\ ct \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} iv \\ i\frac{v}{c} \\ i\frac{v}{c} \\ c \end{pmatrix} \quad \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} icp_x \\ icp_y \\ icp_z \\ E/c \end{pmatrix}$$

Geschw. trafo

$$x' = \frac{x - vt}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad y' = \frac{y}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad z' = \frac{z - vt}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2} dz)} = \frac{\dot{x}}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dz}{dx})}$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{\gamma(dz - v dt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2} dz)} = \frac{\dot{z} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \dot{z}}$$

Feldertrafo

$$\begin{aligned} E_x' &= \gamma(E_x + v B_y) & E_y' &= \gamma(E_y - v B_x) & E_z' &= E_z \\ B_x' &= \gamma(B_x - \frac{v}{c^2} E_y) & B_y' &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_x) & B_z' &= B_z \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} E_x' \\ B_y' \\ E_y' \\ B_x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & v \\ \frac{v}{c^2} & \gamma \\ & \gamma - v \\ & -\frac{v}{c^2} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ B_y \\ E_y \\ B_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_x' \\ c B_y' \\ E_y' \\ c B_x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \\ \cosh u & -\sinh u \\ -\sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ c B_y \\ E_y \\ c B_x \end{pmatrix}$$

Längenkontr.

$\Delta l = 0 \quad \Delta z' = \gamma \Delta z$

$$\Delta z = \frac{1}{\gamma} \Delta z'$$

Zeitdil.

$\Delta t' = 0 \quad \Delta t = \gamma \Delta t'$

$$\Delta t = \frac{1}{\gamma} \Delta t'$$

Rel. Dopplereffekt

$\Delta y = 0 \quad \Delta t = T$   
 $\Delta y' = -\gamma \cdot v \cdot T$   
 $\Delta t' = \gamma T$

$T' = \Delta t' - \frac{\Delta y'}{c}$   
 $= T(\gamma + \gamma \frac{v}{c}) = T \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$

$$\gamma' = \gamma \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

Impuls kraft

$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m_0 \gamma \vec{v} \quad \vec{F} = m_0 \gamma^3 \vec{a}$

Energie

$E_{rel} = mc^2 = m_0 \gamma c^2$   
 $E_0 = m_0 c^2$   
 $E_{kin} = (m - m_0) c^2 = E_{rel} - E_0$

Ruheenergie  
kin Energie

$$E_{rel}^2 = m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$$

transvers. Relat. Dopplereffekt

$\rightarrow v$

$\therefore \gamma' = \gamma_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

allg. S 319 Rep.

klass. Mechanik

Relativbewegung:

$x' = R x + v t$  (Galilei trafo)

$\dot{x}' = \dot{R} x + R \dot{x} + v$   
 $\ddot{x}' = \ddot{R} x + 2\dot{R} \dot{x} + R \ddot{x} + \dot{v}$

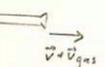
$\ddot{a} = R^T \ddot{a}' - R^T \dot{R} \dot{x}' + R^T \ddot{x}' - \dot{v}^T R^T \dot{x}' + R^T \ddot{x}' = -\dot{a}^2 + R^T \ddot{a}'$   
 $\Rightarrow R^T \ddot{a}' = \ddot{a} + \dot{a}^2$

$\Rightarrow m \ddot{x} = m \cdot R^T \ddot{x}' - m R^T \dot{R} \dot{x}' - 2m R^T \dot{R} \dot{x}' - \dot{v}$   
 $= R^T F' - m \cdot \dot{a} \cdot x - m \dot{a}^2 x - 2m \dot{a} \dot{x} - \dot{v}$

$$F = R^T F' - m \cdot \dot{a} \cdot x - m \cdot \dot{a} \cdot (v \times x) - 2m \dot{a} \dot{x} - R^T \dot{v}$$

übrige Kräfte  $\uparrow$  Zentrifugalkraft  $\uparrow$  Hin. Beschl.  
 Drehbesch.  $\uparrow$  Corioliskraft

Rakete



$\vec{p} = m \cdot \vec{v} + m_{gas} (\vec{v} + \vec{v}_{gas})$   
 $0 = \dot{\vec{p}} = \dot{m} \vec{v} + m \dot{\vec{v}} + \dot{m}_{gas} (\vec{v} + \vec{v}_{gas}) + m_{gas} (\dot{\vec{v}} + \dot{\vec{v}}_{gas})$

$= \dot{m} \vec{v} + m \dot{\vec{v}} - \dot{m} \vec{v} - \dot{m} v_{gas}$

$m \dot{\vec{v}} = \dot{m} v_{gas} \quad \dot{\vec{v}} = \frac{\dot{m}}{m} v_{gas}$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \ln \left( \frac{m(t)}{m_0} \right) \cdot v_{gas}$

$c = \dot{m} = const$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \ln \left( \frac{m_0 - c \cdot t}{m_0} \right) v_{gas}$$

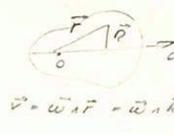
M

Starrer Körper

$r(t) = R \cdot r(\omega) \quad \dot{r} = \dot{R} r(\omega) = R R^T \dot{r}(\omega) = \omega \wedge \vec{r} = \vec{v}$

Grundgleich d. kinem. d. starren Körpers

$E_{kin} = \frac{1}{2} \int v^2 ds = \frac{1}{2} \int (\omega \wedge \vec{r})^2 ds = \frac{1}{2} \int \omega^2 R^2 - (\omega \cdot \vec{r})^2 ds$   
 $= \frac{1}{2} \omega^2 \int R^2 ds = \frac{1}{2} I \omega^2 = E_{kin}$  kin Energie



Steiner  $I = I_S + m a^2$

a Abstand v. Drehachse von Schwerpunkt

denn  $I = \int R^2 ds = \int (R+a)^2 ds = \int R^2 ds + 2a \int R ds + a^2 \int ds$   
 $= I_S + 0 + a^2 m$



Trägheitsmom.

Kugel	$I = \frac{2}{5} m a^2$
Zylinder	$I = \frac{1}{2} m a^2$
Stab	$I = \frac{1}{12} m a^2$

$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a r^2 \cos^2 \theta r^2 \sin \theta dr = \frac{8\pi}{15} a^5 = \frac{2}{5} m a^2$   
 in anderer Achsen  $\frac{1}{4} m a^2$   
 $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{1}{2} m a^2$   
 $\epsilon_{zz} = \frac{1}{2} m a^2$

kin Energie

$E_{kin} = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} \quad \vec{L} = \int \rho (\vec{r} \wedge \vec{v}) dV$

$E_{kin} = \frac{1}{2} \int dm (\omega \wedge \vec{r})^2 = \frac{1}{2} \int \vec{\omega} \cdot [ \vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{r}) ] dr = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$

Drehsatz

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

$\frac{dL}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L}$

bei  $\vec{\omega} = \text{konst}$

$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (I \vec{\omega} + \vec{L}_S)$   
 $= \frac{d}{dt} \vec{L}_S = \vec{\omega} \wedge \vec{L}_S = \vec{\omega} \wedge (I_0 \vec{\omega})$

deform. Medien

$F = \sigma \cdot A$

Normalspannung (Druck in Festkörper)

Hooke sche Gesetze

$\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{dl}{l}$

Elastizitätsmodul

$\Delta p = -\frac{1}{\kappa} \frac{dV}{V}$

Kompressibilität

Schwingungen u. Wellen

harmon. Schwingung

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad T_0 = \frac{1}{\gamma_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$

gedämpfte harmon. Schwingung

$\ddot{x} + \frac{\Gamma}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$\Gamma = \frac{\omega_0}{Q}$  Dämpfung  
 Q Q-Faktor, Kreisgüte

$2Q > 1$	unterkritische Dämpfung	$\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$
$2Q = 1$	kritische Dämpfung	$\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$
$2Q < 1$	überkritische Dämpfung	$\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$

$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2} t} \{ C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t \}$   
 $\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}$

erzwungene Schwingung

$\ddot{x} + \frac{\Gamma}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} y(t) = \sum_{\eta=1}^{\infty} a_{\eta} \cos \omega_{\eta} t$

harm. Anreg. punktl.

$\ddot{x} + \frac{\Gamma}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cdot \cos \omega t$

$x(t) = C \cdot e^{-\frac{\Gamma}{2} t} \cos(\Omega t + \varphi) + A(\omega) \cos(\omega t - \delta(\omega))$   
 $A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}} \quad \text{tg } \delta(\omega) = \frac{\Gamma \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$

Kraft zwischen 2 Punktladungen Coulomb

Elektr. Elem. Ladung  $e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ As}$   
 Elektr. Feldkonst.  $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$   
 $= \frac{10^9}{4\pi c^2} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r_{12}}$$

Elektr. Feld und Potential einer Punktladung

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{Auss}}}{q_{\text{Probe}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$V = \int_P^\infty \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

$[V] = \frac{J}{C}$   
 $[E] = \frac{N}{C}$

mehrere Punktlad.  $\rightarrow$  Superposit. Prinzip

Elektr. Feld einer homog. Kugelladung

$$\oiint \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q_{\text{inn}}$$

$$4\pi r^2 \vec{E}_r = \begin{cases} \frac{Q}{r^3} & r > R \\ \frac{Q \cdot r^3}{R^3} & r < R \end{cases} \Rightarrow \vec{E}_r = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3} r \end{cases}$$

Feld einer ebenen homog. Flächenladung

$$2 \cdot \vec{E} \cdot A = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma \cdot A \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ homogen!}$$

$\sigma$  Ladungsdichte

Feld einer gelad. Metallkugel vom Radius R

$$\vec{E}_r = \begin{cases} 0 & \text{innerhalb } r < R \\ \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} & \text{außerhalb} \end{cases}$$

Oberflächenladungsdichte  $\frac{Q}{4\pi R^2} = \sigma$

$\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  Oberfläche gilt allgem. auf. Oberfläche von Metallen

Feld im Hohlraum eines Leiters Faraday Käfig  $\vec{E} = 0$

Feld einer geladenen Geraden

$$\vec{E} \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\sigma \cdot l}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma}{r}$$

$\sigma$  Ladung pro Länge

Feld zwischen ebenen, parallelen Leiterflächen mit Potentialen  $V_1, V_2$

$\text{div } \vec{E} = 0$   
 $-\text{div grad } V = 0 \quad \Delta V = 0 \text{ Laplace Gl.}$   
 $(\Delta V = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \text{ Poisson Gl.})$

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad V(x) = A x + B \quad V(0) = V_1$   
 $\Rightarrow V(x) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{x_0} x \quad V(x_0) = V_2$

$E(x) = \frac{V_2 - V_1}{x_0} = \frac{\Delta V}{x_0} = \text{konst}$

Feld zwischen leitenden korr. Kugeln

Laplace in Polarkoord.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad V(r) = A r^2 + B$$

$r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \& \quad r = -1$

$\Rightarrow V(r) = \frac{A}{r} + B$

$V(R_1) = V_1 \quad V(R_2) = V_2$

$A = \frac{V_1 R_2 - V_2 R_1}{R_1 - R_2} \quad B = \frac{V_1 R_1 R_2 - V_2 R_1 R_2}{R_1 - R_2}$

$\vec{E}(r) = \frac{A}{r^2}$

$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta \frac{\partial V}{\partial \theta}) = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$

$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta})$

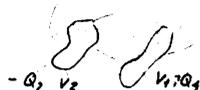
Potential einer bel. Ladungsverteil.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Potentielle Energie  
 $U(\vec{r}) = q \cdot V(\vec{r}) \quad \vec{F}(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(\vec{r})$   
 pot. Energie / Potential

Kapazität einer bel. Konstell.

$$C = \frac{|Q|}{|V_1 - V_2|}$$



$$|C| = \text{Farad} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}}$$

$$\begin{aligned} Q \cdot C &= \frac{U \cdot Q}{U} = \frac{Q}{1} \\ &= \int \vec{E} \cdot d\vec{s} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{1}{\int \vec{E} \cdot d\vec{s}} \\ &= \frac{\epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{s}} \end{aligned}$$

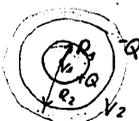
Kugelkondensator

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$\Delta V = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow C = \frac{4\pi \epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$



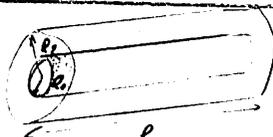
Koaxialkabel

$$2\pi r \cdot l \cdot E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

$$E(r) = \frac{1}{2\pi \epsilon_0 l r} Q$$

$$V = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$



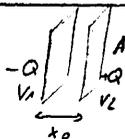
Plattenkondensator

$$A E(x) = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

$$E(x) = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

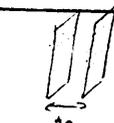
$$V(x) = \frac{Q x_0}{\epsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{x_0}$$



Arbeit Energie im Plattenkondensator

$$W = \int_0^Q V dQ = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2$$



$$\left. \begin{aligned} V &= E \cdot x_0 \\ C &= \epsilon_0 \frac{A}{x_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow W = \frac{\epsilon_0 E^2 x_0 A}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot \text{Volumen}$$

Ladungsdichte d. elektr. Feldes:  $\frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2 = w$

Energie d. Feldes einer Punktladung

Radius sehr klein

$$E(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 = \frac{1}{32 \pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{r^4}$$

$$W = \frac{1}{8 \epsilon_0} \frac{Q^2}{r_0}$$



$$4\pi \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^4} r^2 dr = \frac{4\pi}{r_0}$$

Ansichtung d. Platten eines Plattenkondensators

1. Ladung Q konstant

$$dW_{\text{mech}} = F dx = dW_{\text{elek}} = d \frac{Q^2}{2C} = \frac{dx}{\epsilon_0 A} \cdot Q^2 = dx \cdot \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 A} \Rightarrow F = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 A}$$

2. Potentialdiff ΔV konst

$$dW_{\text{mech}} = F dx = dW_{\text{elek}} = d \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{x_0} \cdot V^2 \right) = \frac{\epsilon_0 A}{2} \frac{V^2}{x^2} \cdot dx \Rightarrow F = \frac{\epsilon_0 A}{2} \frac{V^2}{x^2}$$

Energie d. Feldes einer Kugelladung

$$W = \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 r^2 dr = \frac{Q^2}{8 \epsilon_0} \cdot \frac{3}{2} \pi$$



Elektrostatik

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

$$V = \int_0^{\rho} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$U = q \cdot V$$

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon \cdot \frac{Q}{V}$$

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2$$

$$\vec{E} = \operatorname{grad} V$$

$$\Delta V = 0$$

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho$$

$$w = \frac{Q^2}{2C}$$

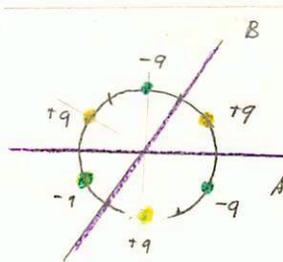
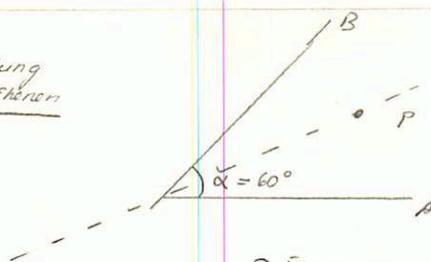
Elektrodynamik

Maxwell'sche gl'n

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

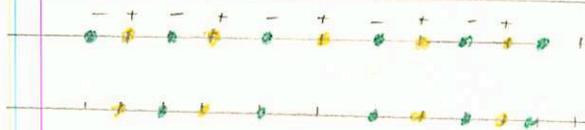


Kraft auf Ladung zwischen zwei Ebenen



Einführung von Spiegelladungen, ändert Ladungskonfiguration auf A und B nicht

Arbeit zum Entfernen eines Ladungsglieds ins Unendliche



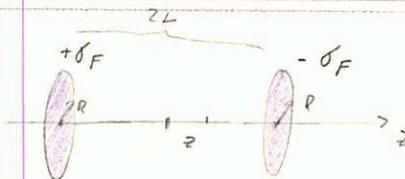
$1q \rightarrow \infty$

U vorher 
$$U = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} q^2 \frac{(-1)^n}{|n| \cdot a} = \frac{2q^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{2q^2}{a} \ln(2)$$

Unachtl.  $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0$

$\rightarrow \Delta U = \frac{2q^2}{a} \ln(2)$  geleistete Arbeit

Potenz. und E Feld von 2 Platten



$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_{F_A} \frac{\delta_F dF}{\sqrt{z^2 + r^2}} - \int_{F_B} \frac{\delta_F dF}{\sqrt{z^2 + (z-L)^2}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_0^R \frac{\delta_F 2\pi r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} - \int_0^R \frac{\delta_F 2\pi r dr}{\sqrt{z^2 + (z-L)^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} \delta_F \left\{ \sqrt{z^2 + (z+L)^2} - \sqrt{z^2 + (z-L)^2} \right\} \Big|_0^R = \frac{\delta_F}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + (z+L)^2} - \sqrt{R^2 + (z-L)^2} \right] \begin{cases} z > L \\ -2z \\ z < L \end{cases}$$

Elektronenstrahl

$\frac{1}{2} m v^2 = e \cdot U_0$

U Beschl. Spannung

Teilchen in E und B Feld

E, B

$m \cdot \dot{\vec{v}} = e [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]$

$|\cdot \vec{v}$

$m \cdot \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = e [\vec{E} \cdot \vec{v} + 0]$

$\frac{m}{2} \frac{d|\vec{v}|^2}{dt} = e \vec{v} \cdot \vec{E}$

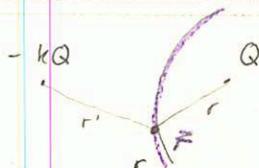
Difgl. für  $|\vec{v}|$  unabh. von  $\vec{B}$

Klassischer Elektronenradius

Arbeit um Leitende Kugel (Radius R) mit Ladung Q zu versehen

$$\int_R^{\infty} \frac{E^2 \epsilon_0}{2} dr = \int_0^Q \left( \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \right)^2 \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 R} = mc^2$$

Äquipotentialfläche



$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{kQ}{4\pi\epsilon_0 r'} = 0$

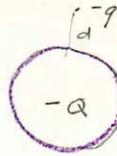
$\rightarrow r' = k \cdot r$  Kugel (Apollonius)

Auftrieb von elektr. geladenem Flugzeug

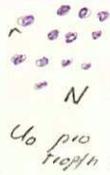


$$F = \frac{q \cdot Q}{R^2} - \frac{q^2}{(2d)^2}$$

Spiegelladung



Hg Tropfchen



$$R^3 = N \cdot r^3$$

$$R = \sqrt[3]{N} \cdot r$$

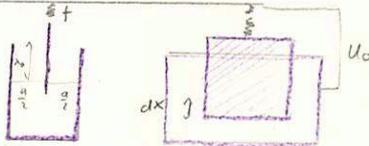
$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$U_{ges} = \frac{NQ}{4\pi\epsilon_0 r}$$

U gesucht

$$U = \frac{NQ}{4\pi\epsilon_0 \sqrt[3]{N} r} = U_0 \cdot N^{-2/3}$$

Elektrostat. Voltmeter



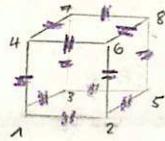
Von Batterie gel. Platte / in kond. Elektroden bewegt

$$U_0 \cdot A \cdot Q = \frac{1}{2} U_0^2 \cdot A \cdot C + \frac{1}{2} f \cdot (Ax)^2$$

$$U_0^2 \cdot A \cdot C = \frac{1}{2} U_0^2 \cdot A \cdot C + \frac{1}{2} f \cdot (Ax)^2$$

$$A \cdot C = \frac{4\epsilon_0 b}{a} A \cdot x$$

Kapazität von Kondensatorwürfel



Eden 2,3,4 symmetrisch  
5,6,7

} => Teil gleicher Potential: können verbinden

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{3C} + \frac{1}{6C} + \frac{1}{3C}$$

Potentialfeld einer Punktladung bei Vorhandensein einer geladenen Metallkugel



Betrachten Kugel als Apolloniuskugel  
=> können Spiegelladung Q2 einführen

$$U=0 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 l^2}$$

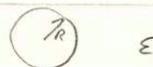
Driftgeschw.keit von Elektronen

$$I = \frac{Q}{t} \quad j = \frac{Q}{t \cdot F} \quad j \text{ bekannt}$$

$$Q = U_0 \cdot t \cdot F \cdot n \cdot e \quad j = n \cdot e \cdot v_d$$

$$\Rightarrow v_d = \frac{j}{n \cdot e}$$

Leitende Kugel in Flüssigkeit mit Dielekt. konst. ε



Arbeit, um Kugel Q auf Kugel zu bringen, wenn eingetaucht

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{h} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon \epsilon_0}$$

$$4\pi r^2 \epsilon E \quad V(r) = -\frac{Q}{4\pi r \epsilon \epsilon_0}$$

$$W = \int U(r) dQ = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon \epsilon_0}$$

ohne Eintauch  $W = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0}$

$$\Delta W = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) =$$

Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \Phi_B$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}$$

Reziprozitätsgesetz

$$V_2 = -L_{12} \dot{I}_1$$

$$V_1 = -L_{21} \dot{I}_2 \quad L_{12} = L_{21}$$

Selbstinduktion

$$V = -L \cdot \dot{I}$$

$$L = \frac{\int \vec{B} \cdot d\vec{f}}{I} = \frac{\Phi}{I}$$

Kapaz. Selbstind.

$$L \cdot C^* = \frac{1}{c^2}$$

Solenoid  $L = \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2 A}{l}$

Ringspule  $L = \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2 A}{2\pi r}$

Koaxialkabel  $L = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

Energiedichte

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Energie

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint B^2 dV$$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad \text{Solenoid}$$

# ES

## Elektrostatik

$$D(\vec{r}) = \epsilon_0 E(\vec{r}) \quad \text{dielektr. Verschiebung}$$

Gauss  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Winkel  
frei  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{rot} \vec{E} = 0$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = V(a) \quad \text{Potential} \quad \vec{E} = -\text{grad} V$$

$$q \cdot \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = U(a) \quad \text{Potent. Energie} \quad q \cdot \vec{E} = \vec{F} \quad \text{Coulomb}$$

$$\Delta V = \nabla \cdot \nabla V = \text{div grad} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Laplace  $\Delta V = 0$   
Poisson  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \quad \text{Potential}$$

Coulomb  $F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}}{r_{12}}$

Kondens  $C = \frac{Q}{V}$

Kugelkond.  $C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$  Zylinderkond.  $\frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$   
(Koaxialkabel)  
Plattenkond.  $C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{x_0}$

Energie.dichte  $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint E^2 dV \quad \text{Potent. Energie in E Feld}$$

in Plattenkond  $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 x_0 \cdot A$

elektr. Dipolmom.  $\vec{p} = q \cdot 2a \vec{e}$

Drehmoment  $\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - (r^2)\vec{p}}{r^5} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{Feld d. elektr. Dipols}$$

Polarisierk.  $\vec{P}_{ind} = \epsilon \cdot \vec{E}$

Polarisation  $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$   
vektor

# ED

## Elektrodynamik

Strom  $\int \vec{i} \cdot d\vec{l} = I \quad \text{kontin. gl.} \quad \oiint \vec{i} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \iiint \rho dV = \dot{Q} \quad \text{div} \vec{i} = -\frac{d}{dt} \rho$

Ohm  $R = \frac{V}{I} = \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int \sigma \vec{E} \cdot d\vec{f}} \quad \vec{i} = \sigma \cdot \vec{E} \quad \text{Lorentz kraft} \quad \vec{F} = q \cdot \vec{B} \wedge \vec{v}$

Elektr. Kraft  $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = V = R \cdot I \quad \text{Leistung} \quad P = V \cdot I = R \cdot I^2$

Impedanz  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{i} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{i} \quad \text{rot} \vec{A} = \vec{B} \quad \phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$

Quellenfrei  $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0 \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{Vektorpotential} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{i}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$

Laplace  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \wedge \vec{s}}{s^3} \quad \text{Biot Savart} \quad \vec{F} = I \cdot \int d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad \text{Kraft auf Stromföhrenleiter}$

magn. Dipolmoment  $\vec{\mu} = I \cdot \int d\vec{l} = I \cdot \vec{F} \quad \text{Drehmom} \quad \vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} \quad \text{Feld d. magn. Dipols} \quad \vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - (r^2)\vec{m}}{r^5}$

2 Ringspulen übereinander

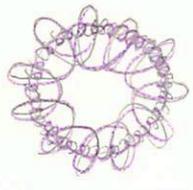
$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi r} N_1 I_1 \quad \Phi_1 = S_1 \cdot B_1$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r} N_2 I_2 \quad \Phi_2 = S_2 \cdot B_2$$

$$V_2 = -N_2 \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} = -N_2 S_1 N_1 \frac{\mu_0}{2\pi r} \dot{I}_1$$

$$V_1 = -N_1 \cdot \frac{d\Phi_2}{dt} = -N_1 S_2 N_2 \frac{\mu_0}{2\pi r} \dot{I}_2$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi r} N_1 N_2 S_1$$

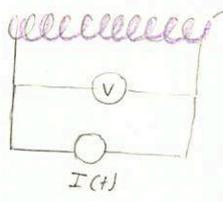


	innere Sp	äußere Sp
Windzahl	$N_1$	$N_2$
Querschnitt	$S_1$	$S_2$
Länge	$2\pi r$	$2\pi r$

Selbstinduktion

$$V = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$[L] = \frac{V \cdot sec}{Am} = \text{Henry}$$



widerstand vernachlässigt

$$\begin{aligned} \Phi &\sim I \\ \frac{d\Phi}{dt} &\sim \dot{I} \\ -V &\sim \dot{I} \end{aligned}$$

Selbstinduktion einer Ringspule

$$B(r) = \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I(r)}{2\pi r} \quad NB \cdot S = \Phi$$

$$V = - \underbrace{\mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{SN^2}{2\pi r}}_L \frac{dI}{dt}$$

$$L = \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{SN^2}{2\pi r}$$

$$\Phi = L \cdot I$$



S Fläche  
l Länge =  $2\pi r$

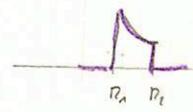
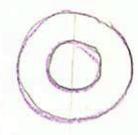
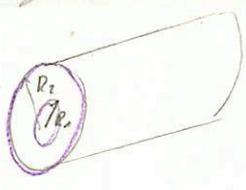
gilt auch für langes Solenoid  
 $\mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2 A}{l}$   
ergibt sich zur Berechn. d. Selbstind.

Selbstinduktion d. koaxialen Leitung

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \mu_0 I & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r \cdot dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot l \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \quad \text{da } \Phi = L \cdot I$$



Zusammenhang Kapazität - Selbstinduktion

Koaxkabel  $L^* = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$  ind. pro Längeneinheit

$C^* = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$  Kapaz. pro Längeneinheit

$L^* \cdot C^* = \mu_0 \cdot \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

$L^* \cdot C^* = \frac{\mu \cdot \epsilon}{c^2}$  mit Materialk.

$L^* \cdot C^* = \frac{1}{c^2}$  gilt allgemein

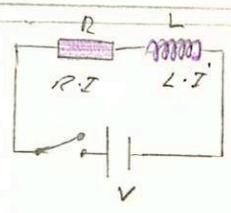
Ein und Ausschalten d. Selbstinduktion  
R-L Schaltkreis

$V = R \cdot I + L \cdot \dot{I} \quad I(0) = 0$  Einschalten

$0 = R \cdot I + L \cdot \dot{I} \quad I(0) = \frac{V_0}{R}$  Ausschalten

Lösungen: Einschalten:  $I(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

Ausschalten:  $I(t) = \frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$



(vgl. R-C Glied)

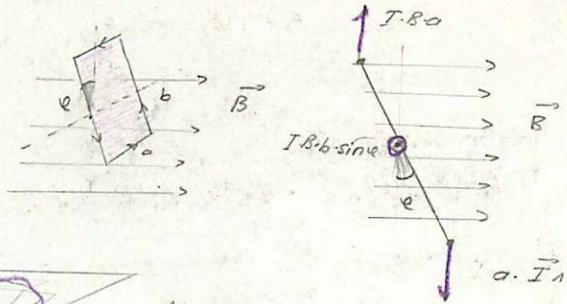
$Q(t) = C \cdot V (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

$Q(t) = C V e^{-\frac{t}{RC}}$

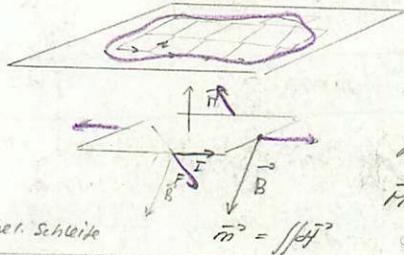
Kraft auf rechteckförmige Leiterschleife im homog.  $\vec{B}$ -Feld

Drehmoment  $M = a \cdot b \cdot I \cdot \sin \alpha \cdot B$

$\vec{m} := a \cdot b \cdot I \cdot \vec{n}$  magn. Dipolmoment  
 $\vec{H} = \vec{m} \wedge \vec{B}$



allg. ebene geschlossene Leiterbahn



Approximation durch rechteckförmig Leiterschleife, deren eine Seite senkrecht auf  $\vec{B}$  steht

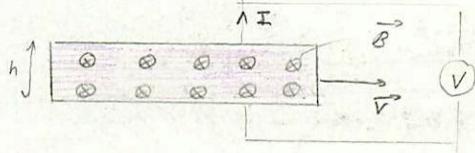
$\vec{M}_D = I \cdot a \cdot b \cdot \vec{n} \wedge \vec{B}$   
 $\vec{H} = \vec{m} \wedge \vec{B}$  wobei  $\vec{m} = F \cdot \vec{n}$  (Fläche)

nach allg. hel. Schleife

$\vec{m} = \iint \vec{j} \wedge \vec{r} \, dV$

Hall-Effekt

$q \cdot \vec{E} = q \cdot v \cdot B$  gleichgew.  
 $V = \vec{E} \cdot h = B \cdot v \cdot h$



Induktionsgesetz von Faraday:

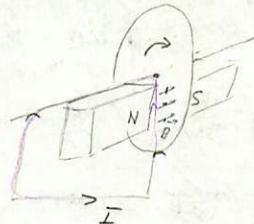
$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$       $\Phi_B = \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{A}$       $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$   
 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{A}$       $\text{rot } \vec{E} = - \frac{d}{dt} \vec{B}$

Bei Hall Effekt:  
 $\Phi_B = h \cdot l \cdot B$   
 $\dot{\Phi}_B = h \cdot l \cdot \dot{B}$   
 $= h \cdot v \cdot B$

Barlow'sches Rad

Übertragung d. Lorentzkraft auf Rad

zusätzliche Effekt: Wirbelströme

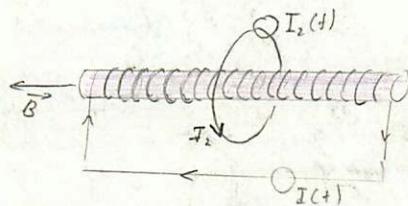


$\vec{F} = \vec{I} \wedge \vec{B} \cdot \ell$



Induktion

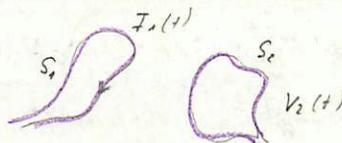
$\Phi_B = F \cdot N \cdot I \cdot l$   
 $\dot{\Phi}_B = F \cdot N \cdot \dot{I} \cdot l$   
 $\mathcal{E} = - \frac{F \cdot N \cdot \dot{I} \cdot l}{l}$



Lenz'sche Regel  
 $\vec{B}$  Feld d. induz. Stromes gegen  $\vec{B}$  Feld des stat. Relais gerichtet

gegenseit. Indukt.  $L_{12}$

$V_2 = - \frac{d\Phi}{dt} = - L_{12} \frac{dI_1}{dt}$   
 $V_1 = - L_{21} \frac{dI_2}{dt}$



$L_{12} = L_{21}$  Reziprozitätsgesetz

$\Phi_{12} = L_{12} I_1$       $\Phi_{21} = L_{21} I_2$

müssen nun zeigen  $I_2 = I_1 \Rightarrow \Phi_{21} = \Phi_{12}$

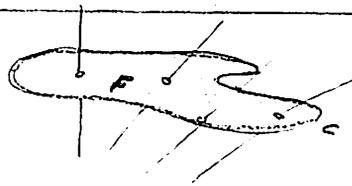
$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_2$       $dH_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_{12}^2} d\vec{l}_1$       $\Rightarrow \Phi_{12} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S_2} d\vec{l}_2 \cdot \int_{S_1} \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}}$

analog  $\Rightarrow \Phi_{21} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S_1} d\vec{l}_1 \cdot \int_{S_2} \frac{d\vec{l}_2}{r_{12}}$

Ampèresches Durchflutungsgesetz

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot \int_F \vec{i} \cdot d\vec{f}$$

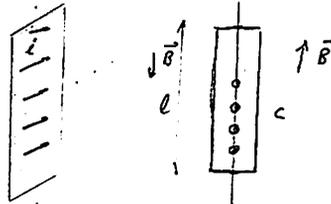
$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{i}$$



$\vec{B}$  Feld einer stromdurchflossenen Platte

$$B \cdot 2l = l \cdot i \cdot \mu_0$$

$$\rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{2}$$



$\vec{B}$  Feld einer langen eng gewickl. Spule

innw.  $B(r) \cdot h = \mu_0 \cdot j \cdot h$

$$\rightarrow B = \mu_0 \cdot j = \mu_0 \frac{N \cdot I}{L} \quad \# \text{ Windungen pro Längeneinheit}$$



$\vec{B}$  Feld einer Ringspule

$$2\pi r \cdot \vec{B} = \mu_0 \cdot N \cdot I$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{N \cdot I}{r} \quad \text{Tesla} \quad \text{Vs m}^{-2}$$



Quellenfreiheit

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

Vektorpotential  $\vec{A}$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \text{rot } \vec{B} = \text{rot } \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})}_0 - \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A}}_{\Delta \vec{A}} = \mu_0 \cdot \vec{i}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{A} = -\mu_0 \cdot \vec{i} \quad (\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint \frac{\vec{i}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv')$$

$\vec{B}$  Feld eines linearen Leiters

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \wedge \vec{s}}{s^2} \quad \vec{s} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \wedge \vec{s}}{s^2} \quad \text{Formel von Laplace}$$



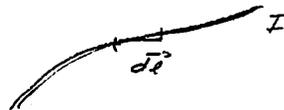
$\vec{B}$  Feld im Zentrum eines Kreisstroms

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \int \frac{d\vec{l} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2r}$$



Kraft auf stromführenden Draht (Biot-Savart Kraft)

$$d\vec{F} = \underbrace{q \cdot \vec{v}}_I \cdot n \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B} = I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$$



elekt. Strom:

Ladungsdichte  $\rho = \epsilon_0 \cdot \delta(r-r_0)$

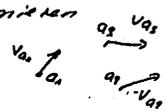
$\rho$  stetig verteilbar

Geschw. feld  $\vec{v} = \epsilon \vec{v}_0 \cdot \delta(r-r_0)$

$\vec{v}$  stetig verteilbar

Stromdichtefeld  $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$

Strom  $\iint_F \vec{j} \cdot d\vec{l} = I$



Kontinuitätsgleichung

$$\oiint_A \vec{j} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV$$

$$\text{div } \vec{j} = - \frac{d}{dt} \rho$$

Ohm'scher Gesetz

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$I = \iint \sigma \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$V = R \cdot I \Rightarrow R = \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\iint \sigma \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

Elektromot. Kraft.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q_0} \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = V = R \cdot I$$

Leistung

$$P = V \cdot I = R \cdot I^2$$

RC-Stromkreis

Laden:  $\mathcal{E} = V_R + V_C$   
 $= R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$

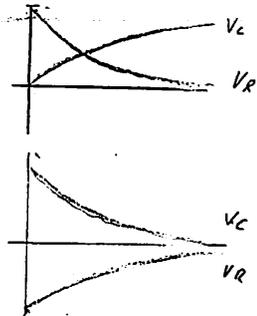
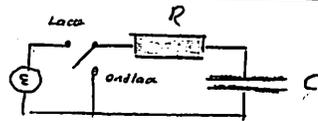
$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad Q(0) = 0$$

$$\Rightarrow Q = C \cdot \mathcal{E} - C \cdot \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

entladen  $0 = V_R + V_C$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0 \quad Q(0) = \mathcal{E} \cdot C$$

$$\Rightarrow Q = C \cdot \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

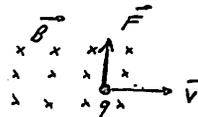


station. Stromverh. in homog. Ohmsche Leiter

kontin. gl.  $\text{div } \vec{j} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0$

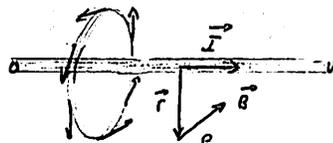
Kraft auf bewegte Probeladung

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$



$\vec{B}$  Feld eines geraden Leiters

$$B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \frac{\vec{I} \wedge \vec{r}}{|\vec{I} \wedge \vec{r}|} \quad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$$

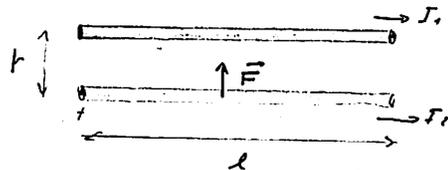


$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \\ &= 1.2566 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2} \end{aligned}$$

Kraft zwischen parallelen Leitern

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_1 I_2 \cdot l$$

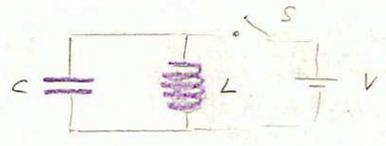
denn  $F = \frac{q \cdot \vec{v} \cdot n \cdot l \cdot B_2(r)}{l}$   
 $= I_2 \cdot l \cdot B_2(r) = \frac{I_1 I_2 \cdot l}{2\pi r}$



Der LC Parallelschwingkreis

$$L \cdot \ddot{Q} + C \cdot \dot{Q} = 0 \quad Q(0) = V \cdot C \quad \dot{Q}(0) = 0$$

Lösung  $Q(t) = V \cdot C \cdot \cos \left| \frac{C}{L} \cdot t \right|$



Energie d. magnet. Feldes

Energie zum Aufbau d. Feldes:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N}{2\pi r} I \quad L = \mu_0 \cdot \frac{SN^2}{2\pi r}$$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0}{4\pi r} S N^2 I^2 = \frac{\mu_0}{4\pi r} S N^2 \frac{B^2 (2\pi r)^2}{\mu_0^2 N^2}$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \frac{S \cdot 2\pi r}{V} B^2$$

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \text{Energiedichte}$$

(vgl.  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ )

$$dW = -V \cdot dQ = L \cdot \frac{dI}{dt} \cdot I dt$$

$$W = \int_0^I dW = \frac{1}{2} L I^2$$



S Fläche  
2πr Länge

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \text{für lineare Materialien}$$

magn. Eigenschaften d. Materie

$\vec{m}_i$  Magnetisierung der atom. elekt. Dipole

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}_i}{AV}$$

der atom. elekt. Dipole

$$\vec{m} = \frac{e}{2m} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{B}_{ext} = 0$$

$m_i = 0$  diamagn.

$m_i > 0$  paramagn.

$m_i > 0$  ferromagn.

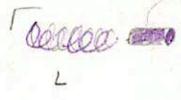
(vgl.  $\vec{E}_{ext} = 0$ )  
 $p = 0$  dielekt.  
 $p > 0$   $\vec{P} = 0$  paraelektr.  
 $p > 0$  Ferroelektr.

paramagn.  $\mu > 1$   
 diamagn.  $\mu < 1$

in inhomog. Feld

paramagn. } ziehen nach auf grosser Feldstärke  
 diamagn. } ziehen nach auf kleiner Feldstärke

Probestück



Probestück in L sonst

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad w = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$\mu > 1 \rightarrow$  Probestück wird hineingezogen  
 $\mu < 1 \rightarrow$  Probestück herausgezogen

Lorentztrafo d. Elektromagn. Wellen

$$E_x' = \gamma(v) (E_x + v \cdot B_z)$$

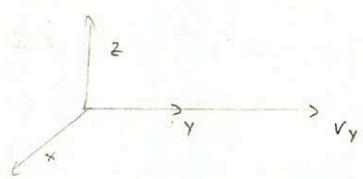
$$B_x' = \gamma(v) (B_x - \frac{v}{c^2} E_z)$$

$$E_y' = E_y$$

$$B_y' = B_y$$

$$E_z' = \gamma(v) (E_z - v \cdot B_x)$$

$$B_z' = \gamma(v) (B_z + \frac{v}{c^2} E_x)$$



Elektromagn. Wellen

$$\left| \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \end{array} \right|$$

$$\text{rot } \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot c^2 = \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

$$-\text{rot } \text{rot } \vec{E} \cdot c^2 = \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = +\Delta \cdot \vec{E} \cdot c^2 \quad \text{Wellengl.}$$

$$\text{rot } \text{rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \cdot \vec{E} = -\Delta \cdot \vec{E}$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\text{rot } \frac{d\vec{E}}{dt} = -\frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} \Rightarrow c^2 \text{rot } \text{rot } \frac{d\vec{E}}{dt} = -\frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

$$c^2 \cdot \Delta \vec{B} = \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

ED

Die Maxwell'schen Gleichungen

$$\vec{i} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \text{rot } \vec{B} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Amperischer Durchfl. gesetz} \\ \text{Kontinuitätsgl.} \end{array} \right\}$$

$$\text{div } \vec{i} = -\frac{d\rho}{dt}$$

$$\text{div } \vec{i} = -\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \underbrace{\text{div rot } \vec{B}}_0 - \epsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0} \rho}_{\text{div } \vec{E}} = \text{div } \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} + \text{div } \epsilon_0 \cdot \frac{d\vec{E}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{i} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \quad \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{i} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

$$\begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \end{array}$$

Vakuum

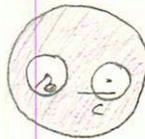
$$\begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \end{array}$$

magn. Dipol

$$\vec{\mu} = I \cdot \int_F d\vec{l} = I \cdot \vec{F}$$

$$\vec{D} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{m}}{r^5} \quad \rightarrow \text{elektr. Dipol}$$

$\vec{B}$  Feld von folgendem Leiter im Zentrum d. Mehrleit

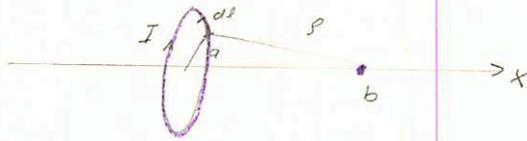


Stromdichte  $\vec{j}$

Superpositionsprinzip!

$$\vec{B} = \vec{B}_a - \vec{B}_c = \mu_0 \cdot \frac{\pi c^2 j}{2\pi c} - \mu_0 \frac{\pi b^2 j}{2\pi 2c} = \mu_0 j \left( \frac{c}{2} - \frac{b^2}{4c} \right)$$

$\vec{B}$  Feld eines Kreisstroms

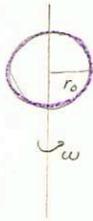


Laplace:

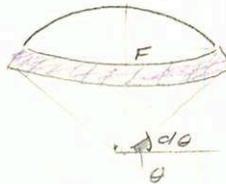
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a d\phi \cdot \vec{j} \cdot \frac{a}{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot 2\pi a^2 \cdot \frac{1}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

magn. Moment und  $\vec{B}$ -Feld einer rotierenden Kugelladung



$\sigma$  Oberflächenladungsdichte



Ladung d. Ringfläche:  $dQ = \sigma \cdot 2\pi r_0^2 \cos\theta d\theta$

Ringstrom  $dI(\theta) = dQ \cdot \frac{\omega}{2\pi}$   $F = \pi r_0^2 \cos^2\theta$

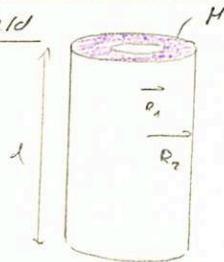
magn. Moment  $dM = dI \cdot F$

$$= \sigma 2\pi r_0^2 \cos\theta \cdot \pi r_0^2 \cos^2\theta$$

$$\int_0^\pi \cos^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$$

$$M = \sigma 2\pi^2 r_0^4 \frac{4}{3}$$

$\vec{B}, \vec{H}$  Feld

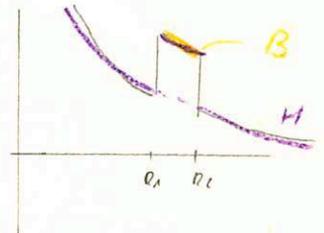


innen: Leiter mit Strom  $I$

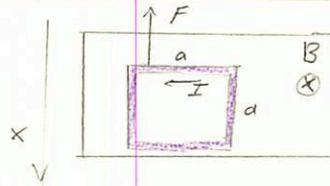
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \vec{j} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B = \mu \cdot H$$



Federer Rahmen



$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (B \cdot a(a-x))$$

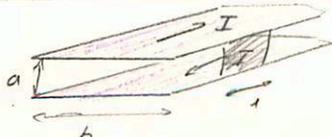
$$= +B \cdot a \dot{x}$$

$$I = \frac{U}{R} \quad F = I \cdot a \cdot B$$

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot g - \frac{a \cdot B \cdot B \cdot a \cdot \dot{x}}{R}$$

$$\ddot{x} + \frac{a^2 B^2}{Rm} \dot{x} = g$$

Selbstinduktion einer Doppelbandleitung



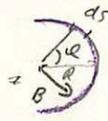
Kapaz. pro Längeneinheit  $\epsilon_0 \cdot \frac{b}{a}$

$B = \frac{\mu_0 I}{b}$  Giorgi:  $L^* = \frac{I}{\Phi} = \underline{\underline{\frac{\mu_0}{b}}}$

$$\Phi = \mu_0 \cdot \frac{\mu_0 I}{b} = \mu_0 \frac{I a}{b}$$

$$\Rightarrow L^* \cdot C^* = \frac{1}{c^2}$$

B Feld eines Halbzylinders

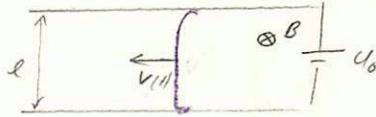


$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi R} dI = \frac{\mu_0}{2\pi R} I \frac{d\alpha}{\pi}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\sin\alpha, -\cos\alpha, 0) d\alpha$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (0, -2, 0)$$

Linearmotor



$U_0$  ist erreicht, wenn  $U_F = U_0$

$$U_F = \dot{\Phi} = B \cdot l v$$

$$\rightarrow v_d = \frac{U_0}{l B}$$

Magnetfeld & zu runde Kupferplatte

$$\vec{B}(r) = \alpha \cdot r$$

Welche Leistung wird in d. Platte in Wärme umgesetzt?



$$L = \frac{V \alpha^2 R^2}{8 \rho}$$

$$U(r) = \alpha \cdot r^2 \pi$$

$$R = \frac{2\pi r}{d \rho}$$

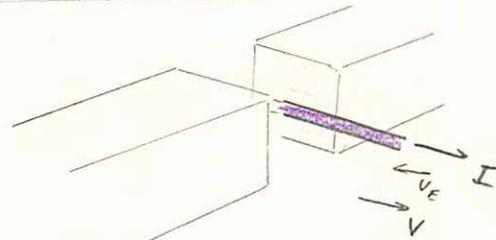
$$dI = \frac{\alpha r^2 \pi}{2\pi r \rho} d r = \frac{r \alpha d}{2 \rho} d r$$

$$dL = U \cdot dI = \frac{\alpha^2 r^3 \pi}{2 \rho} d r$$

$$L = \int_0^R \frac{\alpha d}{2 \rho} r^3 d r = \frac{\pi \alpha^2 d R^4}{8 \rho}$$

Kraft auf bewegten Leiter

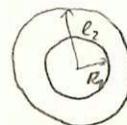
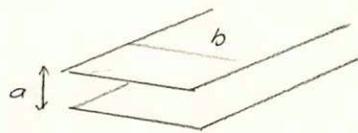
welche Kraft erfährt der Draht, wenn  $v = -v_E$



Driftgeschwindigkeit  $v_E$   
Draht wird mit  $v$  bewegt.

Elektronen ruhen jedoch positive Ladungsträger bewegt, d.h. gleiche Kraft wie auf unbewegte Leiter

Wellenwiderstände für Band und Koaxkabel



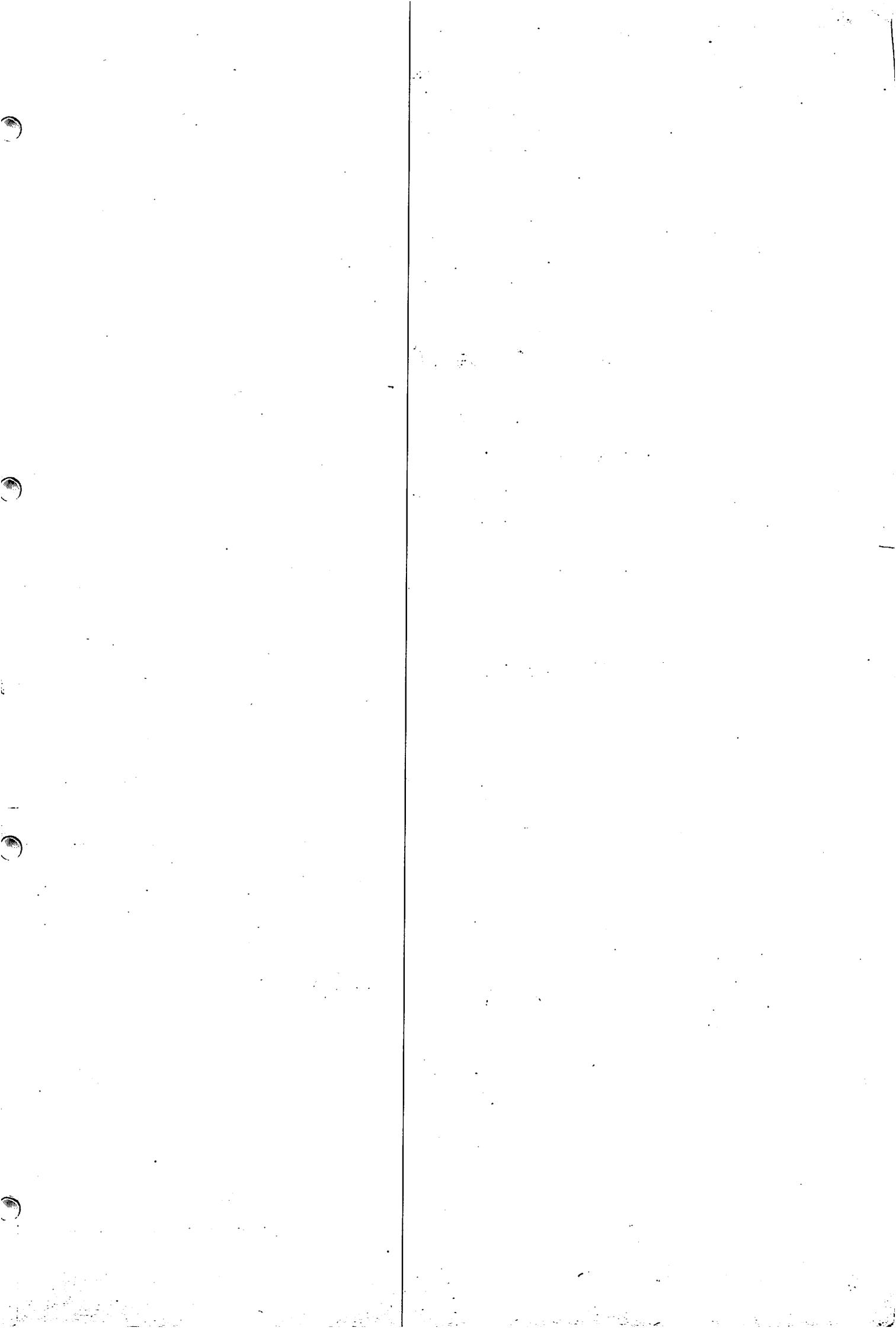
$$Z_w = \sqrt{\frac{L^x}{C^x}}$$

$$C^x = 2\pi \epsilon_0 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$C^x = \epsilon_0 \cdot \frac{b}{a}$$

$$L^x = \frac{\mu}{c^2 C^x} \quad \sqrt{\frac{L^x}{C^x}} = \sqrt{\frac{\mu}{c^2 C^x}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0 b}}$$

$$Z_w = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\ln R_2/R_1}{2\pi}$$

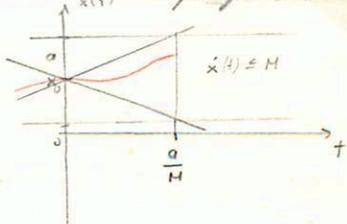


Diagl  
Skem

$$\begin{aligned} X \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} \\ \dot{x} = f(x) \quad f \in C^1(D, \mathbb{R}^n) \quad r \geq 1 \\ x(0) = x_0 \in D \end{aligned}$$

Fundsetz

$$\begin{aligned} B_0(x_0) \subseteq D \quad f \in C^1(B_0, \mathbb{R}^n) \quad a \geq 0 \\ \|f\| \in M \text{ in } B_0(x_0) \\ \Rightarrow \exists! x(t) \text{ Lösung mit } x(0) = x_0 \\ \text{für } |t| \leq \frac{a}{M} \quad x(t) \in B_0(x_0) \end{aligned}$$



wie verhält sich das System über lange Zeiten?  
 $R = \{t, x\} \mid |t| \leq \frac{a}{M}, \|x - x_0\| \leq a\} \subseteq \mathbb{R} \times D$   
 $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (t, x), (t, y) \in R$   
 existiert, da  $f \in C^1$  und  $R$  kompakt

$$\begin{aligned} B_0(\xi) \subseteq D \quad x_0 \in B_0(\xi) \\ f \in C^1(B_0(\xi), \mathbb{R}^n) \quad \|f\| \in M \text{ in } B_0(\xi) \\ \Rightarrow \exists! x(t) \text{ Lösung mit } x(0) = x_0 \\ \text{für } |t| \leq \frac{a}{2M} \quad x(t) \in B_0(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \\ Ax = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E = \{x \in C([0, a], \mathbb{R}^n) \mid \|x\| \leq a\} \\ \forall t \in [0, a] \\ d(x, y) = \max_{t \in [0, a]} \|x(t) - y(t)\| \end{aligned}$$

Fundsetz 2

$$\begin{aligned} f \in C^1(B_0(\xi), \mathbb{R}^n) \quad r \geq 1 \\ \Rightarrow x(t, x_0) \in C^1(I \times B_0(\xi), \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

$A: E \rightarrow E$  Kontraktion  
 $\|Ax(t) - Ay(t)\| \leq \int_0^t M \|x(s) - y(s)\| ds \leq M \frac{a}{M} \|x - y\| \leq a \|x - y\|$   
 $d(Ax, Ay) \leq \max_{t \in [0, a]} e^{-\alpha t} \int_0^t \|f(s, x) - f(s, y)\| ds$   
 $\leq \max_{t \in [0, a]} e^{-\alpha t} L \int_0^t \|x(s) - y(s)\| ds$   
 $\leq \max_{t \in [0, a]} e^{-\alpha t} L \int_0^t e^{\alpha s} d(x, y) ds$   
 $= \max_{t \in [0, a]} L \cdot e^{-\alpha t} \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} d(x, y) \leq \frac{L}{\alpha} d(x, y)$   
 setze  $\alpha > L$

Beiw F2

$I$  auch mit Kontraktion  
 $E = \{x \in C^1(I \times B_0(\xi), \mathbb{R}^n) \mid I = (t^-, t^+) \subseteq [\frac{a}{2M}, \frac{a}{2M}]\}$   
 Maximallänge d. Existenz  
 $d(x, y) = \sup_{t \in I} \|x(t) - y(t)\|$

Fundsetz 3

$$\begin{aligned} x(t) = x^t(x_0) \in D \quad t^+ < \infty \\ K \subseteq D \text{ kompakt} \\ \Rightarrow \exists \delta = \delta(K, x_0, D) > 0 \quad x(t) \in D - K \quad t^+ - \delta < t < t^+ \\ x(t) \text{ strebt für } t \rightarrow t^+ \text{ an den Rand von } D \end{aligned}$$

Falls nicht  $\exists K \subseteq D$  kompakt  $\exists t_j \rightarrow t^+$   
 $x(t_j) \in K \quad x(t_j) =: x_j$   
 $a := \frac{1}{2} \text{dist}(D, K) \quad B_0(x_j) \subseteq D$   
 $\Rightarrow \exists$  Lösung für  $|t - t_j| \leq \frac{a}{2M}$  (Fund 2)  
 weh  $M = \max_{x \in K} \|f\|$  unabh. von  $j \rightarrow t^+ - \infty$



kur F3

$$\begin{aligned} D = \mathbb{R}^n \\ t^+ = \infty \Rightarrow \|f(t, x)\| \rightarrow \infty \quad t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

kur F3

$$\begin{aligned} D = \mathbb{R}^n \\ \|f(x)\| \in C^1 \Rightarrow (t^+, t^+) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$I$  indiv.  $t = t^+ = \infty$

$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \rightarrow \infty$   
 andererseits gilt für  $x(t) = e^t(x_0)$   
 $\frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 = 2(x(t), \dot{x}(t)) = 2(x(t), f(x(t))) \leq 2|x(t)| \cdot C(1+|x(t)|)$   
 $\leq 4C(1+|x(t)|)^2$   
 $\frac{d}{dt} z(t) = 4C(1+z) \text{ mit Lösung } z(t) = (1+z_0)e^{4Ct} - 1$   
 $\|x(t)\|^2 \leq (1+|x_0|)^2 e^{4Ct} - 1 \quad x(t) \text{ beschränkt } (\forall t) \quad \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} = f_j(t, x_1, \dots, x_n) \quad j=1, \dots, n \quad \text{nicht aut. System} \\ \sim \frac{dx_0}{dt} = 1 \quad \frac{dx_j}{dt} = f_j(x_0, \dots, x_n) \quad \text{aut. System} \end{aligned}$$

nicht aut. System  
 $\sim$  aut. System

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} = g(t, y) \frac{dy}{dt} \\ n x_0 = t \quad x_j = y_j \quad x_{j+n} = \frac{dy_j}{dt} \\ \frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{Vektorfeld zu dem der Fluss } \varphi^t \text{ mit Erhaltung } \varphi^t(x_0) \text{ gehört} \end{aligned}$$

Systeme höherer Ordnung  $\sim$  System 1. Ordn.  
 Phasenraum

O. Bel. A können wir autonome Systeme 1. Ordnung betrachten.

Bsp für Dyn Systeme auf Mannigfaltigkeiten  
 $SU(2) = \{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \mid \text{Re} \text{ Punkte } \} \cong S^3 \subseteq \mathbb{R}^4 \subseteq \mathbb{R}^n$

$\frac{dz}{dt} = iz \quad \frac{dw}{dt} = iw \quad \varphi^t(z_0, w_0) = e^{it}(z_0, w_0)$  Strömung auf  $S^3$   
 Hauptfaserung  $VF +$  mög. Operatoren

$M$  definiert durch  $F(x) = 0 \quad (f(x), dF(x)) = 0$  garantiert  $\varphi^t(x) \in M \quad x \in M$   
 z.B.  $F(x) = H(q, p) - E = \text{const}$  Energiefläch

Torus  $T^2$   $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$  Kompakte Mannigf. wo Strömung immer abstrahiert ist

$$\begin{aligned} x_i = q_i \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ x_{j+n} = p_j \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \\ \frac{dx}{dt} = J \cdot \frac{dH}{dx} = f(x) \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

spez.  $H = \frac{1}{2} \sum p_i^2 + U(q)$   
 $\frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$

spez.  $m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_j}$   
 $U = -\sum_{i,j \in N} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$   $n$  Körper problem

mit Phasenraum  
 $\{(k, p) \mid k \in \mathbb{R}^{3N} - UH_j, p \in \mathbb{R}^{3N}\}$   
 $= (\mathbb{R}^{3N} - UH_j) \times \mathbb{R}^{3N}$   
 $H_j = \{x \in \mathbb{R}^{3N} \mid x_j = 0\}$   
 Kollisionspunkte

Definiert durch  $F(x)=0$   $dF(x)=0$

Metrik auf  $M$ :  $g_{ij}(u_1, \dots, u_{n-1}) = (\vec{x}_i, \vec{x}_j)$   
 $\textcircled{1} \quad d_{ij} + f_i f_j \quad \textcircled{2} \quad d_{ij} + \frac{F_i F_j}{F_n^2}$

$\textcircled{1} \quad f_i = \frac{-F_i}{F_n} \quad du \quad F(u_1, \dots, u_{n-1}) = 0$   
 $F(u_1, \dots, u_{n-1}, f(u_1, \dots, u_{n-1})) = 0$   
 $\dot{F} = F_i + F_n f_i = 0$   
 $f_i = \frac{-F_i}{F_n}$

$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x}$   
 $= \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} du_i + \dots \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j} du_j + \dots \right)$   
 $= g_{ij} du_i du_j$   
 $g_{ij} = \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_j} \right) = (\vec{x}_i, \vec{x}_j)$   
 $\vec{x}(u_1, \dots, u_{n-1}) = (u_1, \dots, u_{n-1}, f(u_1, \dots, u_{n-1}))$   
 $F(u_1, \dots, u_{n-1}, f(u_1, \dots, u_{n-1})) = 0$   
 $\vec{x}_1 = (1, 0, \dots, 0, f_1(u_1, \dots, u_{n-1}))$   
 $\vec{x}_{n-1} = (0, \dots, 0, 1, f_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}))$

$\Gamma_{ij}^k = g^{hk} \Gamma_{ijh}$

$\Gamma_{ijh} = (\vec{x}_i, \vec{x}_h)$

$\Gamma_{ij}^k = \frac{d^2 x^k}{du^i du^j}$

$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{hk} \left( \frac{dg_{jh}}{du^i} + \frac{dg_{ih}}{du^j} - \frac{dg_{ij}}{du^h} \right)$

hier:  $\vec{x}_{ij} = (0, \dots, 0, f_{ij}(u_1, \dots, u_{n-1}))$   
 $(\vec{x}_i, \vec{x}_h) = f_{ij} f_{ih}$   
 $f_{ij} = \frac{-F_{ij}}{F_n} = \frac{F_{ij} F_i - F_i F_j}{(F_n)^2}$

Größte Ableitung auf Mannigfaltigkeit

$\ddot{x}^k = -\Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{F_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{|F_{ij}|^2} \dot{F}^k = \ddot{x}^k$   
 $\Gamma_{ij}^k = \frac{F_{ij} F^k}{\det |F_{ij}|^2}, \quad (\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial x^i} \dot{x}^i, \dot{\vec{x}} \right)}{\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|^2}$

grad. Strömung auf Mannigfaltigkeit  $F(x)=0$

$\vec{x}^\perp = -\frac{(\vec{x}, \dot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^2} \frac{\partial F}{\partial \vec{x}}$   
 $\mu = \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial x^i} \dot{x}^i, \dot{\vec{x}} \right)}{\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|^2}$

$\frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} = \vec{x}_k \left( \frac{\partial^2 u^k}{\partial s^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u^i}{\partial s} \frac{\partial u^j}{\partial s} \right) + L_{ij} \vec{n} \frac{\partial u^i}{\partial s} \frac{\partial u^j}{\partial s}$   
 $L_{ij} = (\vec{x}_{ij}, \vec{n}) = \vec{n} = \frac{\partial F}{\partial x}$

als lineare dyn. System

stetig Darstellung von  $\mathbb{R}$  durch Abbildung von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{Z}$

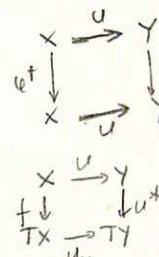
Bsp diskretisierung von stetigen dyn. Systemen

$\varphi^1 = 0$   
 $\varphi^{i+1} = \varphi^i \circ \varphi$   
 $\varphi : (\varphi(0), t=0) \rightarrow (\varphi(1), t=1)$   
 $\varphi^{-1}$  existiert: können Darstellung von  $\mathbb{Z}$  machen

Bsp  $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$

$S^2 \stackrel{?}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$   
 invertierbar  $\Rightarrow$  Möbiustransformation  
 alle endlichen Mengen gehen auf Julia-Mengen

Bsp Billardproblem  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$  glatte Kurve in  $\mathbb{R}^2$  mit Krümmung  $\kappa$   
 $(\text{Seite}) \mapsto (\text{Seite}) \quad x \rightarrow x$   
 $x: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$   $\alpha$ : Ausfallwinkel



Transformationen im  $\mathbb{R}^n$

$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \det \frac{du}{dx} \neq 0$   
 $D_y \rightarrow D_x$   
 Diffeomorphismus von  $D_1$  und  $D_2$   
 $\dot{x} = f(x)$  in  $D_1$   
 $\dot{y} = g(y)$  in  $D_2$   
 $\dot{x} = \dot{x} = u'(y) \dot{y} = u_y \cdot \dot{y} = u_y \cdot g(y) = u_y g(u^{-1}(x))$   
 $g(y) = u_y^{-1} f(u(y))$  Trasfo von VF  
 $u^x : V(D_2) \rightarrow V(D_1) \quad \{VF \text{ auf } D_2\} \rightarrow \{VF \text{ auf } D_1\}$   
 $f \rightarrow u_y^{-1} f(u(y))$

$g = u^x f$   
 $\varphi^t, \psi^t$  Strömungen auf  $\text{isp } g$   
 $\rightarrow \varphi^t = u^{-1} \circ \psi^t \circ u$

$\Gamma \quad \dot{x}^t = u^{-1} \circ \psi^t \circ u$  ist Strömung auf  $D_1$   
 $\psi^t \circ u = u \circ \dot{x}^t$  zeigen  $\dot{x}^t = f(x^t)$   
 $\dot{x}^t = u_x^{-1} \psi^t \cdot u$   
 $= u_x^{-1} g(\psi^t) u$   
 $= u_x^{-1} u_x f \circ u^{-1} \psi^t u$   
 $= f(x^t)$

diffeom. Äquivalenz von dynam. Systemen

topol. Äquiv

$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 $D_1 \rightarrow D_2$  ist Homöomorphismus  
 hier Trasfo der Vektorfelder nicht definiert !!

allg  $M, N$  Mannigf. alle  $u : M \rightarrow N$  diffeo  
 $F, G$  Tensorfelder auf  $\text{Mag}(M)$

Bsp  $\dot{x} = x$   
 $\dot{x} = 2x$  nicht diffeomorph

$F = u_x^{-1} \circ G \circ u$

$M \xrightarrow{u} N$   
 $F \downarrow \quad \quad \downarrow G$   
 $TM^m \otimes TM^m \xrightarrow{u_x} TN^m \otimes TN^m$

Geodätische Stromung auf  
 n-Mannigfaltigkeit der  
 Form  $F(x) = 0$  im  $\mathbb{R}^n$

Parametrisierung lokal:  $\vec{x}(u_1, \dots, u_{n-1}, f(u_1, \dots, u_{n-1}))$   
 $F(u_1, \dots, u_{n-1}, f(u_1, \dots, u_{n-1})) = 0$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{d\vec{x}}{ds} \frac{du^i}{ds} \right) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i \partial u^i} \frac{du^i}{ds} \frac{du^i}{ds} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \frac{d^2 u^i}{ds^2}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i \partial u^i} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^k} + L_{ij} \vec{n} \quad \text{Weingarten}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^k} \left( \frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) + L_{ij} \vec{n} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}$$

= 0 für geodäte

$$\frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} = L_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \vec{n} = \left( \frac{d\vec{x}}{ds}, \frac{d\vec{n}}{ds} \right) \cdot \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{du^i} \frac{du^i}{ds} = \left( \frac{\partial u^1}{\partial s}, \dots, \frac{\partial u^{n-1}}{\partial s}, \frac{df}{du^i} \frac{du^i}{ds} \right)$$

$$= \left( \frac{\partial u^1}{\partial s}, \dots, \frac{\partial u^{n-1}}{\partial s}, \frac{F_i}{F_n} \frac{du^i}{ds} \right)$$

$$\frac{dF}{du^n} \frac{df}{du^i} = \frac{\partial F}{\partial u^i}$$

$$\frac{df}{du^i} = \frac{-F_i}{F_n}$$

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial u^i} \frac{du^i}{ds} + \frac{\partial F}{\partial n} \frac{dn}{ds} \frac{du^i}{ds} = 0$$

$$\left( \vec{n} = \frac{\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2|} \quad \text{im } \mathbb{R}^3 \right)$$

$$\vec{x}_1 = \left( x_1, \frac{df}{du_1} \right)$$

$$\vec{x}_2 = \left( 0, 1, \frac{df}{du_2} \right)$$

$$\frac{|\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2|}{|\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2|} = \frac{\left( \frac{df}{du_1}, \frac{df}{du_2}, 1 \right)}{\sqrt{\left( \frac{df}{du_1} \right)^2 + \left( \frac{df}{du_2} \right)^2 + 1}}$$

$$\left( \vec{n}, \frac{\partial \vec{x}_{ij}}{\partial u^i} \right) = \frac{f_{ij}}{\sqrt{\left( \frac{df}{du_1} \right)^2 + \left( \frac{df}{du_2} \right)^2 + 1}}$$

$$\vec{n} = \left( -\frac{df}{du_1}, \dots, -\frac{df}{du_{n-1}}, 1 \right) / \sqrt{\dots}$$

$$\vec{x}_i = \left( 0, \dots, 1, \dots, \frac{df}{du^i} \right)$$

$$\vec{x}_{ij} = \left( 0, \dots, \dots, \frac{df}{du^i du^j} \right)$$

$$L_{ij} = (\vec{n}, \vec{x}_{ij}) = \frac{\frac{df}{du^i du^j}}{\sqrt{\sum \left( \frac{df}{du^i} \right)^2 + 1}} \quad ; \quad L_{ij} \vec{n} = \frac{f_{ij}}{|\partial F / \partial x|^2} = \frac{F_{ij}}{|\partial F / \partial x|^2}$$





$\det A \neq 0 \implies \exists$  Ewoon  $A = f(x) f(x) = 0 \implies f \in C^1(U)$   
 $x' = f(x) \sim \dot{y} = Ay$  topol. Äquiv.

Idee:  $x' = f(x)$   $x_{n+1} = \varphi(x_n)$   
 als logisch äquivalente Systeme auffassen mit nichtstandard analysis

$\Gamma$  U) Fortsetzung von  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$

(2)  $\varphi^t(x) \in C^1(M^2, \mathbb{R}^n)$   
 $\dot{\varphi}^t := \varphi^t(A) - e^t A x$   
 $|\dot{\varphi}^t(x)| < M$

(3)  $\varphi_x^t(0) = e^{tA} = A$   
 $\exists U_+ \varphi^t U_+ = U_+ e^{tA}$   
 $\forall t$  rechen  $\varepsilon(0,1)$

o.ä. existiert kein lokaler Diffeomorphismus, da die Systeme intransient verhalten: Bsp Hartman

nicht nur auf Kleinfall

normale Koordinaten  
 lokal analyt. Funktionalstein

$f = \sum c_j x^j$   $x^j = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$   $j = (j_1, \dots, j_n)$   $c_j \in \mathbb{R}^n$   
 formal Potenzreihe

$|c_j| \leq M^{1+|j|}$   $M$  reell analyt. Funktionalstein

$f$  konvergiert  $\implies |x_j| \leq \frac{\theta}{M}$   $0 < \theta < 1$   
 dann dann  $|c_j x^j| \leq M \cdot \theta^{|j|}$

lokaler Ring d. reell analyt. Funktionalstein

mit Konvergenz beh.  $f = \sum_{j \geq 0} f_j$   $f_j = \sum_{|j|=j} c_j x^j = P_j$

$x = u(t) = U_+ y + u_0$   $\det U \neq 0$   $U = U_+ \quad u_0 = 0$

$\tilde{G}$  Raum d. formalen Potenzreihen mit  $\det U \neq 0 \quad u_0 = 0$

$\tilde{G}$  ist Gruppe

$\Gamma$   $u \varphi^t = u_0 \varphi^t + u_1 \varphi^{t+\tau} + \dots + T_j u_j \dots \varphi^{t+j\tau} + \dots$   
 $U^{-1}$  bestimmt:  
 $W = U^{-1}$   
 $0 = U_+ w_j, U_+ w_j + T_j u_j \dots u_j \dots w_j \dots$   
 d.h. induktive Bestimmung von  $w_j$  möglich

- $G_1 = \{u \in \tilde{G} \mid u_1 = Id\}$
- $G_2 = \{u \in \tilde{G} \mid u \text{ konverg.}\}$
- $G_3 = \{u \in \tilde{G}_2 \mid u \text{ konvergent}\}$

Satz von Poincaré

$f \in \tilde{G}$   $f = Ax + f_2$   
 $A$  diag. bar mit EW  $\alpha_j$   
 $\exists j \tau \alpha_j \neq \alpha_k \quad \mu = 1, n$   
 $i, j \in \mathbb{N} \quad |i| = |j| \geq 2$   
 $\implies \exists U \in \tilde{G}_2 \quad U^{-1} \circ f \circ U = Ax$

$f \in G$   $f(x) = Ax + f_2$   
 $A$  diagonal mit EW  $\alpha_j$   
 $|j \cdot \alpha - \alpha_k| \geq \delta > 0 \quad \forall j \geq 2$   
 $\mu = 1, n$   
 $j \in \mathbb{N} \quad |j| = |j| \geq 2$   
 $\implies \exists U \in G_2 \quad U^{-1} \circ f \circ U = Ax$

Hintergrund ist auch:  
 konv. Nulle  $\delta \alpha_1, \dots, \alpha_n \neq 0$   
 $\alpha_j \neq \alpha_k$   
 $\Gamma \implies \tau \alpha_j / \tau \alpha_k \geq \delta \implies \tau = \frac{j \tau}{k \tau}$   
 $\implies |j \cdot \alpha - \alpha_k| \geq \delta \implies |j| - |k| \geq \delta$   
 falls  $\delta > 1, \delta$   
 $|j|$

Bem

$u(t) = y + \sum_{j \geq 2} a_j y^j \quad u \in \tilde{G}_2$   
 $y' = Ay \quad y_1 = e^{At} A_1$  linear System  
 Lösungen von  $x' = f(x)$ :  
 $x = u \circ (e^{At} A_1) = e^{At} A_1 + \sum_{j \geq 2} a_j y^j e^{j \mu t} \dots$

Bem  
 Konv. Fall  
 $x_1' = \alpha x_1$   
 $x_2' = m \cdot \alpha x_2 + x_1^m$   
 lässt sich nicht linearisieren:  
 a)  $\varphi^t(x_1, x_2) = (e^{\alpha t} x_1, (x_2 + x_1^m) e^{m \alpha t})$   
 b)  $\varphi^t(x_1, x_2) = (e^{\alpha t} x_1, e^{m \alpha t} x_2)$   
 c) urspr. System b) neu. System  
 (nicht beschränkt für  $\alpha < 0$ )

Poincaré

$U_+ A y = f \circ u = Au + f \circ u$   $M$  gilt für  $u$   
 $L(u) = U_+ A y - Au$   
 $L: P_2 \rightarrow P_2$  ist Isomorphismus f.  $\tilde{G}_2$   $L(u) = 0$   
 $L u_2 = (L u)_2 = f \circ u_2 = f \circ u_1 \circ T \{u_1, u_2, \dots, u_{j-1}\}$

$L(u)$  transformiert  $u$  in die Polynomdarstellung von  $u$  in  $\tilde{G}_2$   
 operiert auf dem Raum d. formalen Potenzen

Bsp  $\alpha_1, \alpha_2$  reell  $\alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 < 0$   
 $|j(\alpha_1 - 1) \alpha_1 + j \alpha_2| \geq \delta$   
 $|j(\alpha_1 - 1) + j \frac{\alpha_2}{\alpha_1}| \geq \frac{\delta}{|\alpha_1|}$

Bed. nach erfüllt

$\Gamma L u = \frac{du}{dy} A y - Au$   $A = \text{diag } \alpha_1, \dots, \alpha_n$  o.f.d.A.  
 $L u = \sum \alpha_j y^j \frac{d}{dy} u - Au$   $\{e_{\mu_j}^j\}$  Basis in  $P_2$   $|j| \geq 2$   
 $L e_{\mu_j}^j = j \cdot \alpha_j e_{\mu_j}^j - \alpha_j e_{\mu_j}^j$   
 $= (j \cdot \alpha_j - \alpha_j) e_{\mu_j}^j$   
 $\implies$  invertierbar

Idee d. Beweises:  
 $u$  kann mittels  $M$  gilt. System  $x'$  induktiv ermittelt werden  
 die Invertierbarkeit von  $L$  sichert eine eindeutige Lösung

Sind die EW von  $L(u)$

inkl. Bestimmung von  $u$ :  
 $U_+ A y = A U_+ y$   $\text{diag. } A \implies u_1$  beliebig z.B.  $u_1 = Id$   
 $U_+ A y = A U_+ y + L(u_2) x$   $L(u_2) = f \circ u_2$  lin. Mfgl. system für  $u_2$

Poincaré im diskreten Fall

$\varphi(\lambda) = \lambda + \varphi_2 \lambda^2 + \dots$  form. Potenzreihe  
 i)  $\lambda$  diagon. mit EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$   
 ii)  $\lambda_j - \lambda_k \neq 0 \quad k=1, \dots, n \quad j=1, \dots, n$   
 $\rightarrow \exists! U \in \mathbb{C}^n \quad U^{-1} \varphi U = \Lambda$

$\varphi$  reell analyt.  
 i)  $\Lambda$  diagon. mit EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$   
 ii)  $\lambda_j - \lambda_k \neq 0 \quad k=1, \dots, n \quad j=1, \dots, n$   
 $\rightarrow \exists! U \in \mathbb{C}^n \quad U^{-1} \varphi U = \Lambda$

Poincaré reell analyt.

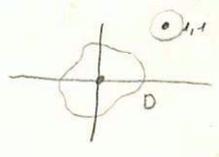
Wurzelzerlegung

Schwarz Spiegel

$z \rightarrow f(z) \quad |f(z)|=0 \quad |f'(z)|=A \quad f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 Poincaré:  $|f(z)|=A z^n \dots$  } dyn. System auf  $\mathbb{C}$   
 $|A| \neq 0, 1 \rightarrow \exists u \quad z = u(\xi) \quad |A^j - A^k| = |A| |A^{j-k} - 1| \geq \delta$  falls  $|A| \neq 1, 0$   
 $\xi_j = A^j \xi$   
Siegel: gibt Punkte  $A$  auf Einheitskreis vom Mass 2 für welche Siegel gilt

Bsp von Sieberbach, Fatou

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ganz  
 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{C}$   
 in  $\mathbb{C}^2$  falsch: konstruieren  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 - B_r(1,1)$   
 $\varphi: \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ \lambda z_2 - p(z_2) \end{pmatrix} \quad \lambda > 1 \quad p'(z) = p'(0) = 0$   
 $\varphi^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^{-2}(z_2 + p(z_2)) \\ z_1 \end{pmatrix}$   
 $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda^2 & 0 \end{pmatrix}$  mit EW  $\pm \lambda$   
 $|A^j - A^k| \geq |\pm 2\lambda - 1| \geq \delta$   
 $\Rightarrow$  Poincaré  $\exists! U \in \mathbb{C}^n \quad \varphi U = U(\Lambda Y)$   
 $U$  analyt. in  $|y| \leq r$   
 $\varphi^{-m} U(\Lambda^{-m} Y) = U(Y) \quad \|\Lambda^{-m}\| \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty$   
 Funktionalgleichung, welche  $u(y)$  analytisch auf ganz  $\mathbb{C}^2$  fortsetzt.  
 $\Delta u = 0$   
 $D$  ist Einzugsbereich von 0 reagi.  $\varphi^{-1}: D = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \varphi^{-m}(z) \rightarrow 0\}$   
 $D \subseteq \mathbb{C}^2 - B_r(1,1)$   
 wählen  $p$  so, dass  $p'(z) = \lambda^2 - 1$   
 $p'(1) = 0$   
 so dass  $(z_1, z_2) = (1, 1)$  Fixpunkt von  $\varphi$  wird  
 $\Delta u = 0 \quad \exists u(1,1) \quad u(u(1,1))$   
 $\Delta u = 0 \quad u(1,1)$  liegt nicht in Einzugsbereich von 0



Jacobischer Polynom

$p$  Polynom in  $\mathbb{C}^n \quad p \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(z) \\ \vdots \\ p_n(z) \end{pmatrix}$   
 $\det \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} \Big|_{z_1, \dots, z_n} = 1$   
 Falls  $\det \frac{\partial p}{\partial z} \equiv 1 \Rightarrow p^{-1}$  ist auch Polynomial

Majorsante Methode

$f(x) = \sum c_j x^j \quad \varepsilon \tilde{G} \quad F = \sum C_j x^j \quad C_j \in \mathbb{R}$   
 $f < F$  falls  $|c_j| \leq C_j$   
 $K_j \leq M^{j+1}$   
 $f < \sum_j M^{j+1} x^j = \sum_j M^{j+1} x_1^j \dots x_n^j < \sum_j M^{j+1} (x_1 + \dots + x_n)^j$   
 $= \sum_j \frac{M^{j+1} (x_1 + \dots + x_n)^{j+1}}{(x_1 + \dots + x_n)^{j+1}} = \frac{M}{1 - M(x_1 + \dots + x_n)} = \frac{M}{1 - M\bar{x}}$

Beweis reell analyt. Verschiebung Poincaré

$\Gamma u, Ay = f u = Au + \frac{f u}{L u} \quad L v = v, Ay - Av$   
 $L(e_j y^j) = (j \cdot a - j^2) e_j y^j$   
 (vgl. Bew. Poincaré)  
 a)  $f = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n) \quad \hat{f}_j < F(x) = \frac{M}{1 - M\bar{x}} - M \cdot M^2 \bar{x} = \frac{M^3 \bar{x}^2}{1 - M\bar{x}} \quad$  da  $L u_j = 0$   
 b) Sei  $\bar{u} < \bar{u}, \bar{y}$  wobei  $\bar{u}$  kleinste Majorante dieser Form ist  
 $\bar{u} < F(\bar{y} + \bar{u}) \quad \Gamma L u_2 = \hat{f}(\bar{y} + \bar{u})_2 < F(\bar{y} + \bar{u})_2$   
 $\bar{u}, \bar{y} < F(\bar{y} + \bar{u})_2$   
 $\bar{u} < F(\bar{y} + \bar{u})_2$   
 $\Delta y = F(\bar{y} + \gamma) \quad$  Majorante von  $\bar{u}$   
 $w(\bar{y}) = \bar{y} + \gamma = \bar{y} + \frac{1}{2} F(w) \quad w = \bar{y} + \frac{1}{2} \frac{M^3 w^2}{1 - M w}$  hat eindeut. Lsg. mit  $w(0) = 0$

$w(\bar{y})$  analyt.  
 $w$  konv.  $\Rightarrow \gamma$  konv.  $\Rightarrow \bar{u}$  konv.  
 $\Rightarrow \bar{u}$  konverg.  $\Rightarrow u$  konverg.

Stabile u. instabile Mannigfaltigkeiten

Stabile Mannigfaltigkeit

$$W_s^+(p) = \{x \in B_\delta(p) \mid \omega^+(x) = B_\delta(p) \text{ u. } \omega^-(x) \rightarrow p\}$$

global beschriebener Mannigfaltigkeit  $\varphi: M \rightarrow M$  &  $D\varphi^j(p)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \omega^+(p) = \{q \in M \mid \exists j_0 \rightarrow \infty \omega^+(p) \rightarrow q\}$$

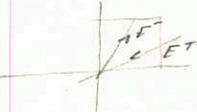
$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \omega^-(p) = \{q \in M \mid \exists j_0 \rightarrow -\infty \omega^-(p) \rightarrow q\}$$

$$W^+(p) = \{q \in M \mid \exists p \in \lim_{j \rightarrow \infty} \omega^+(q)\}$$

$$W^-(p) = \{q \in M \mid \exists p \in \lim_{j \rightarrow -\infty} \omega^-(q)\}$$

bsp

$\varphi: x \rightarrow Ax$  auf  $T^2$   $A$  unimodular  $\det A = 1$   
 $x = \infty$  Fixpunkt  
 Fixpunkt hyperb.  $\Leftrightarrow |\text{tr} A| > 2 \Leftrightarrow \lambda, \lambda^{-1}$  reell  
 $E =$  Eigenraum für  $A^2$   
 $E^T = \{x_2\} = \alpha x_1 + \beta x_2 \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$   
 $x_2 = \alpha_1 x_1 + (\alpha_2 j + \beta_2)$   
 $E^T$  ist in  $T^2$  dicht wenn  $\alpha_1$  irrational weil  $\lambda$  irrational ist  
 $\forall \varepsilon \exists j_1, j_2 \mid \alpha_1 j_1 + \beta_1 - \alpha_1 j_2 - \beta_2 \mid < \varepsilon \quad E^T \cap E^-$  dicht d.h. Periodenbahn dicht



Bsp

hyperb. Fixpunkt  
 $\varphi = A$   
 $\Lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} = E^s \oplus E^u$   
 $x = x^s + x^u$   
 $\Lambda x = \Lambda x^s + \Lambda x^u$   
 $\|\Lambda x^s\| \leq \|\Lambda\| \|x^s\| < 1$   
 $W_s^+(0) = E^s \cap B_\delta(0)$

$\dot{x} = -x + x^3 = 0$   
 $\dot{x} x' = -x x' + x^3 x' = 0$   
 $x^2 = -x^2 + \frac{1}{2} x^4 = \text{const}$

$y^2 = x^2 - \frac{1}{2} x^4 + c$   
 $y = \sqrt{x^2 - \frac{1}{2} x^4 + c}$

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix} = f(x, y)$   
 $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3x^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E^c$   
 $\Lambda_{x=1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = E^s$   
 $\Lambda_{x=-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = E^s$

1 stabile Fixpunkt  
 0 hyperbol. Fixpunkt

(p) zu tangente Mannigf.

$\varphi \in \text{Diff}^r$   $r \geq 1$   
 $\varphi(p) = p$  hyperbol. Fixpunkt  
 $d\varphi(p)$  mit  $E^s$  als stabile Mannigf.  
 $W_s^+(p)$  ist  $C^r$  Mannigfaltigkeit für  $\varepsilon$  gen. klein die am Punkt  $p$  tangential zu  $E^s$  ist.

Skizze skizze:

$\varphi: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad \varphi \in \text{Diff}^r$   
 $(0,0)$  Fixpunkt mit  $\|A\| < 1 \quad \|A\| \|B^{-1}\| \|C\| < 1$   
 $\rightarrow \exists$  lokal in  $B_\delta$  eindeutige Mannigfaltigkeit  $V_\delta$   
 $V_\delta = \{x, y \in B_\delta \mid y = u(x)\} \quad u(0) = 0 \quad u'(0) = 0$   
 $\varphi V_\delta \subseteq V_\delta$

$\varphi: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix} \quad 0 < \alpha < \beta < 1$   
 $\alpha = \beta^2$  falls  $q \in \mathbb{N} - \{0\}$   
 $\alpha x = x_1 = c \cdot y_1^q = c \cdot \beta^q y^q = c \cdot \alpha \cdot y^q$   
 d.h.  $x = c \cdot y^q$  ist invariant  
 $y = \alpha^{\frac{1}{q}} x^{\frac{1}{q}} = u(x)$   
 $u_x(0) = 0$   
 $u_y(0) = 0$   
 $V_\delta = \{x, y \in B_\delta \mid y = u(x)\}$

$\Gamma \quad \mathcal{O}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \varepsilon \quad |y| < \varepsilon\}$   
 $|Df| + |Dg| < \varepsilon(\delta) \quad \varepsilon(\delta) \rightarrow 0$  Stabilität d. 1. Ableit. und verschw. d. 1. Ableit. im Nullpunkt.  
 $\|f\| + \|g\| < \varepsilon \cdot \delta$  Mittelwertsatz

suchen Mannigfaltigkeit mit  $y = u(x)$   
 $\varphi(x, u(x)) = u(f(x, u(x)))$  Fixpunktgleichung für  $u$

$D_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \delta\}$   
 $u = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $f(x, u(x)) = u(f(x, u(x))) = \phi(u)$  Suchen Fixpunkte von  $\phi$   
 $x := \{x \in C(\mathcal{O}_\varepsilon) \mid u(0) = 0 \mid |u(x_1) - u(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{O}_\varepsilon\}$   
 Lipstitzstetige Funktionen auf  $D_\varphi$  mit normierter Banachraumnorm

1)  $\phi$  ist wohldefiniert:  $f(x, u) \in \mathcal{O}_\varepsilon$  denn  $\|f(x, u)\| < \|A\| + \varepsilon \cdot \delta \leq \frac{\delta}{2} + \varepsilon \cdot \delta < \delta$   
 $x \in D_\varphi \rightarrow (x, u(x)) \in \mathcal{O}_\varepsilon$

2)  $\phi: x \rightarrow x \quad \phi(u)(0) = 0$   
 $\|\phi(u)(x_1) - \phi(u)(x_2)\| \leq |x_1 - x_2|$  d.h.  $\phi$  ist kontraktiv

$\Gamma \quad B \cdot \left| \frac{g(x_1, u_1) - g(x_2, u_1)}{g(x_1, u_1)} \right| \leq \|B\| \cdot \varepsilon \cdot (|x_1 - x_2| + |u_1 - u_2|) \leq \|B\| \cdot 2\varepsilon |x_1 - x_2|$   
 $|u(f(x_1, u_1)) - u(f(x_2, u_1))| \leq |f(x_1, u_1) - f(x_2, u_1)| \leq \|A\| |x_1 - x_2| + 2\varepsilon |x_1 - x_2|$   
 $|\phi(u)(x_1) - \phi(u)(x_2)| \leq \|B\| \cdot 2\varepsilon + \|B\| \cdot (\|A\| + 2\varepsilon) |x_1 - x_2| = \|B\| \cdot (\|A\| + 4\varepsilon) |x_1 - x_2|$

Bew. vom obigen Satz:  $\Lambda$  hyperb. mit  $\Lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad E^s \times \text{Banachraum}$   
 $V_\delta = \{y = u(x) \in C^1(D_\varphi)\} \quad \text{Bsp. } W_s^+(0) = V_\delta = \{(x, y) \in \mathcal{O}_\varepsilon \mid \varphi^j(q) \in \mathcal{O}_\varepsilon\}$

$\Gamma$  neue Koordinaten:  $\begin{cases} x = x' \\ y = y' + u(x') \end{cases} \quad v = \{(x', y') \mid y' = 0\}$   
 zeigen:  $V_\delta = W_s^+(0)$   
 $1) W_s^+ \ni q \in \mathcal{O}_\varepsilon \quad \omega^+(q) \in \mathcal{O}_\varepsilon \quad \varphi^j(q) \rightarrow 0$   
 $2) \{ \varphi^j(q) \in \mathcal{O}_\varepsilon \} \subseteq V_\delta \quad |x_j| \leq (\|A\| + \varepsilon)^j |x_0| \rightarrow 0$   
 $\varphi: x' \rightarrow f(x', y')$   
 $y' \rightarrow g(x', y')$   
 $g'(x', 0) = 0$   
 $y' = B y' + g(x', y') = B y' + \tilde{g}(x', y')$   
 $|y'| \leq \|B\|^{-1} (|y| + \varepsilon \|y\|)$   
 $|y_0| \leq \frac{\varepsilon}{1 - \|B\|} \|y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{1 - \|B\|} \|y_0\|$

$\varphi(p) = p$   $U_x(p) = A$  mit EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$   $|\lambda_j| \leq |\lambda| \leq 1$   
 $p \in (u, v)$   $E_\mu$  Eigenraum dazu  $\{\lambda_j \mid |\lambda_j| \leq \mu < 1\}$  gehört  $j=1, \dots, m$   
 $\wedge E_\mu = E_\nu$   
 $\rightarrow \exists!$  Mannigf.  $M(\mu) \subset \mathbb{C}^n$  mit (1)  $\varphi(M(\mu)) \subseteq M(\mu)$   
 (2)  $\exists p \in M(\mu) = E(\mu)$   
 $|\varphi'(q)| \leq C(\mu + \varepsilon)^n |q|$   $j > 0$

$E = E(\mu)$   
 $F = E^\perp$   
 $A = A|_E \quad B = A|_F$   
 $\|A\| \leq \mu + \varepsilon$   
 $\|B\| \leq \frac{1}{\mu - \varepsilon}$   $\mu > \mu$   
 $\|A\| \|B\| \leq \frac{1}{\mu - \varepsilon} \leq \frac{\mu + \varepsilon}{\mu - \varepsilon}$

Ordnung für Störungen

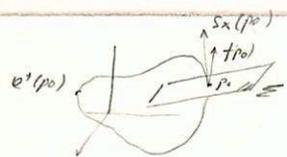
$x = f(x)$   
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  EW von  $A = f'(x_0)$   $\text{Re } \lambda_j \in \text{Re } \lambda_1 \leq \dots \leq \text{Re } \lambda_n$   
 $F = E_\mu$  von  $\{\lambda_j \mid \text{Re } \lambda_j \leq \mu\}$   
 $\exists!$   $M(\mu)$  (1)  $\varphi^*(M) \subseteq M$   
 (2)  $0 \in M \quad T_0 M = E$   
 $|\varphi'(q)| \leq C \cdot 0^{k+1} |q|$

explizites Bsp von Liapunov

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ x \end{pmatrix}$   $w = \lambda^2 y^2$

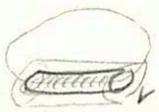
Poincaré Abb.

$\dot{x} = f(x)$  in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$   
 $p(t) = p(t+T) \quad T > 0$   
 wie verhält sich die Bahn in der Nähe von  $p_0$   
 $\Sigma = \{x \in B_\varepsilon(p_0) \mid S(x) = 0\}$   $S(x) = 0$   $S_x(p_0) \neq 0$   $ds(t) = \langle S_x(p_0), f(p_0) \rangle \neq 0$   $\dim \Sigma = n-1$   
 Schnittmannigfaltigkeit  $\perp$  transversal  
 $\varphi(x) = \varphi^T(x)(x) \quad x \in \Sigma \cap B_\varepsilon(p_0) \quad \varphi(x) \sim T$   
 $\varphi^T(x)(x) \in \Sigma$  wohldefiniert für genügend kleines  $\varepsilon$   
 Poincaré abb die zu  $\varphi$  und  $p_0$  gehört



Bahnstabilität

$\{p(t)\} = P$  bahnstabil falls  $\forall U \ni P \exists V \supset P \forall \varepsilon U$   
 $q \in V \rightarrow \varphi^t(q) \subset U \quad \forall t > 0$  also  $\varphi^t(V) \subseteq U$   
 d.h.  $p_0$  ist stabiler Fixpunkt bezüglich Poincaré abb.



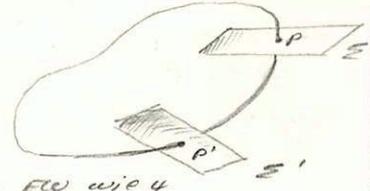
Variationsgl. zu  $\dot{x} = f(x)$  (linearis. gl.)

$\dot{\xi} = f_x(p(t)) \xi$   
 spezielle Lösung:  $\xi(t) = f(p(t))$  falls  $\dot{p}(t) \neq 0$   
 denn  $\dot{\xi}(t) = f_x(p(t)) \dot{p}(t) = f_x(p(t)) f(p(t)) = f_x(p(t)) \cdot \xi$

$\dot{x} = \sqrt{1-x^2} = f(x) \Rightarrow x = \sin t = p(t)$   
 $\dot{\xi} = \frac{+x}{\sqrt{1-x^2}} \xi \Big|_{x=p(t)} = \frac{\sin t}{\cos t} \xi$   
 $\xi(t) = \sqrt{1-p^2(t)} = \cos t$  ist spe. Lösung!

Folge Multiplizität

$d\varphi(p_0)$  mit EW  $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$   
 $\Sigma' \quad \varphi': \Sigma' \cap B_{\rho_1} \rightarrow \Sigma'$  zweif. Schnittmannigf.  
 $\chi: \Sigma \cap B_{\rho_1} \rightarrow \Sigma'$   
 $\varphi' = \chi \circ \varphi \circ \chi^{-1}$   
 $d\varphi' = d\chi(\varphi') d\varphi(p) d\chi^{-1}(p')$  d.h.  $d\varphi'$  hat gleiche EW wie  $\varphi$

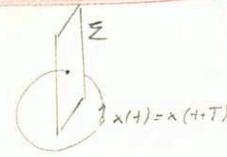


Floquettheorie

$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x & x \in \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n \\ A(t+T) = A(t) \end{cases}$

$w(t)$  Fundamentallösung  
 $\frac{dw(t)}{dt} = A(t)w(t) \quad w(0) = I$   
 $w(t) = \int_0^t A(s) ds$

$w(T) : x(0) \rightarrow x(T) = w(T)x(0)$  mit Eigenwerten  $\mu_1, \dots, \mu_n$   
 $\mu_1, \dots, \mu_n$  Floquetmultiplikatoren



$\dot{x} = f(x)$   
 mit Variationsg.  $\dot{z} = f_x(p(t))z$   
 $A(t+T) = A(t)$  falls  $p(t)$  periodisch  
 $z(t) = f(p(t)) = d w(t) z_0$   
 Fundamentallösung  $d w(t) = w(t)$   
 d.h. mit FW  $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$   
 die mit EW  $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$

Floquetmultiplikatoren

$Sp \left( \frac{dw}{dt} w^{-1} \right) = \frac{d}{dt} \det w$   
 $\det w$

cor  $Sp \dot{w} w^{-1} = \frac{d}{dt} \det w$   
 $Sp \log w = \log \det w$   
 $e^{Sp \log w} = \det w$   
 $e^{Sp A} = \det e^A$

$\Gamma \det w = \prod_{i=1}^n \text{sign} \pi \omega_{i, \pi(i)} \dots \omega_{n, \pi(n)}$   
 $\frac{d}{dt} \det w = \prod_{i=1}^n \text{sign} \pi \dot{\omega}_{i, \pi(i)} \omega_{i, \pi(i)} \dots \omega_{n, \pi(n)}$   
 $= \sum_{i,k} \dot{\omega}_{i,k} \text{sign}(i,k) \prod_{j \neq i} \omega_{j, \pi(j)} \dots \omega_{n, \pi(n)} \text{sign}(\pi) = Sp \dot{w} w^{-1}$   
 $\det A_{i,k}$  Adjunkte =  $w^{-1} \det w$

Lemma  
 $\frac{d}{dt} \log w = \frac{dw}{dt} w^{-1}$   
 $\log = \log \frac{dw}{dt} w^{-1}$   
 $\log = \log \frac{d}{dt} \det w$   
 $\log = \log \det w$

Bem nur bei auton. Systeme  
 haben wir  $w(t+s) = w(t) \cdot w(s) \in A(t+s) = A(t) = A(s)$   
 sonst  $0 \int_0^t A(s) ds \neq \int_0^t A(s) ds$  i.o.  
 aber es gilt  $w(t+s) = w(t) w(s)$

$\Delta(t) := \det w(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$   
 $\frac{d}{dt} \Delta(t) = Sp A(t) \Delta(t)$  aus Lemma  
 d.h.  $\Delta(t) = \Delta(0) e^{\int_0^t Sp A(s) ds} \neq 0$   
 d.h. Floquetmultiplikatoren  $\mu_j \neq 0$

$\mu$  Floquetmultiplikator  
 $\Rightarrow x(t)$  nichttriv. Lösung von  $\dot{x} = A(t)x$   
 mit  $x(t+T) = \mu x(t)$

$\Gamma x(t) = w(t)x_0 \quad \dot{x} = A(t)x(t)$   
 $w(t+T)x_0 = w(t) \cdot \mu x_0$   
 $w(T) \cdot x(t) = \mu \cdot x(t) \quad \mu$  EW von  $w(T)$

Floquetmultipl.  
 nicht verschwindend.

$\dot{x} = A(t)x \simeq \dot{y} = B(t)y$   
 gdw.  
 $X = P(t)Y \quad \det P \neq 0 \quad P(t+T) = P(t)$   
 $B(t) = P^{-1}AP - P^{-1}\dot{P}$

Begründung:  
 $x = Py$   
 $\dot{x} = \dot{P}y + P\dot{y} = Ax$   
 $\dot{P}x + P\dot{y} = Ax$   
 $P\dot{y} = Ax - \dot{P}P^{-1}x$   
 $\dot{y} = (P^{-1}A - P^{-1}\dot{P}P^{-1})x$   
 $= P^{-1}AP - P^{-1}\dot{P}y$

Auf Äquiv.  
 Systemen sicher  
 gleiche  
 Floquetmultiplikatoren

$\Gamma \dot{y} = B y$   
 $\dot{w} = A w$   
 $w(t) = P(t) \cdot v(t) \cdot P^{-1}(t)$   
 $w(T) = P(0) \cdot v(T) \cdot P^{-1}(0)$

Anmerkung:

jedes Floquetssystem  $\dot{x} = A(t)x$   
 ist äquivalent einem auton. Syst.  
 $\dot{y} = Cy$

komplexer Fall  $\exists P(t) = P(t+T) \quad B(t) = C$   
 reeller Fall  $\exists P(t) = P(t+2T) \quad B(t) = C$

$\Gamma$  wählen  $C$  sodass  $w(T) = e^{CT}$   
 $C = \frac{1}{T} \log w(T)$   
 Setzen  $P(t) := w(t) \cdot e^{-Ct}$   
 $P(t+T) = w(t) w(T) e^{-Ct} e^{-Ct} = P(t)$   
 $\underline{x(t)} = P(t) y(t)$   
 $= w(t) e^{-Ct} y(t) = w(t) y_0 - w(t) y_0$

$C = \frac{1}{2T} \log(w^2(T))$  reeller Fall

Kriterium  
 für Notwendigkeit  
 der komplexen Periodizität

Falls  $w = w(T)$  reell nicht sing.  
 mit keinem negat. EW  $\Rightarrow \exists C$  reell  $e^C = w = C \cdot \log w$

$\Gamma C = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\log z}{z-w} dz$  mit  $\log z$  reell  
 $\log z = \log \bar{z}$  für  $\bar{\gamma} = \gamma$



Stabilität

$\dot{x} + q(t)x = 0 \quad q(t) = q(t+T)$   
 $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix} \quad w(t) = e^{\int_0^t A(s) ds}$   
 $\dot{w}(t) = w(t) \cdot A(t)$   
 $\det w = 1$  da  $Sp A = 0$   
 $\begin{cases} u & u^{-1} \text{ EW} \\ \bar{u} & \bar{u}^{-1} \text{ EW} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \bar{u} \\ u \text{ reell} \end{cases}$  oder  $\begin{cases} u = \bar{u}^{-1} \\ |u| = 1 \end{cases}$

ellipt. Fall:  $|u| = 1 \quad u = \bar{u}$   
 hyperb. Fall:  $|u| \neq 1 \quad u = \bar{u}$   
 parabol. Fall:  $|u| = 1 \quad u = \bar{u}^{-1}$

spez. Mathematische Gleich.  $\dot{x} + (a + ib \cos t)x = 0$

$|q(t)| < \epsilon \rightarrow$  hyperb. Fall

$\int_0^T |q(t)| dt > 0 \rightarrow$  ellipt. Fall  
 $\int_0^T |q(t)| dt < \epsilon \rightarrow$  ellipt. Fall

$\Gamma$  1)  $u(t)$  mit  $u(t+T) = \mu u(t)$   
 $\mu$  reell sonst parabol.  
 2)  $u$  hat NST  $\Gamma$  sind  $\frac{u}{\mu}$   
 $p' = \frac{u'}{\mu} - \frac{u}{\mu^2} = q \cdot \mu$   
 $0 = \int q dt = \int p' dt - \int \frac{u}{\mu^2} dt$   
 $20 \ 6$

Floquet multiplikat.  
-  $\xi, \eta$  sind EW  
von  $d\mathcal{A}$

$d\mathcal{A}^t(p_0) = \omega(t)$  Fundament. Lösung von  $\dot{\xi} = f_x(p(t))\xi$   
 $\Rightarrow \det(AI - \omega T) = (1-\epsilon) \det(AI - d\mathcal{A}(p_0))$

$T_{p_0} \mathbb{R}^n = \langle \xi(p_0), T_{p_0} z \rangle \quad \xi + f(p_0)q = x \in T_{p_0} \mathbb{R}^n$   
 $d\mathcal{A}(p_0)\xi = d\mathcal{A}^t(p_0) + \frac{d\mathcal{A}^t}{dt} \Big|_{t=T} d\mathcal{A}(p_0)$   
 $= \omega(t)\xi + f(p_0) \langle z_x, \xi \rangle$   
 $\omega(T)\xi = d\mathcal{A}(p_0)\xi - f(p_0) \langle z_x, \xi \rangle$   
 $\omega(T) \begin{pmatrix} \xi \\ f(p_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\mathcal{A} & -z_x^T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ f(p_0) \end{pmatrix}$

Kontinuitätsmethode  
von Poincaré

Fragestellung: Unter welchen Bedingungen hat das gestörte System  $\dot{x} = f(x, \epsilon)$  das für  $\epsilon=0$   $p_0(t)$  als period. Lösung hat oder falls welche periodische Lösung?  
 Suchen  $p(t, \epsilon), T = T(\epsilon)$   $p(t, 0) = p_0$   $T(0) = T_0$   
 also auch Fixpunkte von  $\mathcal{A}(t, \epsilon)$

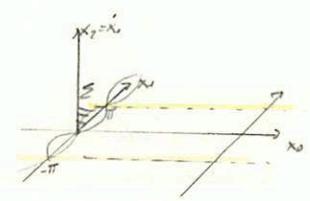
$\exists$  von period. lös. des gestörte Systems

1 einfacher Floquet multipl. von  $\dot{\xi} = f_x(p_0(t), 0)\xi$   
 $\Rightarrow \exists p(t, \epsilon), T(\epsilon) \quad p(t, T(\epsilon), \epsilon) = p(t, \epsilon) \quad p(t, 0) = p_0(t) \quad T_0 = T(0)$

d.h. wir haben nur eine period. Lösung mit Periode  $T$  des Systems  $x$

$\Gamma \det(d\mathcal{A}(p_0) - Id) \neq 0 \Rightarrow \exists p(s) \mathcal{A}(p(s), \epsilon) = p(s)$   
 $\Gamma$  impl. Fix. theo.  $\mathcal{A}(p(s), \epsilon) = p(s)$  hat Nullstelle da  $\mathcal{A}(p_0, 0) = p_0$  Nullst. hat.  
 und  $\det(d\mathcal{A}(p_0) - Id) \neq 0$  genau wenn  $d\mathcal{A}$  keinen FW 1 hat  
 da Fixpunkt für  $\mathcal{A}$  exist. exist auch Fixpunkt für  $\epsilon$

Bsp:  $\dot{x} + \sin x = \epsilon f(t, x, \dot{x}) = \epsilon f(t+T, x, \dot{x})$   $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 + \epsilon f(\cos x_1, x_1) \end{pmatrix}$   
 $\epsilon=0 \quad x_1(t) = j\pi$  ist period. Lösung  
 $\mathcal{E} = \{t, x, \dot{x} \mid t=0 \text{ mod } T\}$   
 $A(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -i \end{pmatrix}$   
 $\omega(T) = e^{AT} \sim \begin{pmatrix} e^T & 0 \\ 0 & -e^{-T} \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} e^{iT} & 0 \\ 0 & -e^{-iT} \end{pmatrix}$   
 hyperb. ellipt. falls  $\frac{T}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$



Bsp

altes 3,4 Körperproblem  
 3 Körper  $\mathbb{R}^3$  Phasenraum  
 $m_k \ddot{x}_k = -U_{x_k}$   
 $\ddot{x}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{|x_i - x_k|^2}$

Imp. Verhältnisse  
 $X_0 = \sum_{i=1}^3 m_i x_i = 0$   
 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_2}{m_3}$  kein  
 $m_1 = 1$   
 $X_1 = x_2 - X_0$   
 $X_2 = x_3 - X_0$   
 $X_3 = x_3 - m_2 x_2 - m_3 x_1$

$\ddot{x}_0 = 0$   
 $\ddot{x}_2 = \frac{-x_2}{|x_2|^3} + O(m_1, m_3)$   
 $\ddot{x}_3 = \frac{-x_3}{|x_3|^3} + O(m_1, m_2)$

einklen in  $\ddot{z}_k = \frac{-z_k}{|z_k|^3}$   
 1)  $F_k(z, \dot{z}, 0) = 0$   
 2)  $F_k(\eta z, \dot{\eta} \dot{z}, m)$   
 $\eta F_k(z, \dot{z}, m)$   
 3)  $F_k(\eta \dot{z}, m) = F_k$

untersuchen Nähe von Kreisbahnen:

$z_k = r_k e^{i\omega_k t}$   
 $z_2 = \omega_2 e^{i\omega_2 t} \quad \omega_2 = r_2$   
 $z_3 = \omega_3 e^{i\omega_3 t} \quad \omega_3 = r_3 e^{i(\omega_3 - \omega_2)t}$

$\ddot{\omega}_k + 2i\omega_k \dot{\omega}_k - \alpha^2 \omega_k = \frac{-\omega_k}{|\omega_k|^3} + F_k(\omega, \dot{\omega}, m)$   
 $\alpha = \omega_2 \quad \omega_2 = r_1 \quad \omega_3 = r_3 e^{i(\omega_3 - \omega_2)t} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_3}$

$\alpha^2 = \frac{1}{r_k^3}$

Berechn. d. Floquet multiplikatoren:

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$  koordinaten  
 $\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ -i\omega_1 \omega_2 + 2\alpha^2 \omega_1 - \frac{\omega_1}{|\omega_1|^3} + F_k \end{pmatrix}$   
 $1, 1, e^{i2\pi} \frac{\omega_3}{\omega_2 - \omega_3}, 1, 1, e^{i2\pi} \frac{\omega_3}{\omega_2 - \omega_3}$

Theorie m. Floquet multiplikatoren geht etw. können hier die beschriebene System weil das 3 Körperproblem ein reversibles System ist

$\ddot{\eta}_k + 2i\alpha \dot{\eta}_k - \alpha^2 \eta_k = -(d+\beta)^2 \eta_k \quad k=2 \quad \beta=0$   
 $k=3 \quad \beta = (\alpha_3 - \alpha_2)$

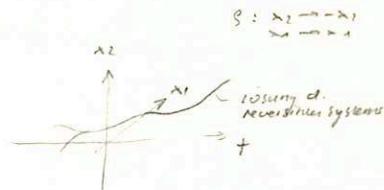
ist reversibles System

$\exists$  period. Lösung falls  $\frac{\alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_2}, \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_3}$  nicht ganz

$\dot{x} = f(x)$  löst reversibel bez.  $\mathcal{S}$   
 $\mathcal{S}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 $\mathcal{S}^2 = Id$   
 $E_{\mathcal{S}} = \ker(\mathcal{S} - I) \quad E_{\mathcal{S}} \oplus E_{-\mathcal{S}} = \mathbb{R}^n$   
 falls  $\mathcal{S}^{-1}f(\mathcal{S}x) = -f(x)$   
 d.h.  $(t, x) \rightarrow (-t, \mathcal{S}(x))$  löst  $\dot{x} = f(x)$  invariant

$x(t)$  Lösung  $\rightarrow \mathcal{S}(x(-t))$  Lösung  
 $\mathcal{S}^{-1} \circ e^{tA} \circ \mathcal{S} = e^{-tA}$

$x \quad \dot{x} \quad f(x)$   
 $\mathcal{S}x \quad -\dot{x} \quad -f(x)$



$\mathcal{S}$  symmetrische Lösungen

$x(t)$   $\mathcal{S}$  symmetrisch, falls  $\mathcal{S}(x(-t)) = x(t)$

$x(t)$   $\mathcal{S}$  symmetrisch  $\Leftrightarrow x(t + \frac{T}{2})$   $\mathcal{S}$  symmetrisch  
 falls  $x(t + T) = x(t)$

$\Gamma \quad y(t) = \mathcal{S}(y(-t))$   
 $y(t + \frac{T}{2}) = y(t - \frac{T}{2})$   
 $\mathcal{S}y(t + \frac{T}{2}) = y(-t - \frac{T}{2}) = y(t + \frac{T}{2})$

Rem  $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$   
 $x = x^+ + x^-$   
 $\mathcal{S}x = x^+ - x^-$

$\Gamma$  wegen ! der Lösung

$x$  symmetrische Lösung  $\Rightarrow \mathcal{S}(x(0)) = x(0)$   
 $x(0) = 0$

Stoßmessung 13

$x$  symmetrisch  $\Leftrightarrow \mathcal{S}x(0) = x(0)$

Bsp  $\Rightarrow$  symmetrisch für  $t=0$

Bsp 3 Körper probl. symmetrisch bez.  $\mathcal{S}: z \rightarrow -z$   
 $\vec{z} \rightarrow -\vec{z}$

von period. Symm. Lösungen in der  $\mathcal{S}$  symmetrischen Lösung, falls  $\mathcal{S}$  reversibel

$\dot{x} = f(x, \varepsilon)$   $\mathcal{S}$  reversibel für  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$   
 $x = p_0(t) = p_0(t + 2\pi)$   $\mathcal{S}$  symmetrisch  
 und  $\xi = f_x(p_0(t))$  hat keine nichttriv.  $\mathcal{S}$  symmetrische Lösungen d. Periode  $2\pi$   
 $\Rightarrow \exists p(t, \varepsilon) = p(t + 2\pi, \varepsilon)$   $\mathcal{S}$  symmetrisch mit  $p(t, 0) = p_0(t)$

$\Gamma \quad x(t) := \varphi^t(x, \varepsilon)$   
 Suche  $x = x_+(0) = x_+ + x_-$  mit  $x_-(0) = 0 \quad x_-(\pi) = 0$   
 und  $\varphi^{\pi}(x^+, \varepsilon) = 0$   $L_3$   $L_2, L_3$

Für  $\varepsilon = 0$  Lösung geg. durch  $p_0(0) \in E^+$

$\Phi := d\varphi^t(p_0) = \begin{pmatrix} \phi_{+1}^t & \phi_{-1}^t \\ \phi_{-1}^t & \phi_{-1}^t \end{pmatrix}$

mit  $d\varphi^{\pi}(x_+, 0) = \Phi_{-1}^{\pi}$

$\det \Phi_{-1}^{\pi} \neq 0 \Leftrightarrow \#$

$\det \Phi_{-1}^{\pi} = 0 \Rightarrow \exists \xi^t \in E^+ \quad \Phi_{-1}^{\pi} \xi^t = 0$

$\xi^t = \phi_{-1}^t \xi(0) \quad \xi^t$  nicht trivial

$\det \Phi_{-1}^{\pi} \neq 0 \Rightarrow$  Floquet multiplikatoren  $\neq 1$  und einfach

$T$  hinreichend klein bei  $2\pi \Rightarrow \exists$  symmetrische period. Lösung von  $\dot{x} = f(x, \varepsilon)$  der Periode  $T$

$\Gamma \quad \lambda = 1 + i\varepsilon$   
 $\dot{x} = \lambda f(x, \varepsilon)$   
 $\frac{dx}{d\lambda} = f(x, \varepsilon)$



Frage nach Diagonalisierung des Systems:  $\dot{x} = JSx - Ax$   
 suchen hiermit  $\xi_j = u_j, \eta_j = -u_j$

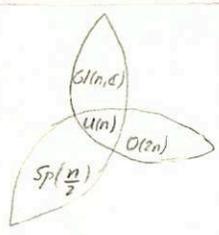
Diagon. in  $\mathbb{C}$

A verschied. EW  $\Rightarrow \exists U \in Sp(n, \mathbb{C}) \quad U^{-1}AU = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$   
 $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{C} \quad \langle u_j, u_j \rangle = -d_j$

S positiv definit  $\Rightarrow A$  diagonal

$(A-d)u = 0 \Rightarrow (A-B)u$   
 $[A, u] + [u, A] = 0 \Rightarrow [u, u] = 0$   
 $d_1 u_1 + u_1 = 0 \Rightarrow d_1 = -1$   
 erzwungen  $[u_j, u_j] = -1$   
 $u_j: e_j \rightarrow u_j$  symplektisch

Erkurs



$\exists$  unitäres Skalarprodukt in  $O(2n) \cap Sp(2n)$   
 $(\xi, \eta)_u := (\xi, \eta) + i[\xi, \eta]$

(i)  $O(2n) \cap O(n, \mathbb{C})$   
 $x_1, \dots, x_n$  i-orthonormal ist  
 $y_1, \dots, y_n$  symplektisch  
 etc

$Sp(2n, \mathbb{R}) \quad Sp(2n, \mathbb{C})$   
 $\rightarrow O(n) \rightarrow O(2n) \rightarrow U(n) \rightarrow U(2n) \rightarrow Sp(n)$   
 $Sp(n) \rightarrow Sp(2n) \rightarrow ?$   
 $Sp(2n, \mathbb{H})$

klassische Gruppen

- $O(n, \mathbb{R}) \supset O(n) = \{A \mid A \text{ löst } (,)_0 \text{ invariant}\}$
- $O(n, \mathbb{C}) \supset U(n) = \{A \mid A \text{ löst } (,)_c \text{ invariant}\}$
- $O(n, \mathbb{H}) \supset Sp(n) = \{A \mid A \text{ löst } (,)_H \text{ invariant}\}$

$(,)_c = (,)_I$  orthog. unitäre Spingr.

$O(n, \mathbb{C})$  in  $O(2n, \mathbb{R})$  einbettbar:  $U(n) \cong O(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{R})$   
 $G^T u u u G^* \quad IG = iG \rightarrow \begin{cases} G^T A G = I \\ G^T I G = I \end{cases} \quad \begin{cases} G \in O(2n, \mathbb{R}) \\ G^T I G = I \end{cases} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$O(n, \mathbb{H})$  in  $O(2n, \mathbb{C})$  einbettbar:  $Sp(n) \cong U(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{C})$   
 $\begin{cases} G \in O(2n, \mathbb{C}) \\ G^T J G = J \end{cases} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$   
 $G^T A G = I \quad G^T I G = I \quad G^T J G = J$

Skalarprodukt in  $\mathbb{R}$ :  $(x, y)$   
 Skalarprodukt in  $\mathbb{C}$ :  $(x, y)_c = (x, y)_0$   
 Skalarprodukt in  $\mathbb{H}$ :  $(x, y)_H = (x, y)_c$

$U(1) \cong SO(2)$   
 $U(2) \cong SO(4) / \mathbb{Z}_2$   
 $(U, I) \cong O(2) - Sp(2n, \mathbb{R})$

Das dynamische System spielt sich hier jedoch in restringierten Räumen ab. Wir bieten nur kanonische Trajektorien zur Verfügung, was bedeutet, dass wir eine Normalisierung des linearisierten Systems  $\dot{x} = JSx$  mit Elementen aus  $Sp(2n, \mathbb{R})$  erreichen müssen:

Satz hier d  
 linearisiert  
 itensystem  
 $-\frac{1}{2}(z, Sz)$   
 $-S^T$   
 $(y)$   
 $(z)$   
 $=0$   
 $z(0) = z$   
 System

Abhängig Normalform

$\exists U \in Sp(2n, \mathbb{R}) \quad h(u, v) = H(U(u, v))$  eine Summe von Termen der Form

1)  $J_k = u_k v_k \quad S_k = d_k \quad$  falls  $d_k = \bar{d}_k$

2)  $J_k = u_k v_k + u_k v_k + i(u_k v_k - u_k v_k) \quad S_k + iS_k = d_k \quad$  falls  $\bar{d}_k = d_k$   
 $+ S_k(u_k v_k - u_k v_k) \quad S_k - iS_k = d_k$

3)  $\frac{1}{2} S_k(u_k^2 + v_k^2) \quad i d_k = S_k \quad$  falls  $d_k = -\bar{d}_k \neq 0$

$J_k = \frac{1}{2}(u_k^2 + v_k^2)$   
 Integrale d. Bewegung

$-x \mid S_k x$   
 $x \mid \begin{matrix} x & d_k \\ y & i d_k \\ x & x d_k \end{matrix}$   
 $\begin{matrix} x & S_k \\ & x \end{matrix}$  harmonisch oscillator

Symplektische Matrizen im Quotienten  $d, \bar{d}, -d, \bar{d}$  usw

d.h. wir können  $H$  zwar nicht diagonalisieren, aber in folgende Normalform bringen

kann hier verschieben wählen Orientierung der Oszillation beim harmonischen Oszillator

$h(u, v) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} S_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & S_k & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & S_l & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & S_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$   
 unter  $Sp(2n, \mathbb{R})$

im komplexen Fall sind zwei Hamiltonische Systeme mit gleichen EW symplektisch äquivalent im reellen nicht!

$h(u, v) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_n & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -d_n & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$   
 unter  $Sp(n, \mathbb{C})$

$\Gamma$  nehmen komplexe Basis  $u_k \quad (A-d_k)u_k = 0 \quad [u_k, u_k]_{jH} = J_k$   
 $z = \sum \xi_j u_j = \sum \xi_j u_j + i \eta_j u_j \quad H = \sum d_j \xi_j \eta_j$   
 $\bar{z} = \sum \xi_j^* u_j + i \eta_j^* u_j$

	$u_k$	$v_k$	
1) $\bar{v}_k = u_k$	$\xi_k^* = \bar{\xi}_k, \eta_k^* = \bar{\eta}_k$	$\xi_k = u_k, \eta_k = v_k$	$d_k \xi_k \eta_k = S_k u_k v_k$
2) $\bar{v}_k = u_k + i v_k, \bar{u}_k = v_k + i u_k$	$\xi_k^* = \bar{\xi}_k, \eta_k^* = \bar{\eta}_k$	$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_k - i v_k), \eta_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_k - i u_k)$	$d_k \xi_k \eta_k + d_k \xi_k^* \eta_k^* = S_k(u_k v_k + u_k v_k) + S_k(u_k v_k - u_k v_k)$
3) $\bar{v}_k = i u_k + v_k$	$\xi_k^* = i \bar{\xi}_k, \eta_k^* = -i \bar{\eta}_k$	$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_k + i v_k), \eta_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_k + i u_k)$	$d_k \xi_k \eta_k = S_k(u_k^2 + v_k^2)/2$

$z = [u_k, i u_k]$   
 $c = [u_k, \bar{u}_k]$  rein Imag.  
 $u_k, c = i$

$(u, v) \rightarrow (\xi, \eta)$  ist symplekt. Trafo  
 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -i & & \\ & & 1 & \\ & & & -i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & i & & \\ & & 1 & \\ & & & i \end{pmatrix}$   
 reelles symplekt. Trafo

Hamiltonsches System als formale Potenzreihe

$H = H_2 + H_3(z) + \dots$  1)  $H_2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j \bar{z}_j$  oder entspr. reelle Form 2)  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 0 \rightarrow g_j = 0 \forall j$   
 $g_j \in \mathbb{Z}$   
 rationale Unabhängigkeit

kanonische Transformation als formale Potenzreihe:  
 $\xi \rightarrow z = \mathcal{Z}(\xi)$  mit  $\mathcal{Z}_\xi(\xi)$  symplektisch  
 $\mathcal{Z}(\xi) = \sum_{s \geq 1} \mathcal{Z}_s(\xi)$   $\mathcal{Z}_s(u, \bar{u}) = u^s \bar{u}^s$   
 harmonische Polynome  
 sei  $\mathcal{Z}$  die Umkehr d. formalen symplekt. Triads  
 $\tilde{u}_i = \mathcal{Z}^{-1} \circ \mathcal{Z}_i(\xi) - \xi$

Prinzip  $\exists \mathcal{Z} \in \mathcal{G}_1$   $H \circ \mathcal{Z} = K(\xi)$  Potenzreihe in

formale kanon. Triads

$\exists \mathcal{Z} \in \mathcal{G}_1$  alle  $H \circ \mathcal{Z}(\xi)$  ist Potenzreihe in  $J_1, \dots, J_n$   
 $H_2$  reell  $\rightarrow \exists \mathcal{Z} \in \mathcal{G}_1(\mathbb{R})$  mit

Hamiltonsches System bis zu beliebig hoher Ordnung integrierbar

Pfeil nach unten  
 nach viel  
 wo hergeleitet

Bsp

$id_H = \delta_H$  reell (3. Fall)  
 $k = k(J_1, \dots, J_n)$   $J_j = \frac{1}{2}(u_j^2 + v_j^2)$   
 Falls konvergiert:  $\dot{u}_k = \frac{\partial k}{\partial v_k} = \frac{\partial k}{\partial J_k} v_k = k_k v_k$   
 $\dot{v}_k = -\frac{\partial k}{\partial u_k} = -\frac{\partial k}{\partial J_k} u_k = -k_k u_k$   $\dot{J}_k = u_k \dot{u}_k + v_k \dot{v}_k = 0$   
 $u_k(t) = u_k(0) \cos(k_k t) - v_k(0) \sin(k_k t)$   
 $v_k(t) = u_k(0) \sin(k_k t) + v_k(0) \cos(k_k t)$   
 stabil

Bsp

$id_H = \delta_H$  (1. Fall)  
 $J_j = u_j v_j$   
 $\dot{u}_k = \frac{\partial k}{\partial v_k} = \frac{\partial k}{\partial J_k} u_k$   
 $\dot{v}_k = -\frac{\partial k}{\partial u_k} = -\frac{\partial k}{\partial J_k} v_k$   
 $u_k(t) = e^{\frac{\partial k}{\partial J_k} t} u_k(0)$   
 $v_k(t) = e^{-\frac{\partial k}{\partial J_k} t} v_k(0)$   
 instabil

nach einem Satz von Moser kann man hier  $\mathcal{Z}$  konvergieren machen.

Bsp

$id_H = \bar{d}_e$  (2. Fall)  $J_k = u_k v_k + u_l v_l$   
 $J_l = u_l v_l - u_k v_k$   
 $\dot{u}_k = \frac{\partial k}{\partial v_k} = \frac{\partial k}{\partial J_k} u_k + \frac{\partial k}{\partial J_l} (-v_l)$   
 $\dot{v}_k = -\frac{\partial k}{\partial u_k} = -\frac{\partial k}{\partial J_k} v_k - \frac{\partial k}{\partial J_l} v_l$   
 $\dot{u}_l = \frac{\partial k}{\partial v_l} = \frac{\partial k}{\partial J_k} u_k + \frac{\partial k}{\partial J_l} u_l$   
 $\dot{v}_l = -\frac{\partial k}{\partial u_l} = -\frac{\partial k}{\partial J_k} v_l + \frac{\partial k}{\partial J_l} v_k$   
 $\dot{\vec{x}} = (A+B) \vec{x}$   
 $\vec{x}(t) = e^{(A+B)t} \vec{x}(0) = e^A e^B \vec{x}(0)$   
 $\begin{pmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{u}_l \\ \dot{v}_k \\ \dot{v}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_k & -k_l \\ k_l & k_k \\ -k_k & -k_l \\ k_l & -k_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ u_l \\ v_k \\ v_l \end{pmatrix}$   
 $u_k = u_k(0) \cos(k_k t) + u_l(0) \sin(k_l t) e^{k_k t}$   
 $u_l = u_k(0) \sin(k_k t) e^{k_k t} + u_l(0) \cos(k_l t) e^{k_l t}$   
 $v_k = -v_k(0) \cos(k_k t) e^{-k_k t} + v_l(0) \sin(k_l t) e^{-k_l t}$   
 $v_l = v_k(0) \sin(k_k t) e^{-k_k t} + v_l(0) \cos(k_l t) e^{-k_l t}$

Stabilität der Ordnung  $s^*$

$H$  stabil der Ordnung  $s^*$  falls  $\exists \tilde{H}$  stabil unter  $\mathcal{F}$  Störung  
 $H - \tilde{H} = \sum_{s \geq s^*} H_s = o_{s^*}$

Differentialformen

$d_2 = \sum_{i,j=1}^{2n} a_{ij}(z) dz_i \wedge dz_j$   $dz_i \wedge dz_j = -dz_j \wedge dz_i$   
 $a_{ij} = -a_{ji}$   
 $d_2: (TM \times TM) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $v = \sum v_j \frac{\partial}{\partial z_j}$   $w = \sum w_j \frac{\partial}{\partial z_j}$  Vektorfelder auf  $M$   
 $d_2(v, w) = \sum_{i,j=1}^{2n} a_{ij}(v_i w_j - v_j w_i)$

$\sum a_{ij} dz_i \wedge dz_j \in T^*M \otimes T^*M$  kovariante Tensoren auf  $M$   
 bilden das schief-symmetrische Tensorprodukt:  
 $\sum a_{ij} dz_i \wedge dz_j \in \mathcal{O}_M \otimes \mathcal{O}_M$   $\mathcal{O}_M = 1$   
 $\sum_{i,j} a_{ij} dz_i \wedge dz_j = \sum_{i,j} (a_{ij} dz_i \otimes dz_j - dz_j \otimes dz_i)$   
 $= \sum_{i,j} (a_{ij} - a_{ji}) dz_i \wedge dz_j$   
 $= \sum_{i,j} a_{ij} dz_i \wedge dz_j$   
 ist ein schief-symmetrischer Tensor 2. SA

Information 2 Formen

$$z = u(\xi)$$

$$d_2 = \sum_{i,j} a_{ij} dz_i \wedge dz_j \quad A = a_{ij}$$

$$u_x d_2 = B_2 = \sum_{i,j} b_{ij}(\xi) ds_i \wedge ds_j \quad B = b_{ij}$$

$$B(\xi) = u_\xi^T A(u(\xi)) u_\xi \quad \text{(Maße von Röhrenformen)}$$

Spezielle 2 Form  $\omega$

$$A = -\frac{1}{2} J$$

$$\omega = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} dz_i \wedge dz_j$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} dz_i \wedge dz_{j+n} - dz_{i+n} \wedge dz_j$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} dz_i \wedge dz_j - dx_j \wedge dy_i$$

$$= \sum dy_i \wedge dx_j$$

Bem

$$u \text{ symplektisch} \Leftrightarrow u^* \omega = \omega$$

iboux :

$$d_2 \text{ geschlossene nicht entartete 2 Form} \Rightarrow \exists ? \text{ lokal triviale } \gamma^* \alpha_2 = \omega$$

cor

Hamiltonsche Flüsse erzeugten symplektische Struktur ?

Dirakter Beweis des cor :  $0 = \int d\omega^2 = \int \omega^2 = \int (-\dot{f} - \dot{g}) \omega^2 = \int (-\dot{f} - \dot{g}) \omega^2$

$$\int_{\partial c} \omega^2 = \int_c \frac{d}{dt} \int \omega^2 dt$$

$$= \int_0^1 \int_{\partial c} dH dt = 0$$

sonst lamme integrale

$$X_H := \sum H_{y_i} \frac{d}{dx_i} - H_{x_i} \frac{d}{dy_i} = \sum x_i \frac{d}{dx_i} + y_i \frac{d}{dy_i}$$

Wektorfeld in Flussform. erzeugt

$$\{F, H\} := X_H F = (H_{y_i} F_{x_i} - H_{x_i} F_{y_i}) = -X_H H = -\frac{d}{dt} F(\gamma_H^t(x))_{t=0}$$

$$\{F, H\} = 0 \quad F \text{ heißt Integral von } X_H$$

allgemeinere Sicht :  $\omega^2$  symplekt. nicht deg 2 Form  
 $\omega_\xi^2(n) = \omega^2(n, \xi)$  assoziierte 1 Form  
 $J : T^*M \rightarrow TM$   
 $\omega_\xi^2(n) \rightarrow \xi$

$$X_H F = dF(JX_H) = -\omega^2(JX_H, JX_H) = \{F, F\} = 0$$

sonstkomme Vektorfelder

$L$  Vektorfeld auf  $M$   
 $L_A$  zugehörige Derivator  
 $[A, B] := C$  falls  $L_C = [L_A, L_B] = L_{[A, B]}$  (Kommutator)

$$L_A = \sum A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$L_B = \sum B_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$[L_A, L_B] = \sum_{i,j} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} - B_j \frac{\partial}{\partial x_j} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{i,j} (A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} - B_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Bem

$$\omega_A^t, \omega_B^t \text{ kommutieren} \Leftrightarrow [A, B] = 0$$

$A, B$  Hamiltonsche Vektorfelder  $A = JdH$   
 $B = JdK$   
 $[A, B] = C \quad C = Jd\{F, G\}$

$$u \text{ symplekt.} \Leftrightarrow \{F \circ u, G \circ u\} = \{F, G\} \circ u$$

endere : 5.20.1

$\tau$  kanonische Trielo  $\tau(\xi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$  lokal gilt  $\xi_j = a_j(x, \eta) = \frac{\partial V(x, \eta)}{\partial \eta_j}$   
 $\eta_j = b_j(x, \eta) = +\frac{\partial V(x, \eta)}{\partial x_j}$

$$\int \xi d\eta + \eta dx = dV$$

da  $d\xi \wedge d\eta = dy \wedge dx$  Liouville

cor

$\tau \in G_1 \Rightarrow \tau$  lässt sich darstellen als formale Potenzreihe  $V(\xi, \eta) = V_1 + \dots$

$$V_2 = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j$$

$\bar{\tau}$  in Koordinaten  $x, y$  gilt ebenfalls  $V_1(x, y) = \sum x_i y_i - 1$

$\mathcal{A} = \{H\} = \{H\}$  Lie Algebra d. formalen Potenzreihen von Hamilton Funktionen

$\mathcal{G} = \{\tau\} = \{F, G\}$  Umkehr d. formalen symplektische Diffeomorphismen  $\mathcal{G}$  wirkt auf  $\mathcal{A}$  :  $H \circ \tau \in \mathcal{A}$

$$Q(z) = \sum_{j=1}^n a_j z_j \bar{z}_{j+n} = H_2(z)$$

nahem gesehen  $\exists \tau$  symplektisch  $z = \tau(u, v)$  sodass

$$Q(z) = H_2(\tau(u, v)) = \sum g_j J_j$$

$\mathcal{N} := \{H \in \mathcal{A} \mid \{H, G\} = 0\}$  Zentralisator von  $\mathcal{G}$  in  $\mathcal{A}$  ist Unterliealgebra

Satz

$$H = Q + H_3 + \dots \in \mathcal{A}$$

$$Q \text{ halbeinfach} \Rightarrow \exists \tau \in \mathcal{G}_1 \quad H \circ \tau \in \mathcal{N}$$

im Falle v. Nichtresonanz:  $[H, \mathcal{N}] = 0$  (kanonisch Liealgebra)

Implizit obigen Satz

Einschränkung:

im Allgem. ist  $\tilde{\tau}$  aber überlegt, sodass wir ein Ham System nur beliebig genau integrieren können.

Lemma

$$\tau(\xi) = \xi + \tau_{s-1}(\xi) + \dots \in \mathcal{G}_1 \iff \exists \omega \in \mathcal{P}_s \quad \tau_{s-1} = J\omega\xi$$

$$\tau^T \tau^T J \tau \tau = (I + \tau_{s-1}'(\xi) + \dots)^T J (I + \tau_{s-1}'(\xi) + \dots) \quad \tau_{s-1}' = \frac{\partial \tau_{s-1}}{\partial \xi}$$

$$= J + \tau_{s-1}^T(\xi) J + J \tau_{s-1}'(\xi) + \dots = J$$

" $\Rightarrow$ "  $J \tau_{s-1}'(\xi) = (J \tau_{s-1}'(\xi))^T$  ist symmetrisch

$$\Rightarrow (J \tau_{s-1}')_{ij} = (J \tau_{s-1}')_{ji}$$

$$\frac{\partial \vec{q}_i(\xi)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \vec{q}_i(\xi)}{\partial \xi_j} \Rightarrow \vec{q}_i(\xi) = \frac{dW}{d\xi_i}$$

in  $\mathbb{R}^2$   $\text{rot } \vec{q} = 0 \Rightarrow \vec{q} = \text{grad } W$

$$\omega_1 \quad d\omega_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = dW$$

$$\Leftarrow \tau_{s-1} = J\omega\xi$$

definiert  $V(x, \eta) := (x, \eta) + \omega(x, \eta)$

ist Erzeugendengeneration zu symplektischer Arb.

Anzahl 5.270

(für  $y_i - \eta_i$  infinitesimal ist  $\omega_x$  die kanonischen Funktion d.)

$$y_i = V_{x_i}(x, \eta) = \eta_i + \omega_{x_i}$$

$$\xi_i = V_{\eta_i}(x, \eta) = x_i + \omega_{\eta_i}$$

$\tau(\xi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  definiert durch Abbild.  $V$

$$x_i = \xi_i - \omega_{\eta_i} + \dots$$

$$y_i = \eta_i + \omega_{x_i} + \dots$$

diese Trafo ist in  $\mathcal{G}_1$   
 $\tau_{s-1} = J\omega\xi$

Satz

Induktiv nach s

$$H = Q + N_2 + \dots + N_{s-1} + H_s + \dots$$

mit  $N_\sigma \in \mathcal{N}$   $6 \leq s$

suchen  $\omega \in \mathcal{P}_s$  mit  $\tau = \xi + \tau_{s-1} + \dots \in \mathcal{G}_1$   
 $\tau_{s-1} = J\omega\xi$

so dass  $K = H \circ \tau = Q + N_2 + \dots + N_{s-1} + K_s + \dots$  mit  $K_s \in \mathcal{N}$

$$\text{Beh } \boxed{K_s = H_s - \xi Q \omega \xi}$$

$$H(x, V_x(x, \eta)) = K(V_{\eta_i}, \eta) \quad (\text{wegen } x)$$

$$H(x, \eta + \omega_x) = K(\xi - \omega_{\eta_i}, \eta)$$

verglichen nur Terme vom Grad s

$$H(x, \eta + \omega_x) \text{ hat Terme vom Grad } s: \left. \begin{matrix} H_s(x, \eta) + Q_{xy} \omega_x \\ K(\xi - \omega_{\eta_i}, \eta) \text{ hat Terme vom Grad } s: \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} K_s = H_s - \xi Q \omega \xi \\ K_s(\xi, \eta) - Q_x \omega_{\eta_i} \end{matrix} \right\}$$

Definierten Operator L:  $\mathcal{P}_s \rightarrow \mathcal{P}_s$

$$\omega \mapsto \xi Q \omega \xi$$

$\ker L = \mathcal{N}_s$

$$\omega(\xi) = \mathcal{P}_s$$

$$\boxed{\mathcal{P}_s = \mathcal{N}_s + \mathcal{R}_s \quad \mathcal{N}_s + \mathcal{R}_s = \mathcal{O}}$$

$$\alpha_i x^k y^l = \sum_j \pi_{ij} k_j y_j \quad k_j \in \mathcal{P}_s$$

$$\mathcal{O} = \sum \alpha_{ij} x_i y_j$$

$$L(x^k y^l) = \sum \alpha_{ij} (l_j - k_j) x^k y^l$$

Eigenwerte

$$\mathcal{N}_s = \langle x^k y^l \mid \alpha(k-l) = 0 \rangle$$

$$\mathcal{R}_s = \langle x^k y^l \mid \alpha(k-l) \neq 0 \rangle$$

$\pi: \mathcal{P}_s \rightarrow \mathcal{N}_s$  Projektion

$$\pi(\omega) = \mathcal{N}_s \quad \omega = \mathcal{N}_s + \mathcal{R}_s$$

$$L(\omega) = \mathcal{R}_s - \mathcal{H}_s = \mathcal{H}_s - \pi \mathcal{H}_s \in \mathcal{R}_s$$

d.h wählen  $K_s = \pi \mathcal{H}_s \in \mathcal{N}_s$

$$L\omega = \mathcal{R}_s = \omega \quad \text{wird eindeutig mit } K_s \in \mathcal{N}_s$$

zu Satz 1

$d_i$  rational unabhängig (Nichtresonanz)

$$\rightarrow \mathcal{N}_s = \langle x^k y^l \mid k=l \rangle$$

d.h  $\mathcal{N}$  ist  $\xi$  formale Potenzen in  $x_1 y_1, \dots, x_n y_n$

$\xi$  formale Potenzen in  $J_1, \dots, J_n$  im reellen Fall

$$\xi \mathcal{N}_s = \mathcal{O} \quad \text{Cauchy u. Algebra}$$

annahme  
lung

$\dot{z} = JH_z(z) \quad H_z(0) = 0$   
 $H = H_2 + H_3 + \dots \quad H_2 = \sum_{i,j=1}^n d_{ij} x_i y_j$  *JH<sub>2</sub> diagonal*  
 $\exists \tau \in \mathbb{R}$  normale (ia nicht homo. Trafo)  
 $N = H_0 \tau \quad \{N, H_2\} = 0$   
 $M = \{N \mid \{N, H_2\} = 0\} = \text{span} \{x^k y^l \mid (k,l) \neq 0\}$  *falls  $d_{ij}$  rational unabhängig*  
 d.h.  $x_i, y_i$  sind Integral  
 falls  $d_{ij} = g_i$  reell  
 $H_2 = \sum_{i,j} g_i (u_i^2 + v_i^2)$   
 Stabilität:  $g_i$  rational unabh.  
 $\Rightarrow N$  ist Polynom in  $J_i = u_i^2 + v_i^2$

Satz  
 $g_i$  rational unabhängig  
 $\Rightarrow \exists n$  normale Polynomfunktionen  
 $\tilde{J}_i = u_i^2 + v_i^2 + \dots$  sodass  
 $\{H, \tilde{J}_i\} = 0 \quad \{\tilde{J}_i, \tilde{J}_j\} = 0$

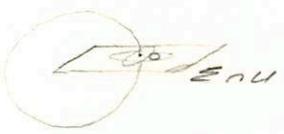
$\Gamma \quad \tilde{J}_i = J_i \circ \tau^{-1}$   
 $0 = \{N, \tilde{J}_i\} = \{H_0 \tau, \tilde{J}_i \circ \tau\} = \{H_1, \tilde{J}_i\} \circ \tau$   
 $0 = \{J_i, \tilde{J}_i\} = \{J_i \circ \tau, \tilde{J}_i \circ \tau\} = \{J_i, \tilde{J}_i\} \circ \tau$

von  
Stabilität

$\sum g_i g_i = 0 \quad g_i \in \mathbb{N} \cdot (0,1)$   
 $H = \sum_{i,j=1}^n d_{ij} x_i y_j + \bar{c} x^2 + \bar{c} i^{-1} |y|^2$   
 instabil, falls  $\bar{c} \neq 0$   
 $\dot{x}_i = H_{x_i} = d_{ij} x_j + \bar{c} x_i i^{-1} |y|^2 = x_i (d_{ij} + \bar{c} i^{-1} |y|^2)$

Untersuchen Stabilität, im Falle der Existenz von periodischen Lösungen  $P(t) = P(t+T)$  von  $\dot{z} = JH_z$

$\dot{z} = JH_z \quad z = P(t) - P(t+T)$  Lösung mit  $\dot{P}(t) \neq 0$   
 $H(P(t)) = \text{const} = 0$  o.d.A  
 $\Sigma = \{z \mid H(z) = 0 \quad g(z) = 0\} \quad \mathcal{L}: \Sigma \cap U \rightarrow \Sigma \quad \mathcal{L}(0) = 0$   
 o.d.A  $P(0) = 0 \quad H_y(0) \neq 0 \quad g(z) = x_1 \quad \dot{x}_1(0) = H_{y_1}(0) \neq 0$  (transvers. Sect.)  
 $\dim \Sigma = 2n-2$   
 mit Parametrisierung  $x_j, y_j \quad j=2, \dots, n \quad x_1 = 0 \quad y_1$  aus Bed.  $H=0$  aufgelöst  
 $\omega_2 = \sum_{j=2}^n d_{jj} dy_j \wedge dx_j$  symplektische Form auf  $\Sigma$



ist  
symplekt

$\mathcal{L}: \Sigma \cap U \rightarrow \Sigma$   
 $\mathcal{L}(0) = 0 \quad \Sigma = \{z \mid H(z) = x_1 = 0\}$   
 $\dot{x}_1(0) \neq 0$   
 $\mathcal{L}$  ist symplektisch

$d\mathcal{L}(0) = \Lambda \in \text{Sp}(2n-2) (\mathbb{R})$

$\omega_2 = y dx - H dt \quad (x,y) \in \mathbb{R}^{2n+1}$   
 $\omega_2 = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n - dH dt$

$\omega_2$  heißt Integral invariante von Poincaré-Cartan

$\nu$  heißt Nullvektor, falls  $\omega_2(\nu, \nu) = 0$  bzw

kein von  $\omega_2$  assoziiertes

Beim  $\exists$  Nullvektor in ungeraden Dimensionen

$\omega_2$  heißt nicht-singulär, falls Dimension  $\dim U$  Nullvektoren minimal ist

Falls  $n$  ungerade,  $\omega_2$  nicht-singuläre Form  $\Rightarrow$  Nullvektor, der Charakteristixalgleichung vollständig bestimmt.

1 ungerade  
0 gerade

Null Ableitung der Cauchy Poincaré Form gegeben durch Lösung d. Hamilton. Systems

$$V = \frac{d}{dt} + \sum_{i=1}^n y_i \frac{d}{dx_i} + v_{i+n} \frac{d}{dy_i} \quad \text{im Kern von } \omega$$

$$\rightarrow v_i = Hy_i$$

$$v_{i+n} = Hy_i$$

$$\Gamma \quad v = \frac{d}{dt} + \sum_{i=1}^n (Hy_i \frac{d}{dx_i} - Hy_i \frac{d}{dy_i})$$

$$= \frac{d}{dt} + \sum_{i=1}^n y_i \frac{d}{dx_i} - \sum_{i=1}^n y_i \frac{d}{dy_i}$$

$$\omega_2(v, \cdot) = i_{\Gamma} \omega_2 = v_{i+n} dx_i - v_i dy_i = -Hy_i v_j + Hy_j v_{i+n} = 0 \quad \text{für } v_i = Hy_i, v_{i+n} = Hy_i$$

Cauchy

$$\int_{\partial \Sigma} \omega' = \int_{\Sigma} \omega' \quad \text{falls } \partial \Sigma = \emptyset \quad \text{oder Stück d. Nullfläche}$$



$$\int_{\partial \Sigma} \omega' - \int_{\Sigma} \omega' = \int_{\partial \Sigma} \omega' = \int_{\partial \Sigma} d\omega' = 0$$

Beweis, dass  $\omega$  Poincaré Abh. symplektisch ist:

$$\int_{\partial \Sigma} \sum_{i=1}^n y_i dx_i - H dt = \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^n y_i dx_i - H dt$$

aus Cauchy für Poincaré Cauchy Integral invariant

$$\int_{\partial \Sigma} y_i dx_i = \int_{\partial \Sigma} y_i dx_i = 0$$

$$\rightarrow \int_{\partial \Sigma} \sum_{i=1}^n y_i dx_i = \int_{\partial \Sigma} \sum_{i=1}^n y_i dx_i$$

Anwendungen der Integralinvariant von Poincaré-Cauchy

Prinzip der kleinsten Wirkung

$\int p dq - H dt$  ist extremal für die Trajektorie die  $\dot{x} = \partial H_x$  erfüllt und  $q_0 = (t_0, q_0)$   $q_1 = (t_1, q_1)$

$$\Gamma \int (p \dot{q} - H) dt = \int (p \dot{q} + p \dot{q} - H p \dot{p} - H q \dot{q} - p \dot{p} q)$$

$$= \int (p + H q) \dot{q} + (q - H p) \dot{p} dt = 0$$

Prinzip der kleinsten Wirkung in der Form des Rayleighs Sub Lagrange-JACOBI

$H = H(p, q) = h$  konst.  $\rightarrow$  Trajektorien der Integralkurven die auf  $M^{2n-1}$   $H(p, q) = h$  liegen sind Extremale d. Integrals  $\int p dq$  unter allen Kurven, die  $q_0$  mit  $q_1$  verbinden in  $M^{2n-1}$

Betrachten Projekt. auf  $q$  Raum  $\int (\cdot)$  Parametris  $\dot{q} = \frac{d}{dt} q(t)$   $p = \frac{d}{dt} p(t)$   
Unter allen Kurven im  $q$  Raum die  $q_0$  mit  $q_1$  verbinden und so parametrisiert sind, dass  $h$ -konst. ist die Trajektorie d. Integralkurve ein Extremum der reduzierten Wirkung  
 $\int p dq = \int p \dot{q} dt = \int \frac{d}{dt} q \cdot \dot{q} dt$

Anwendung: Massenpunkt auf glatter Riemannsche Mannigfaltigkeit

Ein Massenpunkt auf einer glatten Riemannschen Mannigfaltigkeit bewegt sich auf Geodäten

$$\Gamma \quad H = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad \text{kinet. Energie} \quad ds = \frac{ds}{\sqrt{2h}}$$

$$\frac{d}{dt} \dot{q} = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = p \dot{q} = 2H$$

$$\int \frac{d}{dt} \dot{q} ds = \sqrt{2h} \int ds \quad \text{Extremal}$$

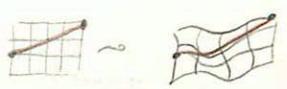
Anwend. auf symplekt. Mannigfalt.

$U(q) < h$   
 $ds = \sqrt{h - U(q)}$  d. definiert Riemann Mannigfaltigkeit Trajektorien sind Geodäten dieser

$$\int \frac{d}{dt} \dot{q} ds = \int \sqrt{2h} ds = \sqrt{2h} \int ds$$

Anwendung auf Doppelpendel und Kreis

$h > U \Rightarrow ds$  hat keine Singularitäten  
konfig. Doppelpendel:  $T^2$  Torus  
konfig. Kreis:  $S^1$   
In beiden Räumen existieren nicht kontraktible geschl. Kurven und unter ihnen existieren genau ein kettenartig Riemannsche Mannigf., die vorgegeben ist.  
d.h. Pendel: Es existieren  $\infty$  viele nichttriviale periodische Bahnen  $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$   
Kreis: Es existiert mindestens eine periodische Bahn  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$



vgl. Poincaré

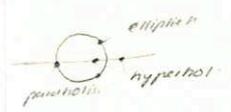
2-dimensionale symplektische Abb.

$n=2$  symplektisch lokal initialstreu

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \Big|_{x,y=0} \quad \lambda^2 - (f_x + g_y) \lambda + 1 = 0$$

$$\det A = 1 \quad \lambda \text{ EW} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \text{ EW}$$

3 möglichen Typen für EW:



$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det A^T - \lambda I \\ &= \det(JA^T J^T - \lambda I) \\ &= \det(JA^T J^T - \lambda I)^T \\ &= \det(-\lambda^{-1} - \lambda I) \end{aligned}$$

im elliptischen Fall: Stabilität (da sich sonst EW trennen müssten) falls einfache EW. Mehrfache EW können sich aufheben

Normalform einer 2-dim symplekt. Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} \\ \exists \mathcal{R} \in \mathcal{G}_1 \quad \text{rot} : \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda e^{i\alpha(u,v)} & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} e^{-i\alpha(u,v)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ a &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j (u^2 + v^2)^j \end{aligned}$$

Birkhoff 1920

$$\begin{aligned} |\lambda| = 1 \quad \lambda^m \neq 1 \quad m \leq 2 \cdot 10^3 \\ \exists \mathcal{R} \in \mathcal{G}_1 \quad \text{rot} : \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha(u,v) & -\sin \alpha(u,v) \\ \sin \alpha(u,v) & \cos \alpha(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ a &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j (u^2 + v^2)^j \end{aligned}$$

Reichert wie bei hermiteschen Systemen

Schrieffer

$$\begin{aligned} |\lambda| = 1 \quad \lambda^m \neq 1 \quad m \leq N \\ \exists \mathcal{R} \in \mathcal{G}_1 \quad \text{rot} : \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha(u,v) & -\sin \alpha(u,v) \\ \sin \alpha(u,v) & \cos \alpha(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + O_N \\ a &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j (u^2 + v^2)^j \end{aligned}$$

lokale Poincaré

$a_j \neq 0$  für ein  $j$  zwischen 1 und  $\frac{N-2}{2}$   
 $\Rightarrow \exists$  unendliche periodische Bahnen in jeder Umgebung von  $u=v=0$

speziell  $a_1 \neq 0 \quad N=4 \quad a = 2\pi(\alpha + \beta(u^2 + v^2))$   
 $a_0 = 2\pi\alpha \quad a_1 = 2\pi\beta$   
 o.d.A.  $\beta > 0$  sonst kehren wir  $\varphi$  um

Mit Birkhoff: Satz ist klar:

$\varphi^{-1}$  lässt dann konzentrische Kreise um  $(0,0)$  fix damit wir Ringform erhalten, muss für  $\alpha$

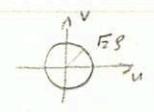
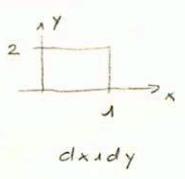
$$(1 + \beta(u^2 + v^2)) \varphi = \rho \text{ ganz sein} \\ \text{d.h. } \beta(u^2 + v^2) = \frac{\rho}{\alpha} - \alpha > 0$$

wählen also für vorgegebenes  $\rho$   $\frac{\rho}{\alpha} > \alpha \quad u^2 + v^2 = \frac{\rho - \alpha}{\beta} \quad (x)$   
 und  $v$  so, dass  $(x)$

im allgemeineren Fall machen wir eine Variablentransf.

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{y} \cos(2\pi x) & 0 < y < 2 \\ v &= \sqrt{y} \sin(2\pi x) & \text{und damit } u^2 + v^2 < 2y^2 \\ dudv &= -\pi y^2 dx dy & du &= \frac{y}{2\sqrt{y}} \cos 2\pi x dy - \sqrt{y} \sin 2\pi x 2\pi dx \\ & & dv &= \frac{y}{2\sqrt{y}} \sin 2\pi x dy + \sqrt{y} \cos 2\pi x 2\pi dx \\ & & du dv &= -\pi y^2 dx dy \end{aligned}$$

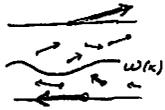
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + (\alpha + \beta(u^2 + v^2)) y \\ y \end{pmatrix} + O(y^3) \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi(\alpha + \beta(u^2 + v^2))) & -\sin(2\pi(\alpha + \beta(u^2 + v^2))) \\ \sin(2\pi(\alpha + \beta(u^2 + v^2))) & \cos(2\pi(\alpha + \beta(u^2 + v^2))) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O_N$$



$$\begin{aligned} du dv &= -\pi y^2 dx dy \\ u &= \sqrt{y} \cos 2\pi x \\ v &= \sqrt{y} \sin 2\pi x \end{aligned}$$

Lemma

Wächst zu  
Satz von  
Poincaré  
Birkhoff



$$\begin{aligned}
 \varphi: \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(x_j, y_j) \\ g(x_j, y_j) \end{pmatrix} & f(x_1, y_1) &= f(x_1, y_1) + d & \frac{df}{dx} &= 1 \\
 & & g(x_1, y_1) &= g(x_1, y_1) & & \\
 & & f(x_0) &= 0 & & \\
 \end{aligned}$$

$\varphi$  Diffeomorphism in  $(0, \pi/2)$  mit  
 1)  $f(x_0) - x < 0 < f(x_1) - x$   
 2)  $f_y(x, y) > 0$   
 $\Rightarrow \varphi$  hat in  $(0, \pi/2)$  mindest. 2 Fixpunkte

$f(x, y) - x$  ist monoton wachsend  
 für  $y=0$  negativ für  $y=\pi/2$   
 d.h.  $f(x, y) - x = 0$  für  $y = w(x)$   
 $w(x+1) = w(x)$   
 $x_1 = f(x, w(x)) - x$   
 $w \in (w(x) \cap w(x))$  hat mindestens  
 2 Elemente da diese Abb.  
 flächenerhaltend ist.

Wir wollen nun dieses Lemma anwenden.

$$\varphi^j := \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_{j-1}) \\ g(x_{j-1}, y_{j-1}) \end{pmatrix}$$

wollen für ein gegebenes  $L > d$  einen Fixpunkt von  $\varphi^q$  erhalten d.h.

$$\begin{aligned}
 f^q(x, y) &= x + p \\
 g^q(x, y) &= y
 \end{aligned}$$

Wähle  $q$ , Bestimme nun das einseitig gegebene  $p$ , sodass  $1 \leq (L-d)q \leq 2$   
 Falls wir  $q$  genügend gross gewählt haben, können wir  $p$  so bestimmen, dass  
 $3 \leq \beta \beta^2 q \leq 4$

Lemma

$$\begin{aligned}
 x_j &= x - j(d + \beta \beta^2 y) + O(\beta^3) \\
 y_j &= y + O(\beta^3) \quad \text{für } j=1, 2, \dots, q
 \end{aligned}$$

daraus folgt für  $0 \leq y \leq 1$  und  $\beta$  klein genug  $0 \leq y_j \leq 1 + O(\beta^3) < 2$

$$\begin{aligned}
 \Gamma \quad y_{k+1} - y_k &= O(\beta^3) \\
 \sum_{k=0}^j (y_{k+1} - y_k) &\leq q \cdot O(\beta^3) = O(\beta^3) \quad \text{da } \beta^2 q < \frac{4}{\beta} \\
 |x_{k+1} - x_k - (d + \beta \beta^2 y_k)| &\leq \beta \beta^2 (y_k - y_0) + O(\beta^3) = O(\beta^3)
 \end{aligned}$$

Beweis Satz: Zeigen  $\varphi^q$  erfüllt Bedingungen d. Lemmas. wir haben dann für jedes  $y \in \mathbb{R}^2$  mind. 2 Fixpunkte.

$$1) \quad f^q(x, y) - x - p = \begin{cases} qd - p + O(\beta^3) & \text{für } y=0 \\ qd - p + q\beta\beta^2 + O(\beta^3) & \text{für } y=1 \end{cases}$$

$$2) \quad \left\| \begin{pmatrix} f^q_x & f^q_y \\ g^q_x & g^q_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & q\beta\beta^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = O(\beta^3)$$

$$f^q_y = q\beta\beta^2 + O(\beta^3) > 2 > 0$$

Zusammenfassung u.  
Folgerungen aus diese.  
2 Dimensionen  
Resultieren

Gegeben ist ein Hamiltonsches System im  $\mathbb{R}^4$ :  $x = \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ q_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$   $\dot{x} = JH_x(x)$   
 Gibt es eine periodische Lösung des Systems  $p_t = p_t + T$   
 für die die Eigenwerte von  $dH_x$   $\lambda$  gilt  $|\lambda| = 1$   $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4 \neq 1$   
 so gibt es für eine genügend kleine Änderung der  
 Anfangsbedingungen unendlich viele periodische Lösungen.

Früher haben wir gesehen: Ist das Hamiltonsche System ein gestörtes  
 Hamiltonsches System, wo im linearisierte System d. Floquetmultiplikator  
 nur einfach vorkommt,  
 so existiert auch im gestörten System eine periodische Lösung.

monotone Twistabbildungen  
Satz von Poincaré Birkhoff

Top von -  
Schwarte  
rot

$\tilde{Q}$  Homöomorphismus eines Kreisringes  $a < u < v < b$ , sodass Orientierung, Rand, Inhalt erhalten werden und alle Ränder in entgegengesetzte Richtung gerichtet werden (Twist) gibt es mindestens 2 Fixpunkte von  $\tilde{Q}$  in  $A$ .

Tup:  $u = \sqrt{y} \cos 2\pi x$   
 $v = \sqrt{y} \sin 2\pi x$   $a < y < b$

$x_1 = f(x, y) + h$   
 $y_1 = g(x, y)$

$\tilde{e}$  wieder  
 $m = \max_x (f(x, a) - x) < \min_x (f(x, b) - x) = M$   
dann hat  $\tilde{Q}$  unendlich viele period. Bahnen.

$\Gamma$  wählen  $q, p$  so, dass  $q_m \leq p \leq q_M$   
 $\max_{j=0}^{q-1} (f(x, a) - x) \leq \sum_{j=0}^{q-1} (f(x, a) - x) \leq qM < p < qM = \min_{j=0}^{q-1} (f(x, b) - x)$   
dann hat Abb  $(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} f(x, y) - p \\ g(x, y) \end{pmatrix}$  Twistbedingung

Höher dimensional  
gelangen wir in  
Schwartzzeilen

Satz  
Arnoldsche Vermutung

$\tilde{Q}$  inhaltstreu Diffeom. von  $T^2$   
 $(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{pmatrix}$   
 $p, q \in C^1(T^2)$   
homolog. kahl.  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$   
i)  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
ii)  $\int_{T^2} p \, dx \, dy = \int_{T^2} q \, dx \, dy$   
 $\rightarrow \tilde{Q}$  hat mind. 3. Fixpunkte

ist notwendig, da

$x_1 = x + c$   
 $y_1 = y + d$   $\frac{c}{d}$  irrational  
keine Fixpunkte hat

monotone Twistabbildungen

Zylinder  $x \text{ mod } 1$   $y \in [0, 1]$   
 $x_1 = f(x, y)$   $d$ -diffeomorph.  
 $y_1 = g(x, y)$   
i)  $f(x, 0, y) = f(x, y) + 1$   
 $g(x, 0, y) = g(x, y)$  } Twist  
ii)  $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$  |  $y_1 dx - y dx$  exakt  
iii)  $g(x, y) - y = 0$   $y = a', a''$   
 $f(x, a') < x_1$   $f(x, a'') > x_1$  } monotone Twist  
iv)  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$  oder  $\frac{\partial x_1}{\partial y} > 0$

Poincaré Birkhoff Satz  
Eine Twistabbildung  
hat mind. 2 Fixpunkte.

erzeugende  
Funktionen für  
flächenerhaltende  
Abbildungen

$y = a(x, x_1)$  für  $x_1 = f(x, y)$   
 $y_1 = b(x, x_1)$  für  $y_1 = g(x, y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \Leftrightarrow a_{x_1} + b_x = 0$

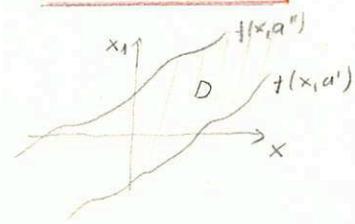
$\omega := y_1 dx_1 - y dx = dh$   
 $= b(x, x_1) dx_1 - a(x, x_1) dx$

$\begin{cases} b(x, x_1) = \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ a(x, x_1) = -\frac{\partial h}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow a_{x_1} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x_1} \quad b_x = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x}$

$y = -\frac{\partial h}{\partial x} = -h_1$   
 $y_1 = \frac{\partial h}{\partial x_1} = h_2$

überprüfen Bedingungen für  
monotone Twistabbildungen  
auf erzeugende Funktionen  $h$

- i) existieren  $a, b, h$
- ii)  $h(x+1, x_1+1) = h(x, x_1)$   $\text{mod } 1$
- iii)  $h_1 + h_2 = 0$  für  $x_1 = f(x, a')$   
oder  $f(x, a'')$   
 $x_1$  liegt in  $D$
- iv)  $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x_1} < 0$



Bem  $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y_1}{\partial x}$

für Fixpunkt:  $h_1(x, x) + h_2(x, x) = 0$

$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x_1} < 0$  heißt  $\frac{\partial x_1}{\partial y} > 0$  monotone Twist

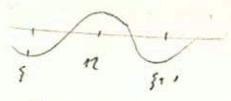
$y_1 dx_1 = \int y dx$   
 $\text{const} = 0$

Poincaré



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  homeomorphism  
 mit  $f(x+1) = f(x) + 1$   
 $\rightarrow g(h) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(h)}{n}$  existiert und ist unabh. von  $x$

$f(x) - x = p(x)$  ist periodisch mit  $\text{osc}(p) < 1$   
 $\text{osc } p > 1$   
 $p(\eta) > p(\xi) + 1$   
 $\xi < \eta$   
 $f(\eta) = \eta + p(\eta) > \eta + 1 + p(\xi)$   
 $> f(\xi) + 1 = f(\xi+1)$  zu homeomorphism



verallgemeinern

$S \subseteq \mathbb{R}^1$  abgeschlossen invariant unter  $f$   
 1)  $f: S \rightarrow S$   
 2)  $f$  monoton  
 3)  $f(x+1) = f(x) + 1$   
 $\Rightarrow g(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{n}$  existiert und ist unabh. von  $x$

$a_j \leq f^j(x) - x \leq b_j$  mit  $0 \in b_j - a_j \in \mathbb{Z}$   
 $f^{j_1}(x) - x = \sum_{r=1}^{j_1} f^{j_r} - f^{j_{r-1}} = \sum_{r=1}^{j_1} (f^{j_r}(x_r) - x_r)$   
 $x_r = f^{j_{r-1}}(x)$

d.h.  $k \cdot a_j \leq a_{jk} \leq b_{jk} \leq k \cdot b_j$   
 $j \cdot a_k \leq a_{jk} \leq b_{jk} \leq j \cdot b_k$   
 $\frac{a_j}{j} \leq \frac{a_{jk}}{jk} \leq \frac{b_{jk}}{jk} \leq \frac{b_k}{k}$

(Newtonsche)

Existenz von periodisch Bahnen im rationalen Fall

$d = \frac{p}{q}$  (rational)  
 $\Leftrightarrow \exists x_j, x_{j+q} = x_j + p$

$\Gamma = \{x_j\}$  eine Poincaré

$\alpha = \frac{p}{q}$   
 definieren  $A(x)$  so:  
 $f^q(x) - p - x = A(x)$  ist ebenfalls periodisch.  
 müssen zeigen:  $A(x) = 0 \exists x$   
 falls nicht  $A(x) > \Delta_0 > 0$  d.h.  
 $f^q(x) \geq p + x + \Delta_0$   
 $f^{kq}(x) > kp + x + k\Delta_0$   
 d.h.  $\frac{p^{kq}}{q^k} = \frac{f^{kq}(x) - x}{q^k} \geq \frac{p}{q} + \frac{\Delta_0}{q}$   
 $k \rightarrow \infty \alpha \geq \frac{p}{q} + \frac{\Delta_0}{q} \quad \& \quad \perp$

$d$  irrational  
 $\Rightarrow$  Anordnung von  $f^j(x) = x_j$  dieselbe wie Anordn. von  $f^j(\xi) = \xi + d \cdot j$  neu!

$\Gamma$  im Beweis für zwei period. Bahnen gezeigt  
 $f^q(x) > x + p \quad \forall x \Leftrightarrow d > \frac{p}{q}$   
 $\Rightarrow x + qd > x + p$

für  $d = \frac{p}{q}$  rational  $\xi_{j+q} = \xi_j + p$   
 $\Rightarrow$  Anordnung von  $\xi_{j+k} \mid_{j=0, q-1}$  dieselbe wie Anordn. von  $\xi_{j-k}$

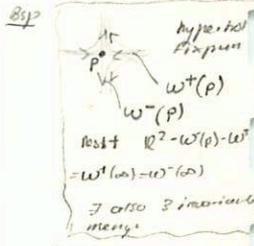
Wann ist  $f$  topologisch äquivalent eine Drehung?

$u(jd - k) = x_j - k$  streng monoton  
 $\partial_{x'} = jx' - kx \quad \partial_{x'} \rightarrow 0$   
 $\partial_{x''} = jx'' - kx \quad \partial_{x''} \rightarrow 0$   
 $u^+(0) = \lim_{\xi_j \rightarrow 0} u(\partial_{x'}) = x_{jx'} - kx$   
 $u^-(0) = \lim_{\xi_j \rightarrow 0} u(\partial_{x''}) = x_{jx''} - kx$   
 $u^+ = u^-$  stetig  $\Rightarrow f$  konjugiert zu  $x \rightarrow x + d$   
 $u^+ \circ u^- : x \rightarrow x + d$   
 $u^+ = u^-$  stetig  $\Leftrightarrow \{x_j + k\}$  dicht auf  $\mathbb{R}$

Bsp  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$   
 $c = 0$  0 und  $\infty$  sind  $W^+$  Linienmengen auf Einheitskreis existieren viele  $W^-$  Linienmengen  
 $W^+(0) = \{z \mid |z| < 1\}$   
 $W^+(\infty) = \{z \mid |z| > 1\}$   
 $W^+(\xi) = \{z \mid z^n = \xi\} = W^+(1) \cup \xi^{1/n}$   $\xi \neq 1$

Bsp invariante, abgeschl. Mengen Minimalmengen

allgem. Defn.  $M$  Menge,  $\varphi: M \rightarrow M$   
 $W^+(q) = \{m \in M \mid \exists j_1 \rightarrow \infty \varphi^{j_1}(q) \rightarrow m\}$  positive invariante Menge  $W^+$  Linienmenge  $W^-$  Linienmenge  
 $W^-(q) = \{m \in M \mid \exists j_1 \rightarrow \infty \varphi^{-j_1}(q) \rightarrow m\}$  negative invariante Menge  $W^-$  Linienmenge  $W^+$  Linienmenge  
 (notwendig)  $W^+(p) = \{m \in M \mid p \in W^-(m) \text{ und } p \text{ geht durch } m\}$  gleiche stabile Mannigfaltigkeit  
 $W^-(p) = \{m \in M \mid p \in W^+(m) \text{ und } p \text{ geht durch } m\}$  eines Randes  $p$   
 hier:  $L^+(\xi) := W^+(\xi) = \{w \in S^1 \mid \exists j_1 \rightarrow \infty \xi^{j_1} \rightarrow w\}$   
 Eine invariante u. abgeschlossene Menge heißt Minimalmenge, falls keine invariante abgeschlossene Teilmenge existiert



Bsp  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $\varphi(x, y) = X(x, y)$   
 mit  $W^+$  Linienmengen  $\{0, \infty\}, \{\alpha, 0\}$   
 Suchen globale stabile Mannigfaltigkeit von 0

Satz Denjoy 1932

$d$  irrational:  $L = L^+(\xi) = L^-(\xi) = L^*$  ist Minimalmenge ist perfekte Menge (Reicht nur auf  $W^+$ )  
 1)  $L$  nirgends dicht Denjoy Minimalmenge  
 2)  $L = S^1$  d.h. jede Bahn ist dicht  
 $B$  impliziert  $\varphi$  ist konjugiert zu  $S^1$   
 $f'$  von beschränkter Variation  $\Rightarrow$  Fall 2)  
 $\exists f \in C^1$  mit Fall A

Zusammenhang d. Poincaré-Funktion mit dynamischen Systemen auf Torus

$T^2$  ist die einzige geschlossene orientierbare 2-dim Mannigfaltigkeit, wo ein nieendes verschwindendes Vektorfeld definiert werden kann.  
 Interessant man sich für das qualitative Verhalten von einem Dgl System

$$\dot{x} = f(x,t) \quad f(x,t+1) = f(x,t) = f(x,t)$$

$\dot{x} = f(x,t)$   
 $t=1$  System auf Torus



$t=t_0$   
 geschlossene Trajektorie  
 $\gamma(t_0) \quad \gamma(t_0+1)$   
 gibt Abb.  $S^1 \rightarrow S^1$

Haupt

Einen charakteristische Linie, geschlossenen orientierten Mannigf.  $S^1$  mit der Summe der Indizes der Singularitäten eines Vektorfelds  $\xi$  auf  $M$

Zusammenhang mit monodromie Twistkoll.

wollen zeigen:  $\exists$  invariante Menge  $M$  heißt  $M$ -Menge  
 zu jeder  $M$ -Menge ist eine Projektion  $\pi_M: (x,y) \rightarrow x$  monoton  
 können Poincaré-Funktion anwenden  
 zu jedem  $a \in [a', a'']$  existiert  $M$ -Menge

Zusammenhang mit Birkhoff  
 Ergebnis von Poincaré (vgl. Newline)  
 Axiome v. Poincaré (Kopieren)

Abstract

Suchtum d. Metakonen von flächenerhalt. Abbild.  
 als einfaches Modell

$\mathcal{U}_\alpha$  einparam. Familie von flächenerh. Abb.  
 Bei Parameterwerten  $\alpha_k$  werden ellipt. period. Bahnen  
 der Länge  $2^k$  hyperbolisch und lassen ellipt. period.  
 Bahnen der Länge  $2^{k+1}$  existieren.

$\lim_{\alpha_k \rightarrow \alpha_{k+1}} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_k - \alpha_{k+1}} = \delta$  unabhängig für gewisse Bereiche  
 einparam. Familie

Das Phänomen folgt aus der Existenz eines  
 Fixpunkts  $\phi^*$  der Abb.

$N: \mathcal{U} \rightarrow \Lambda_\alpha^{-1} \circ \alpha_k \circ \alpha_k \circ \Lambda_\alpha$   $\Lambda_\alpha$  Koordinatentransf.

$\delta$  ist der einzige instabile Eigenwert von  $DN$  am Punkt  $\phi^*$   
 Problem: Existenz eines Fixpunkts, mithilfe einer Kontraktion. Beweis mit Computer.

Einführung

$M$  topol. Raum  
 $T: M \rightarrow M$  stetig diskretes dynam. System  
 $d \rightarrow T_\alpha$  einparametrische Familie von solchen dyn. Systemen

Bsp  $T_\alpha(x) = 1 - \alpha x^2$   
 $M = [-1, 1]$   $\alpha \in [0, 2]$



Unkieserter Verhalten bei Veränderung d. Param  $\alpha$   
 finden Universalität d. Periodenverdopplung.

kann so verst. werden:  $f: M \rightarrow M$   $f(x) < 0$

$Tf = \Lambda_f^{-1} \circ f^2 \circ \Lambda_f$   $\Lambda_f = f(x)x$

$T$  hat Fixpunkt  $\phi^*$  nahe der Funktion  $1 - 1.4x^2$   
 $\phi^*$  ist hyperbollisch  
 Spektrum von  $DT$ :  $\delta_F > 1$  anderer EW innerhalb  $Ball(1)$ .

ähnlich: flächenerh. Abb in der Ebene führen zu ähnlichen  
 universellen Konstante  $\delta = 8.721$

suchen auch hier Existenz eines Fixpunkts einer  
 Koordinatentransformation  $N$  in der Klasse  
 der flächenerh. Abb der Ebene

Terminierung Universalität  
 für flächenerhaltende Abb.

$\mathcal{U}_\alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha f(x) & 1 \end{pmatrix} \text{ mod } 1$  auf  $Torus$   
 $f(x) = \cos^2 \pi x$

Experiment

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\alpha_{k-1} - \alpha_k} = \delta_0 = 8.721$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} = -\frac{1}{\lambda_0} = 4.018$   $\alpha_k = \max_{2^k n} \frac{2^{2k} n}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}}$   $n = 0, 1, \dots, 2^k$

lokale Messungen:  $\beta_\alpha(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \Rightarrow$  ellipt. period. Orbit d. Periode  $2^{k+1}$   
 $r_k(\beta)$  Rotationszahl dieses Fixpunkts  
 $r_k(\beta)$  gitterförmig

Fixiere  $r$ , bestimme  $\beta_k(r)$   $\beta_k :=$  Quotient der Längen d. invarianten Ellipsen  
 also  $M_k := D\mathcal{U}_{\beta_k(r)}(2^k x)$  linearisierte Abb.

$M_k$  so dass  $M_k = M_{k-1} R(r) M_{k-1}^{-1}$   $R(1)$  rotiert mit Rotationsz.  $r$   $M_k$  symm.  
 $\beta_k := \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$   $\lambda_1, \lambda_2$  EW von  $M_k$

## Erzeugende Funktionen

$\varphi: (x, y) \rightarrow (F(x, y), G(x, y))$  flächeneich. Funktion  
mit erzeugender Funktion  $H: (x, x') \rightarrow H(x, x')$

$$\begin{aligned} \partial_2 H(x, x') &= -y \\ \partial_1 H(x, x') &= G(x, y) \end{aligned}$$

$$d = y_1 dx_1 - y dx = dh$$

Erzeugende Funktion von  $\varphi \circ \varphi: \hat{H}(x, x') = H(x, z) + H(z, x')$

mit  $z$  so dass  $\partial_2 H(x, z) + \partial_1 H(z, x') = 0$

z. B. 
$$\begin{aligned} \partial_2 \hat{H}(x, x') &= -y \\ \partial_1 \hat{H}(x, x') &= y'(x', y') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2 \hat{H} &= \partial_2 H(x, z) + \partial_2 H(z, x') \\ &= -\partial_1 H(z, x') + \partial_2 H(z, x') \\ &= -y + y'(z, x') = y'(x', y') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_1 \hat{H} &= \partial_1 H(x, z) + \partial_1 H(z, x') \\ &= \partial_1 H(x, z) - \partial_2 H(x, z) \\ &= -y + y'(x, z) = -y \end{aligned}$$

$$\hat{H}(x, x'') = H(x, x') + H(x', x'')$$

$$\begin{aligned} \partial_2 \hat{H}(x, x'') &= \partial_2 H(x, x') + \partial_2 H(x', x'') \\ &= \text{Quasi } y''(x', x'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_1 \hat{H}(x, x') &= \partial_1 H(x, x') + \partial_1 H(x', x'') \\ &= -y_{x''} y''(x', x'') \end{aligned}$$

$$\partial_2 H(x, x') = y'$$

$$\partial_1 H(x, x') = -y$$

$$\partial_2 H(x, x') + \partial_1 H(x', x'') = y' - y' = 0$$

Bsp von  
haed.  
systemen

"Logistik Map"

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

unlös. von Feigenbaum:  $r = 4$   
 $\lambda = 0.7$  1 Fixpunkt 0.25  
 $\lambda = 0.785$  2 Fixpunkte  
 $\lambda_c = 0.892486417967$

stetig, nicht monoton, Funktionen  
wachen graphisch dargestellt.

$$\frac{(\lambda_n - \lambda_{n-1})}{(\lambda_{n+1} - \lambda_n)} = \delta = 4.669201660910299$$

Feigenbaum konstante

arithmetischer Mittelwert  
zwischen neu gebildeten Zustän-  
gen Faktor  $\delta = 2.50290987509$   
kleiner als  $\delta$  von Stern

konstantes gleich f. glatte konvexe  
kurve mit Maximum am gleichen Ort.  
quadratisches Maximum.  
neue universität: metrische universität

wird erreicht von period. gleichem Pendel  $T \rightarrow \infty$   
 $H \rightarrow \infty$   $\frac{T}{H} = 1$

"Hénon Abb."  
1976

$$x_{n+1} = 1 - a x_n^2 + y_n$$

$$y_{n+1} = b x_n$$

heureka  $x_{n+1} = y_n (1 + \sin(0.7 x_n)) - 1.2 |x_n|$   
 $y_{n+1} = 0.24 - x_n$   
 $x_0 = 0$   
 $y_0 = 0$

enthält Kupferisotop., Contamination, von Hase 0

erhalten diese Abb. von periodisch gleichem Pendel

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} = k f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\Gamma y + k f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$\dot{z} = z$$

kann integrieren für  $(x_n, y_n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x(nT - \epsilon), y(nT - \epsilon))$

für  $(n+1)T - \epsilon > t > nT + \epsilon$   $y(t) = y_n e^{-\Gamma(t-nT)} + k \sum_{m=0}^{\infty} f(x_m) \int_{nT-\epsilon}^t dt' e^{\Gamma(t-t')} \delta(t' - mT)$

$$y_{n+1} = e^{-\Gamma T} (y_n + k f(x_n))$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1 - e^{-\Gamma T}}{\Gamma} (y_n + k f(x_n)) = x_n + \frac{1 - e^{-\Gamma T}}{\Gamma} y_{n+1} \rightarrow \text{Hénon Abb.}$$

"Chirikov-Map" 1979

$T \rightarrow 0$   $k f(x_n) = -k \sin x_n$  aus period. gleichem Pendel

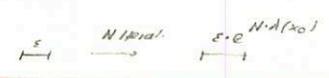
$$p_{n+1} = p_n - k \sin \theta_n$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1}$$

1 dimensionale Poincaré abb.

unimodulare Abb.

Liapunov Exponent:



$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{d f^N(x_0)}{d x_0} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)|$$

misst auch Verlust d. Information:  $I_0 = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n$

gleichverteilung  
Information  
Stimmen Entropie

Abbildung des Intervalls  $\frac{1}{n}$ : Streckung um  $|f'(x_0)|$

Informationsverlust:

$$\Delta I = - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = - \log n = - \log |f'(x_0)|$$

$$\bar{\Delta I} = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)|$$

$$\lambda(x_0) = \log 2 \cdot |\Delta I|$$

Das invariante Mass:

$$\rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta(x - f^i(x_0))$$

Dichte der Iterierten

Entwicklung einer Funktion  $g(x)$  kann  
als Integral gesehen werden:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} g(f^i(x_0)) = \int \rho(x) g(x)$$

$\rho$  ist Lösung des Frobenius-Perron Integralgl.  $\rho(y) = \int \delta(x - f(x)) \rho(x)$

... zirkularisierung  
von chaot.  
Systemen

Correlationsfunktion

$$C(m) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_i \tilde{x}_{i+m}$$

$$= \int_0^1 g(x) f^m(x) dx$$

$$= \left[ \int_0^1 g(x) x dx \right]^2$$

$$\tilde{x}_i = f_i(x_0) - \bar{x}$$

$$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f^i(x_0)$$

- Liapunov exponent: Misst Auseinanderstreben von benachbarten Punkten
- Invariantes Mass: Verteilung o. Häufigkeit über Erreichbarkeitsraum
- Correlationsfunktion: Korrelation von m-fach aufeinanderfolgenden Punkten

By: A abb.  $x_{n+1} = r(1-2|f/2-x|)$

$$\lambda(x) = \log 2r$$

$$g(x) = 1 \text{ für } r=1$$

$$C(m) = \frac{r^m}{2^m} \text{ für } r=1$$

Logistic Map:

1845 Verhulst  
Populationsmodell  
 $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$   
Fertilität ↑ / ↓  
Fläche die notwendig ist / sterben  
# Individuen

Hausdorff Dimension:

Hausdorff Residuen

M Menge in  $\mathbb{R}^d$   
 $N(\epsilon)$  #  $d$ -Kugeln mit Durchmesser  $\epsilon$   
 die gebraucht werden, um M zu überdecken

$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}$  für  $\epsilon \rightarrow 0$   $D$  Hausdorff dimension

für selbstähnliche Objekte:  $D = \frac{\log N(\epsilon)}{\log(\frac{\epsilon}{\epsilon'})}$  da  $N(\epsilon) = C \cdot \epsilon^{-D}$   
 $N(\epsilon') = C \cdot \epsilon'^{-D}$   
 $\frac{N(\epsilon)}{N(\epsilon')} = \frac{\epsilon^{-D}}{\epsilon'^{-D}} = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon'}\right)^{-D}$

Conformal:

$$D = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Strangfakt:

Rand hat Dimension:  
 $D = \frac{\log 4}{\log 3}$

Fractal Dimension:

$N(r) = \#$  Punkte in  $B(r)$   
 wobei die Pkt. mit  $\text{ord}$  viele Punkten überdeckt wird.  
 $N(r) \sim r^D$   
 Falls nicht invariant homogen  
 → Fractal Dimension = nicht stabil

Strange Attractoren in dissipativen Systemen

dissipativ Fluß:  
 $\dot{x} = -\delta x + \delta y$   
 $\dot{y} = -\alpha y + \delta x - \gamma$   
 $\dot{z} = \alpha y - \beta z$

Lorenz Modell

ist dissipatives System:

$$\frac{dV}{dt} = \int d^3x \frac{\delta F}{\delta x^i}$$

$$= \int_V (-\delta - 1 - \beta) d^3x$$

$$= V(-\delta - 1 - \beta) < 0 \text{ für } \delta > 0, \beta > 0$$

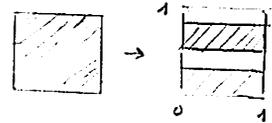
Baker Transformation:

$$x_{n+1} = 2x_n \text{ mod } 1$$

$$y_{n+1} = ay_n + \frac{1}{2} \delta \left( \left[ \frac{2x_n}{2} \right] \right) (y_n) \quad a < 1$$

Liapunov exponenten:  $\lambda_x = \log 2 > 0$   
 $\lambda_y = \log a < 0$

Hausdorffdimension des strange attractors:  
 in x Richtung ↑  
 in y Richtung ↓



$$\frac{N(\epsilon)}{N(\epsilon')} = 2 \quad \frac{\epsilon}{\epsilon'} = \frac{a}{2}$$

$$D = -\frac{\log 2}{\log a} = \frac{\log 2}{|\log a|}$$

$$D = 1 + \frac{\log 2}{\log 2 + |\log a|}$$

also für  $a=1$  dimension 2  
 $a=0$  dimension 1

Störren Abbildung:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = b x_n \end{cases}$$

da  $A = |b| < 1 \rightarrow$  dissipativ

$$e = T_1 \circ T_2 \circ T_3$$

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 1 - a x^2 + y \end{pmatrix}$$

biegen

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b x \\ 1 - a x^2 + y \end{pmatrix}$$

strecken

$$T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

ziehen



oder inhomogen!

Literatur Haimo Gray Schuster "Deterministic Chaos" 735 532  
 P. Bergé "L'écologie dans le chaos" 718 202: 38

Hoseiz Tavis Majr  
 1973: Stable and Random Motion in Dynamical Systems

chaos in Quantensystemen  $\hbar \frac{d}{dt} \psi = H \psi$  Schwedgi.

Stationäre Hamill.  $\psi = \psi_0 e^{-iEt/\hbar}$   
 $\hat{H} \psi_0 = E \psi_0$  diskrete Energiewert  $\rightarrow$  kein chaos

Fundamentale Fragen  
 Existenz Quantenchaos?  
 Was passiert mit dem KAM Theorem für quantisierte Bewegung?

Lichtenberg u. Leibermann 1982 Springer  
 1967 Convergence Series Expansions of Quasi-Periodic Motions Math Ann 169, 163

Quanten Col map

Hannay, Berry 1980 Physica 1D 267  
 Hoseiz Taylor 1983  
 'Quantum KAM Theorem' Phys. Rev. Lett 51 947

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ? \\ ? & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

De Long 1970 Randomness and  
 Coelets in Complex Systems  
 Addison Wesley

KAM Theorem  
 Problem: Integrables System mit  $\frac{\omega}{2\pi}$  nahe an  
 rationalem Wert  
 wird gestört durch  $\epsilon H_1$   
 • Slowly durch  $\epsilon H_1$  falls  $\frac{\omega}{2\pi}$  rational  
 $n=2 \quad \left| \frac{d\omega_j}{dJ_j} \right| \neq 0 \quad \left| \frac{\omega_1 - m}{\omega_2 - s} \right| > \frac{k(\epsilon)}{5-5} \quad k(\epsilon \rightarrow 0) \rightarrow 0$   
 (m,s) = 1  
 stabil unter Störung  $\epsilon H_1 \quad \epsilon \ll 1$

Prozess für starke irreg. Beweg. in Hamill. System  
 wo alle stabilen Punkte hyperbolisch sind  
 Col Map:  $x_{n+1} = x_n + y_n \text{ mod } 1 = T(x_n)$   
 $y_{n+1} = x_n + 2y_n \text{ mod } 1 = T(y_n)$   
 Column eintrahend  
 $\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1 \Rightarrow$  alles hyperbol. Fixpt.  
 $\lambda_2 = \lambda_1^{-1} < 0$   
 jedes rationale Pkt ist Fixpunkt von  $T^n$   
 ist Mixend. Bewegung ist ergodisch

chaos, fixed and dynamics 713 286: 98

chaotische Bewegung im Lorenzsystem noch nicht bewiesen.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Übersicht: Globale Analysis

$G$  Lie Gruppe, die auf  $M$  Mannigfaltigkeit operiert  
 d.h. haben Homom.  $G \rightarrow \text{Diff}(M)$   $G \times M \rightarrow M$  differbar,  $\text{Diff} M = \{ \text{Diffeomorphismen auf } M \}$   $C^\infty$  oder  $C^1$   
 Zwei wichtige Fälle:  $G = \mathbb{Z}$ ,  $G = \mathbb{R}$ . (Auch nicht ausgeschlossen:  $M$  dist.  $G \times M \rightarrow M$  stetig.)

$G = \mathbb{Z}$   
 $f \in \text{Diff}(M)$  Generator  $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  Orbit von  $x$  auf  $M$   
 wollen globale Orbitstruktur untersuchen

Problem wichtig hat Schnittbild (Poincaré)  
 oder bei Untersuchung von Systemen über Diffeomorphismen  
 auf Fluss von Vektorfeldern.

$M$  kompakt mit Topol. d. einer  $C^1$  konvergenz. Probleme im Unendl. werden nicht betrachtet, obwohl interessant.

Schlüssen degenerierte Objekte  $f$  aus unserer Betrachtung aus:  $\text{Fix}(f) = F$  abgesehen mit  $U \in F$  Umlauf

$\{f \in \text{Diff}(M) \mid \text{fix}(f) \text{ dist.}\}$  enthält offene dichte Menge

alle Eigenschaft heißt generisch, falls sie für eine Baumenge  $M \subseteq \text{Diff}(M)$  gilt  
 abzählb. Durchschnitt von offenen dichten Mengen. Bsp  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

(  $S$  von 1. Kategorie in  $X$ , falls  $S$  abz. Vereinig. nirgends dichte Mengen ist. Bsp  $\mathbb{Q}$  ist von 1. Kategorie in  $X$   
 $S$  von 2. Kategorie in  $X$  sonst

$X$  Baire Raum Durchschnitt von dichten abz. Umlauf  
 d.h. jede Baire Menge ist dicht.

$\hookrightarrow \forall S \in X$   $S$  von 2. Kategorie  $S \neq \emptyset$   
 $\rightarrow X$  ist von 2. Kategorie

Bsp vollständige metrische Raum ist von 2. Kategorie

Baire Satz:

jede abz. Menge offen nirgends dicht ist nirgends dicht in vollständ. met. Raum

d.h. jeder abz. Durchschnitt von abz. dichten Mengen ist dicht

d.h. ein vollständ. metrischer Raum ist ein Baire Raum (insbes. von 2. Kategorie)

Def E Stabilität  $E$  Äquivalenz auf  $\text{Diff}(M)$   
 $\exists U(t) \forall f \in U(t) f \in E$

Def topol. od. different. Konjugiertheit von  $f, f'$   
 $\exists h: M \rightarrow M \quad hf = f'h$

Stabilität  $\Leftrightarrow$  topol. konjugiertheit: strukturelle Stabilität

Strukturell stabile Diffom. sind nicht dicht in  $\text{Diff}(M)$

Def  $x \in M$  heißt wanderpunkt falls  $\exists U(x) \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} f^m(U) \cap U = \emptyset$   
 $\Omega(f)$  Menge d. nichtwanderpunkte

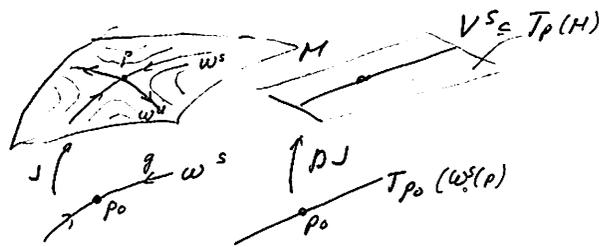
Wanderpunkte bilden invariante offene Teilmenge v.

Def  $\Omega$  Stabilität  $f, f'$  topologisch konjugiert auf  $\Omega$ , falls  
 $\exists h: \Omega(f) \rightarrow \Omega(f')$  Homöom.  $hf = f'h$

Bsp Beschreibung einer Klasse von  $\Omega$  stabilen Diffeomorphismen

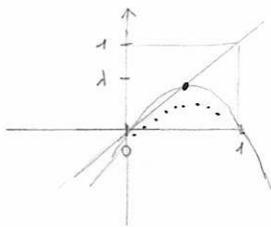
Satz über Stabilität Mannigf.:

Poincaré  
 $p \in M$  hyperb. Fixpunkt von  $f \in \text{Diff}(M)$   
 $T_p(M) = W^s \oplus W^u$   
 $\rightarrow \exists g: W^s(p) \rightarrow W^s(p)$  kontraktiv mit Fixpunkt  $p_0$  und  
 $J: W^s(p) \rightarrow M$  Immersion  
 $J(p_0) = p$  und  
 $DJ(p_0): T_{p_0}(W^s(p)) \xrightarrow{\sim} V^s \subseteq T_p(M)$   
 $J(W^s(p)) = \{x \mid f^m(x) \rightarrow p \text{ m} \rightarrow \infty\}$



Bem  $W^s(p)$  trägt zwei Topologien: Mannigfaltigkeitstypologie und induzierte, metrische Topologie als Relativtopologie d. Topol. von  $M$

Untersuchung d. Abb  $x \mapsto x^2 + c$



als  $x \mapsto -4\lambda x(x-1)$

steig im 0 Punkt:  $-4\lambda(2x-1)|_{x=0} = +4\lambda$

Fixpunkt:  $x^2 + c = x$   $x = -4\lambda x^2 + 4\lambda x$   
 $x^2 - x + c = 0$   $x = 0$   
 $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$   $x = 1 - \frac{1}{4\lambda}$

Fixpunkt ist stabil, falls  $|-4\lambda(2x-1)|_{x=1-\frac{1}{4\lambda}} \leq 1$

$-4\lambda(2 - \frac{1}{2\lambda} - 1) \leq 1$

$-4\lambda + 2 \leq 1$

$\lambda \geq \frac{1}{4}$

$\lambda \leq \frac{3}{4}$

$x \mapsto -4\lambda x(x-1)$  ist eine Abb.  $[0,1] \rightarrow [0,1]$  für  $\lambda \in [0,1]$

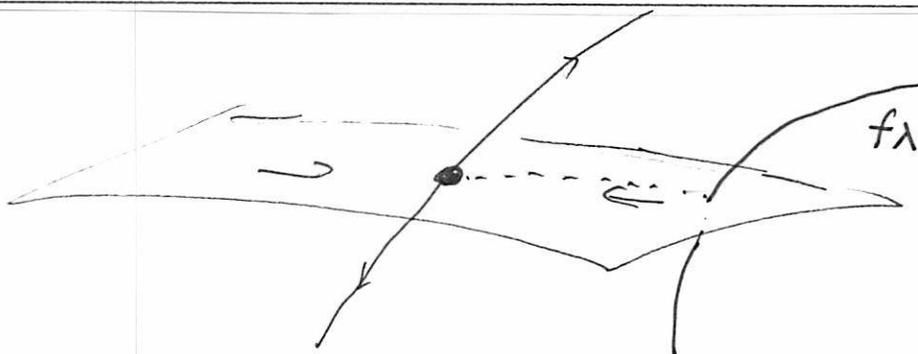
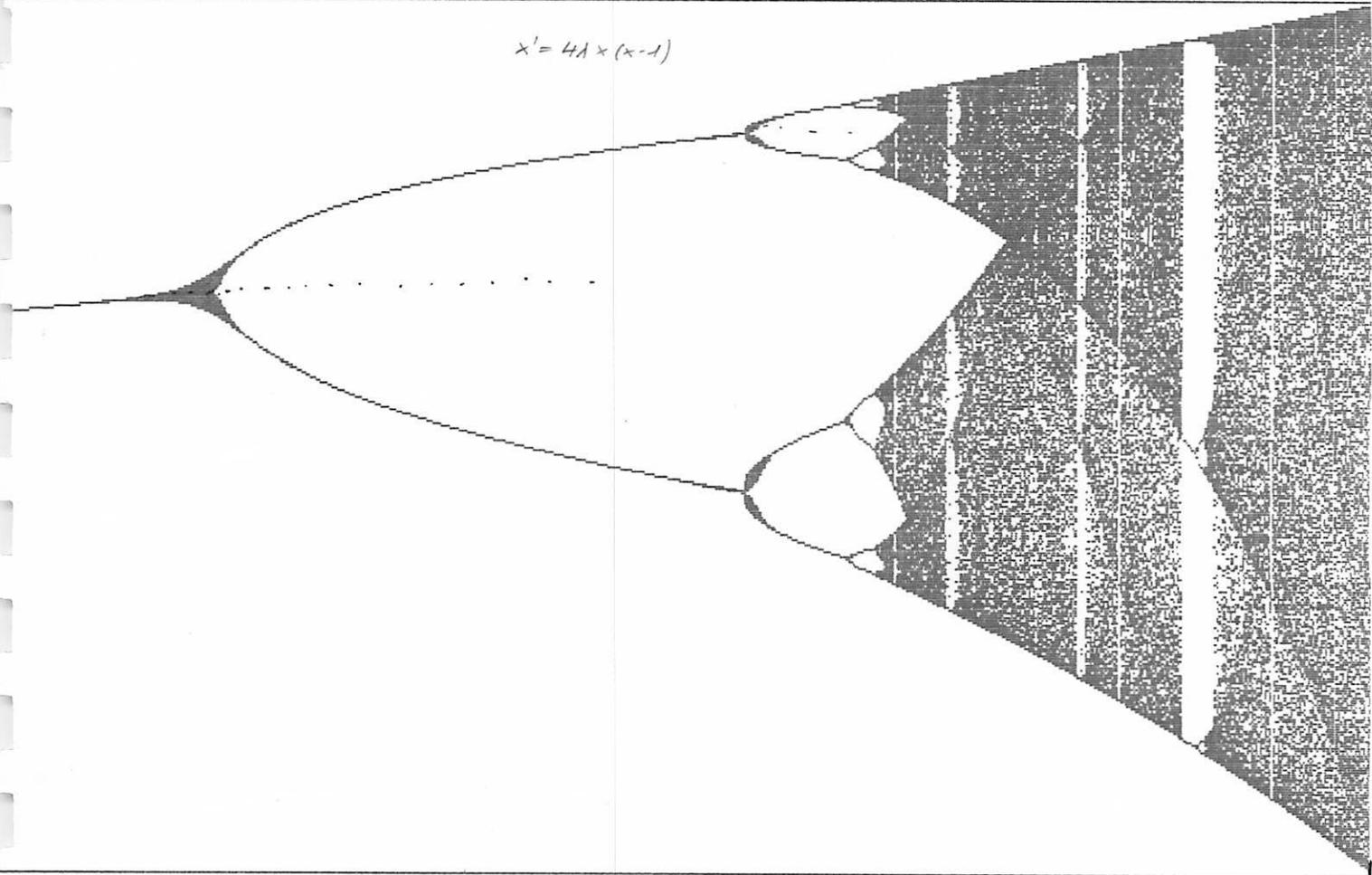
$\lambda \in [0, \frac{1}{4}]$ : haben nur einen Fixpunkt 0 und dieser Fixpunkt ist stabil für  $\lambda \in [0, \frac{1}{4}]$

$\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ : haben zwei Fixpunkte  $0, 1 - \frac{1}{4\lambda}$  für  $\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$  ist  $x = 1 - \frac{1}{4\lambda}$  stabile Fixpunkt

Für  $\lambda > \frac{3}{4}$  wird dieser Fixpunkt instabil

## Parameter-Fixpunkt-Ebene

$x' = 4\lambda x(x-1)$



	diskrete Systeme	stetige Systeme
<u>Determin. Systeme</u>	$x_{n+1} = \varphi(x_n)$	$\dot{x} = f(x) \quad f \in C^1$
<u>indetermin. Systeme</u>	diskret Markovsche Prozess	stochastische Prozesse $\dot{x} = f(x) \quad f \in C^0$
<u>Mixing Systeme</u>	Homomorph. logistikabb.	Lorenzmodell
<u>Hamiltonsche Systeme</u>	inhaltstreue Homöomorph. & Cauchy Twistabb.	$f = -J dH$

- $\dot{x} = f(x)$  auf Mannigfaltigkeit  $M$
- globale Fragestell
    - Verhalten d. Systems über lange Zeiten
    - Globale topologische Klassifizierung
    - Existenz von period. Lösungen
  - lokale Fragestell
    - Stabilität von Fixpunkten
    - Klassifikation von Fixpunkten und and. Punkten
    - topologische Äquivalenz

- Fragestellungen
- Klassifikation von Fixpunkten
  - Existenz von stabilen Mannigfaltigkeiten
  - Stabilität des dynamischen Systems
  - Invarianten Mengen von dyn. Systemen  $\rightsquigarrow$  Parameter hinde
  - Limesmengen, Attraktoren
  - Eindeutigkeit von Attraktoren
  - Universalität: Bäume ins Chaos
  - Quantenmechanisch chaotische Systeme

- Stroboskopabb. : stetige Systeme  $\rightarrow$  diskrete Systeme
  - Poincaréabb. : ebenfalls period. Bahnen  $\rightarrow$  Fixpunkten
  - Nichtstandard analysis : stetige Systeme  $\rightarrow$  diskrete Systeme
- $$\dot{x} = f(x)$$
- $$x(t+h) = x(t) + h f(x(t))$$
- $$x_{n+1} = x_n + h f(x_n)$$

Mögliche neue Fragestellungen:

- Zurückführung d. ganzen Differentialtopologie auf diskrete Strukturen.
- Untersuchung von Systemen  $\dot{x} = f(x) \quad f \in C^0$  oder gar  $f \in L^1$  oder gar  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig.
- Chaos in Quantensystemen? Zusammenhang Quantensysteme  $\leftrightarrow$  diskrete Systeme.
- Geometrie auf Mannigfaltigkeiten höherer Dimension

Zu Poincaré  $\rightarrow$  Ansatz geom. Methode in the theory of ordinary differential equations

Verallgemeinerung:  
Cartan's Replicas theorem:

$L$  endl. dim. Lie Algebra  
 $u \in L$   
 $u \rightarrow [u, u]$  operation auf  $L$   
 $u$  heißt halbpotenz, falls  $u \rightarrow [u, u]$  diagonal ist  
 $u$  heißt nilpotent, falls  $u \rightarrow [u, u]$  nilpotent ist (alle EW sind 0)

$\rightarrow u = S + N \quad SN = NS \quad S, N$  heißen Replicas von  $u$

In der Liealgebra d. v.F. :  
 $SN = NS$   
 halbpotenz : Linear mit diagonal matrix darstellbar  
 nilpotent : nilpotente lineare Teil + Terme können auch sein.  
 heißt : nur resonante Terme können sein

Resonanzen berechnen in  $\mathbb{C}^n$ :

$A = (m, n)$  in  $\mathbb{C}^n$   $m, n \geq 0$

$|m| \geq 2$

Poincaré Bereich:  $\text{col}(A \dots A_n) \neq 0$

Steg Bereich:  $\text{col}(A \dots A_n) \neq 0$

Mengensysteme

$\sigma$  Algebra  $(\Omega, \mathcal{R})$   
 1)  $\Omega \in \mathcal{R}$   
 2)  $A \in \mathcal{R} \rightarrow A^c \in \mathcal{R}$   
 3)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$

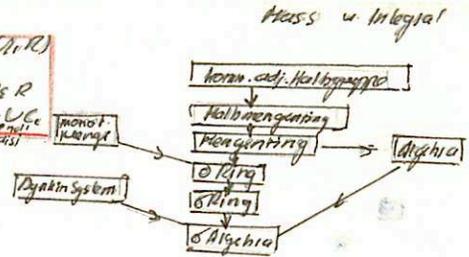
Mengenring  $(\Omega, \mathcal{R})$   
 1)  $\emptyset \in \mathcal{R}$   
 2)  $A, B \in \mathcal{R} \rightarrow A \cup B, A \cap B \in \mathcal{R}$

$\delta$  Ring  $(\Omega, \mathcal{R})$   
 1)  $\emptyset \in \mathcal{R}$   
 2)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R} \rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$

$\mathcal{I}$  Ring  $(\Omega, \mathcal{R})$   
 1)  $\emptyset \in \mathcal{R}$   
 2)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R} \rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$

Algebra  
 1)  $\Omega, \emptyset \in \mathcal{R}$   
 2)  $A, B \in \mathcal{R} \rightarrow A \cup B, A \cap B \in \mathcal{R}$

Halbmengenring  $(\Omega, \mathcal{R})$   
 1)  $\emptyset \in \mathcal{R}$   
 2)  $A, B \in \mathcal{R} \rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$   
 3)  $A, B \in \mathcal{R} \rightarrow A - B \in \mathcal{R}$



$\mathcal{D}, \mathcal{D}$  Dynkin System  
 1)  $\Omega \in \mathcal{D}$   
 2)  $D_1, E \in \mathcal{D} \rightarrow D_1 \cap E \in \mathcal{D}$   
 3)  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$

$\mathcal{R}_\sigma = \mathcal{R}_m$   $\mathcal{R}$  Mengenring  
 $\mathcal{R}_{\sigma\delta} = \mathcal{R}_\mathcal{D}$   $\mathcal{R}$  kommut. Halbmengenring  
 $\mathcal{R}_\sigma = \{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \text{ disj. endl. Fam. aus } \mathcal{R} \}$   $\mathcal{R}$  Halbmengenring

$\mathcal{A}, \mathcal{R}$  monot. Meng.  
 1)  $A_n$  abnehm. Folge  $\mathcal{A}$  aus  $\mathcal{R}$   
 2)  $A_n$  zun. Folge  $\mathcal{A}$  aus  $\mathcal{R}$

Halbmengenring, monotone Mengen, Dynkin Systeme sind Hilfskonstruktionen, um Mengenring,  $\delta$  Ring,  $\sigma$  Algebren einfacher zu erhalten:: vorgehen:

$\mathcal{R}$  Halbmengenring  
 $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_\sigma = \{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \text{ disj. endl. Fam. aus } \mathcal{R} \}$   
 $\mathcal{R}_\sigma \rightarrow \mathcal{R}_{\sigma\delta} = \{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \text{ disj. endl. Fam. aus } \mathcal{R}_\sigma \}$   
 $\mathcal{R}_{\sigma\delta} \rightarrow \mathcal{R}_\mathcal{D} = \{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \text{ zun. Folge aus } \mathcal{R}_{\sigma\delta} \}$

Masse

$\mathcal{R}$  Halbmengenring  
 $\mu$  positives Mass auf  $\mathcal{R}$   
 1)  $\mu \geq 0$   
 2)  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

(auch  $\mu$ -Masse nennt. auf Mengenring gerandt) vom endl. Inhalt: Inhalt

Maßes Mass auf  $\mathcal{R}$   $\delta$  Ring  
 Anzähl. Folg. in  $\mathcal{R}$   
 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R} \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$

$\mathcal{R}$   $\sigma$  Algebra  
 $\mu$  positiv. Mass auf  $\mathcal{R} \rightarrow \mu$  Mass

allg. Konstruktion d. Fortsetzung  
 $(X, \mathcal{R}, \mu)$  Massraum (Halbmengenring, posit. Mass)  
 $\mu^*$  das zu  $(X, \mathcal{R}, \mu)$  asso. äußeres Mass  
 $\mu^*(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{R} \}$   
 $(X, \mathcal{S}, \mu^*)$  zu  $\mu^*$  asso. vollst.  $\delta$ -Massraum  
Vervollständigung von  $(X, \mathcal{R}, \mu)$

$A \mapsto \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{R} \}$   
 $S = \{ A \mid 1) \mu^*(A) < \infty \}$   
 2)  $\forall B \in \mathcal{R} \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A) \mu^*(B)$

$\mu^*$  äußeres Mass auf  $\mathcal{R}$   
 1)  $\mu^*(\emptyset) = 0$   
 2)  $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$   
 3)  $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$   
 4)  $\mu^*(A) \geq 0$

vollständig:  
 a)  $\mathcal{R}$  Mengenring  
 b)  $\mu(A) = 0 \rightarrow A \in \mathcal{R}$   
 c)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zun. aus  $\mathcal{R}$   $\sup \mu(A_n) < \infty \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$  (Beppo Levi)

Konstruktion d. Fortsetzung auf  $\sigma$  Algebra  
 $(\mathcal{R}, \mu, \mu^*)$  Massraum  $\mathcal{R}$  Mengenring  $\mu$  posit. Mass  
 $(\mathcal{S}, \mu^*)$  vervollständigung  $\mathcal{S}$   $\sigma$  Algebra von  $\mathcal{R}$  erzeugt

$(X, \mathcal{R}, \mu)$  messbarer Raum  $\mathcal{R}$   $\delta$  Ring auf  $X$   $B$  messbar:  $B \cap A \in \mathcal{R} \forall A \in \mathcal{R}$   
 $f$  messbar  $\{ f < \alpha \} \in \mathcal{R}$   $\mathcal{B}$  messbar  
 $\mathcal{B}$  Borelmengen  $\mathcal{B}$  messbar heißt Borel messbar  
 $(X, \mathcal{B}, \mu)$  Massraum  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  vervollständigung  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  Massraum messbar

Integrale

allg. Konstruktion d. Integrals  
 $(X, \mathcal{R}, \mu)$  Massraum  
 $\mathcal{L}$  Menge der Treppenfunktionen auf  $\mathcal{B}$  Teilvektorverband von  $\mathbb{R}^X$   
 $\mu(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$   
 $(X, \mathcal{B}, \mu)$  mit vervollständigung  $(X, \mathcal{S}, \mu)$   
 $(X, \mathcal{S})$  messbarer Raum  $\mu$  messbare Funktionen, Mengen gleichbed.  $\mathcal{S}$  messbar  
 $\mathcal{L}$  Menge der  $\mu$  integrierbaren Funktionen  
 $f, \mu$  integrierbar  $\Leftrightarrow f, \mu$  messbar  $\sup \int f \cdot g \mid g \in \mathcal{L}, g \geq 0, \int g = 1 \} < \infty$   
 $\int f \cdot \mu = \sup \{ \int f \cdot g \mid g \in \mathcal{L}, g \geq 0, \int g = 1 \} - \sup \{ \int f \cdot g \mid g \in \mathcal{L}, g \leq 0, \int g = -1 \}$

Das Massproblem von Lebesgue

$\exists ? \mu$  posit. Mass (1)  $\mu$  definiert auf  $\mathcal{R}$  - Mengenring d. beschr. Mengen in  $\mathbb{R}^n$   
 (2)  $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \Rightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$   
 (3)  $\phi: A \rightarrow B$  kongruenzabb.  $\Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$   
 $\exists ? \mu$  Inhalt (d.h. mon. additiv) mit (1)-(3)

gegenbeispiel (Vitali)  
 $\mathbb{R}$  alle  $\mathbb{R}$  Dimensionsträume:  
 im  $\mathbb{R}$   $A := \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1 \}$  diskr. in  $\mathbb{R}$   
 $x, y$  in  $\mathbb{R}$  falls  $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$   $\mathbb{R} / \sim = E_0$  (wählen  $E_0$  aus  $\mathbb{R}$  mit  $0 \in E_0$ )  
 $\mu(E_0) = 0$   $F \subseteq E_0$   $D(F) = F - F \supseteq A$  disj. Klasse  
 $E_0 + A = \mathbb{R}$  abzählb. Verein  $\mu(U) = 0$



<p>① Fubini für <math>f_C \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{E}</math></p> <p><math>f_{A \times B}(x, \cdot) = f_A(x) \cdot f_B</math>  <math>f_{A \times B}(\cdot, y) = f_A \cdot f_B(y)</math></p> <p><math>\int f_{A \times B}(\cdot, y) d\nu(y) = f_A \cdot \nu(B)</math>  <math>\int f_{A \times B}(x, \cdot) d\mu(x) = f_B \cdot \mu(A)</math></p> <p><math>\iint f_{A \times B} d\mu d\nu = \iint f_{A \times B} d\nu d\mu</math>  <math>= \mu(A) \cdot \nu(B)</math>  <math>=: \mu \otimes \nu(A \times B)</math></p>	<p>② Fubini für <math>f_C \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{E}</math></p> <p><math>f_C(x, \cdot) \in \mathbb{E}</math> messb. <math>\nu</math> integrierbar  <math>f_C(\cdot, y) \in \mathbb{R}</math> messb. <math>\mu</math> integrierbar</p> <p><math>\int f_C(\cdot, y) d\nu(y) \in \mathbb{R}</math> messb. <math>\mu</math> integrierbar  <math>\int f_C(x, \cdot) d\mu(x) \in \mathbb{E}</math> messb. <math>\nu</math> integrierbar</p> <p><math>\iint f_C d\mu d\nu = \iint f_C d\nu d\mu</math>  <math>= \mu \otimes \nu(C)</math></p>	<p>③ Lebesgue 1902          Fubini für beschränkte lokal <math>\nu</math>-integrierbar <math>f</math></p> <p><math>f(x, \cdot) \in \mathbb{E}</math> messb. <math>\nu</math> integrierbar  <math>f(\cdot, y) \in \mathbb{R}</math> messb. <math>\mu</math> integrierbar</p> <p><math>\int f(\cdot, y) d\nu(y) \in \mathbb{R}</math> messb. <math>\mu</math> integrierbar  <math>\int f(x, \cdot) d\mu(x) \in \mathbb{E}</math> messb. <math>\nu</math> integrierbar</p> <p><math>\iint f(x, y) d\mu d\nu = \iint f(x, y) d\nu d\mu</math>  <math>= \int d(\mu \otimes \nu)</math></p> <p>für meromorphe <math>\mathbb{R} \otimes \mathbb{E}</math> messb. Funkt. mit <math>f \neq 0 \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{E}</math></p>	<p>Fubini 1907</p> <p>④ <math>(X, \mathcal{B}, \mu), (Y, \mathcal{E}, \nu)</math> <math>\sigma</math> endlich <math>\neq \mathbb{E} \subseteq L^1(\mu \otimes \nu, \mu \otimes \nu)</math></p> <p><math>f(x, \cdot) \in L^1(\nu)</math> <math>\mu</math> Nullmenge  <math>f(\cdot, y) \in L^1(\mu) \nu</math> Nullmenge</p> <p><math>\int f(\cdot, y) d\nu(y) \in L^1(\mu)</math>  <math>\int f(x, \cdot) d\mu(x) \in L^1(\nu)</math></p> <p><math>\iint f(x, y) d\mu d\nu = \iint f(x, y) d\nu d\mu</math>  <math>= \int d(\mu \otimes \nu)</math></p>
---	---	--	---

- ① folgt aus  $f_{A \times B} = f_A \cdot f_B$
- ②  $T = \{C \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{E} \text{ mit diesen Eigenschaften}\}$
1. Schritt  $(\mathbb{R} \otimes \mathbb{E})_r \subseteq T$
- $\Gamma \mathbb{R} \otimes \mathbb{E} \subseteq T$  nach ①  
 $C \in (\mathbb{R} \otimes \mathbb{E})_r \exists C_i$  disj. endl. Familie aus  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{E}$   
 $C = \cup C_i \subseteq T$
2. Schritt  $T \subseteq (\mathbb{R} \otimes \mathbb{E})_r$
- $T$  ist monotone Menge (Lebesgue)  
 $\mathbb{R} \otimes \mathbb{E} = (\mathbb{R} \otimes \mathbb{E})_s = (\mathbb{R} \otimes \mathbb{E})_r = (\mathbb{R} \otimes \mathbb{E})_m \subseteq T$

- ③  $\alpha := \sup \{f(x) \mid x \in X\}$  exist. nach vor
- $f \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{E}$  messb.  $\mu \otimes \nu$  messb.  $\mu \otimes \nu$  integrierbar  
 $|f| \leq \alpha \mathbb{1}_{X \times Y} \in L^1(\mu \otimes \nu) \Rightarrow f \in L^1(\mu \otimes \nu)$  integrierbar
1. Fall  $f$  Treppenfunktion folgt direkt aus ②
2. Fall  $f \geq 0$
- $\exists f_n \in L^1(\mu \otimes \nu)$  zun. Folge von Treppenfunkt.  
 $\forall f_n(x, \cdot) = f(x, \cdot) \in \mathbb{E}$  messb.  $\Rightarrow \nu$  messb.
- $\exists A \times B \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{E} \int f \neq 0 \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{E}$   
 $f(x, \cdot) \in \alpha \cdot \mathbb{1}_B \in L^1(\nu) \Rightarrow f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$
- Lebesgue:  $\int f(x, y) d\nu(y) = \sup \int f_n(x, y) d\nu(y)$   
 $\in L^1(\mu) \Rightarrow \int f(\cdot, y) d\nu(y) = \nu \int f_n(\cdot, y) d\nu(y)$
1. Fall:  $\sup \int f_n(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \stackrel{\text{Leb.}}{=} \iint f(x, y) d\mu d\nu < \infty$   
 $\int \int f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \sup \int \int f_n(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int f d(\mu \otimes \nu)$
3. Fall  $f$  beliebig  $f = f^+ - f^-$

- ④  $(X, \mathcal{B}, \mu), (Y, \mathcal{E}, \nu)$   $\sigma$  endl.  $\Rightarrow \exists A_n \in \mathcal{B} \times \mathcal{E} \ X = \cup A_n \ Y = \cup B_n$
1. Fall  $f$  positiv  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{E}$  messbar
- $f_n := f \cdot \mathbb{1}_{A_n \times B_n}$  zun. Folge von beschränkten  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{E}$  messbaren Funktionen mit  $f = \vee f_n$   
 mit  $\int f_n \neq 0 \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{E}$

④  $\int f d(\mu \otimes \nu) = \iint f_n(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$

$A := \{x \in X \mid f(x, \cdot) \in L^1(\nu)\}$   
 $g: x \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n(x, y) d\nu(y)$

Beppoletti:  $A = \{g < \infty\}$   
 $\int f(x, y) d\nu(y) = g(x) \quad \forall x \in A$   
 $g = \nu \int f_n(\cdot, y) d\nu(y)$  nach Definition

Lebesgue  $\sup_n \int \int f_n d\mu d\nu \stackrel{③}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d(\mu \otimes \nu) \stackrel{\text{Leb.}}{=} \int f d(\mu \otimes \nu) < \infty$

Beppoletti  $\int g d\mu = \sup \int \int f_n d\nu d\mu = \int f d(\mu \otimes \nu)$

$\exists x \in X \mid f(x, \cdot) \notin L^1(\nu) \Rightarrow x \in A^c = \{g = \infty\} \nu$  Nullmenge

d.h.  $\int f(\cdot, y) d\nu(y) = g \cdot \nu$   $\int f(x, y) d\nu(y) \in L^1(\mu)$   
 und  $\int \int f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int f d(\mu \otimes \nu)$

2. Fall  $f = \mathbb{R} \otimes \mathbb{E}$  messbar  $f = f^+ - f^-$
3. Fall  $f = 0$  ( $\mu \otimes \nu$ ) f.u.

$C := \{f \neq 0\}$  ist  $\mu \otimes \nu$  Nullmenge

$\exists (C_n)$  Folge aus  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{E} \quad C \cap (A_n \times B_n) \subseteq C_n$   
 $(\mu \otimes \nu) C_n = (\mu \otimes \nu)^{\perp} C \cap (A_n \times B_n) = 0$

seien  $g := \infty \cdot \nu$   $\forall_{n \in \mathbb{N}} f_n$  positive  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{E}$  messbare numerische Funktion die  $\nu$  für  $\nu$  verschwindet  
 $g \in L^1(\mu \otimes \nu) \quad \int g d(\mu \otimes \nu) = 0$

1. Fall:  $\int \int g d\nu d\mu = \int g d(\mu \otimes \nu) = 0 \Rightarrow A := \{x \mid \int g(x, y) d\nu > 0\} \nu$  Nullmenge  
 $\{y \in Y \mid \int g(x, y) d\nu > 0 \ \forall x \in X \setminus A\} \nu$  Nullmenge  
 $|A| = g \Rightarrow \{y \in Y \mid \int f(x, y) d\mu > 0\} \nu$  Nullmenge  
 also  $f(x, \cdot) = 0 \nu$  f.u.  
 $\Rightarrow f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$  und  $\int f(x, y) d\nu(y) = 0$

4. Fall  $f$  beliebig
- $\exists g \in L^1(\mu \otimes \nu) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{R} \times Y} \quad g \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{E}$  messbar  $f = g \cdot \nu$  f.u.
- Aussagen gelten für  $g, f - g \Rightarrow f$

$A \mu$  Nullmenge  $\Rightarrow A \times Y$  ist  $\mu \times \nu$  Nullmenge

$\Gamma C \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \Rightarrow \exists A \times B' \quad C \in (A \times B')$   
 $A \cap A' \mu$  Nullmenge  
 $\Rightarrow \exists A'' \quad A \cap A' \in A'' \quad \mu(A'') = \mu^*(A \cap A') = 0$   
 $A \times Y \cap C \subseteq A'' \times B'$   
 $(\mu \otimes \nu)^*(A \times Y \cap C) \subseteq \mu \otimes \nu(A'' \otimes B') = \mu(A'') \nu(B') = 0$  ]

$f \in L^1(\mu, X) \quad g \in L^1(\nu, Y)$   
 a)  $f \otimes g \in L^1(\mu \otimes \nu, X \times Y)$   
 b)  $\int (f \otimes g) d(\mu \otimes \nu) = \int f d\mu \int g d\nu$

$\Gamma \mathcal{L} :=$  Treppenfkt bei  $\mathcal{L}$   
 $\mathcal{L}' :=$  Treppenfkt bei  $\mathcal{L}'$

1. Fall  $f, g \in \mathcal{L}$  ist  $\mathcal{L}'$

$f \otimes g = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \chi_{A_i \times B_j} \in \mathcal{L}'(\mu \times \nu)$

$\int f \otimes g d(\mu \otimes \nu) = \sum \alpha_i \beta_j \int \chi_{A_i \times B_j} d\mu \otimes \nu = \sum \alpha_i \beta_j \mu(A_i) \nu(B_j) = \int f d\mu \int g d\nu$

2. Fall  $f \geq 0, g \geq 0$

$\exists f' \in \mathcal{L}'(\mu) \quad g' \in \mathcal{L}'(\nu) \quad f' \geq 0, g' \geq 0$   
 $f = f' \mu, g = g' \nu \Rightarrow \exists$  un Folge aus  $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \quad f' = \nu_n, g' = \nu_{g_n}$

$\sup \int f \otimes g_n d(\mu \otimes \nu) = \sup (\int f' d\mu) (\int g_n d\nu) = \int f' d\mu \int g' d\nu$  Beppo Levi

$f \otimes g_n$  zunehm. Folge aus  $\mathcal{L}'(\mu \otimes \nu) \quad \forall f \otimes g_n = f \otimes g' \in \mathcal{L}'(\mu \otimes \nu)$

$\int f \otimes g d(\mu \otimes \nu) = \sup \int f \otimes g_n d(\mu \otimes \nu) = \int f' d\mu \int g' d\nu$

$A := \{f \otimes f\} \quad B := \{g \otimes g\}$

$\int f \otimes g \neq \int f \otimes g' \in (A \times Y) \cup (X \times B) \quad \mu \otimes \nu$  Nullmenge  $\rightarrow$  kann man

3. Fall  $f, g$  beliebig

$\int f \otimes g = \int^+ f \otimes g^+ - \int^+ f \otimes g^- - \int^- f \otimes g^+ + \int^- f \otimes g^-$  ]

Cor

$p, s \in (0, \infty) \quad f \in L^p(\mu, X) \quad g \in L^q(\nu, Y)$   
 a)  $f \otimes g \in L^r(\mu \otimes \nu, X \times Y)$   
 b)  $N_{\mu \otimes \nu}(f \otimes g) = N_{\mu}(f) \cdot N_{\nu}(g)$

$\Gamma$  1. Fall  $f \geq 0, g \geq 0$

$f^p \in L^1 \quad g^q \in L^1$   
 $(f \otimes g)^r = f^p \otimes g^q \in \mathcal{L}'(\mu \otimes \nu)$

$\int (f \otimes g)^r d\mu = \int f^p \otimes g^q = \int f^p d\mu \int g^q d\nu$

2. Fall  $f, g$  beliebig

$f \otimes g = \int^+ f \otimes g^+ - \int^+ f \otimes g^- - \int^- f \otimes g^+ + \int^- f \otimes g^- \in L^r(\mu \otimes \nu)$  ]



$p, q \in [1, \infty] \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$   
 $\tilde{\gamma}: L^p \rightarrow \mathbb{R}$   
 $F \mapsto \int FG \, d\mu$   
 a)  $\forall G \in L^q \quad \tilde{\gamma} \in L^p$   
 $\|G\| = \|\tilde{\gamma}\|_q$   
 b)  $\gamma: L^q \rightarrow L^p$   
 $G \mapsto \tilde{\gamma}$  ist linear u. injektiv.

$\gamma: G \in L^q \rightarrow \int FG \, d\mu$   $\mu$  messbar  
 1. Schritt  $\tilde{\gamma}$  linear  $\mu$  u.  
 $\tilde{\gamma} \in L^p$   $\|\tilde{\gamma}\| \leq \|G\|_q$   
 $F \in L^p(\mu)$   $\int FG \, d\mu = \int FG \, d\mu = \int F \cdot G \, d\mu = N_p(1) \cdot \|G\|_q$   
 $= N_p(1) \cdot \|G\|_q = \|F\|_p \cdot \|G\|_q$   
 2. Schritt  $q \neq 1 \Rightarrow \|\tilde{\gamma}\| \geq \|G\|_q$   
 $q \neq 1 \quad \gamma := \begin{cases} \int FG \, d\mu & q=1 \\ \int FG \, d\mu & q \neq 1 \end{cases}$  u. messbar da  $|g|^{q-2}$   $\mu$  messbar  
 $\Rightarrow \|F\|_p = \|G\|_q$   $\|F\|_p = \|G\|_q^{q-1} \cdot \int |g| \, d\mu$

4. Schritt  $q=1 \Rightarrow \|\tilde{\gamma}\| = \|G\|_1$   
 o.B.d.A.  $\|G\|_1 \neq 0$   
 $\alpha > 0 \quad \alpha \leq \|G\|_1$   
 $A := \{ |g| > \alpha \}$  keine  $\mu$  Nullmenge  
 $\exists B \in \mathcal{R} \quad \mu(B) > 0$  keine  $\mu$  Nullmenge  
 $f := \begin{cases} 1 & A \cap B \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$   
 $1_A = \chi_{A \cap B} \quad \chi_{A \cap B} \in L^1(\mu)$   
 $\|G\|_1 = \int |G| \, d\mu = \|\tilde{\gamma}\|_1 \geq \int f |G| \, d\mu = \int f |G| \, d\mu$   
 $= \int |G| \chi_{A \cap B} \, d\mu \geq \alpha \int \chi_{A \cap B} \, d\mu = \alpha \int \chi_{A \cap B} \, d\mu$   
 $\Rightarrow \|\tilde{\gamma}\| \geq \alpha \quad \alpha$  beliebig  $\|\tilde{\gamma}\| \geq \|G\|_1$

$\|f\|_p = N_p(f) = \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left( \int |g|^q \, d\mu \right)^{1/p}$   
 $= N_q(g)^{q/p} = (\|G\|_q)^{q/p}$   
 $\|\tilde{\gamma}\|_p = \|G\|_q \quad \|f\|_p \geq \|G(f)\| = \int |fg| \, d\mu = \int |g|^q \, d\mu$   
 $= \|G\|_q^q$   
 also  $\|G\|_q \geq (\|G\|_q)^{q-1} = \|G\|_q$   
 $q=1 \quad f := \chi_{g > 0} - \chi_{g < 0}$   
 $\|\tilde{\gamma}\| \geq \|G(f)\| = \int fg \, d\mu = \int |g| \, d\mu = \|G\|_1$

$p \in [1, \infty] \quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}$  d. Ring  
 $\gamma: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad A \mapsto \gamma(A)$   $\mu$  absolutstetig  
 $p \neq 1$   $\gamma$  beschränkt

$\gamma: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad A \mapsto \gamma(A)$

1. Schritt  $\gamma$  ist Mass

$(A_n)$  div. Folge mit  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$   
 $B_n := \bigcup_{m=1}^n A_m$   
 $\gamma(A) = \gamma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(B_n)$  da  $\|A_n - A_m\|_p = \left( \int |A_n - A_m|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left( \int |A_n - A_m|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \mu(A_n - A_m)^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \gamma(A_m)$  ist somit konvergent und  $\gamma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma(A_n)$

2. Schritt  $\mu$  absolutstetig

$\mu(A) = 0 \Rightarrow A_n = \emptyset \quad \gamma(A) = \gamma(A_n) = \gamma(\emptyset) = 0$

3. Schritt  $p \neq 1 \Rightarrow \mu$  ist  $\sigma$ -beschränkt

Sei  $f_n$  Folge aus  $L^p$   $\|f_n\| \leq 1 \quad \sup_n \gamma(A_n) < \infty$   
 Ann. Folge in  $\mathcal{R} \quad \{f_n \neq 0\}$  - Union u. Nullmenge  $A_n := \bigcup_{m=1}^n A_m$   
 Sei  $A \in \mathcal{R} \quad B := A \setminus A_n \in \mathcal{R}$  wollen zeigen:  $\gamma(B) = 0$   
 $\alpha \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N} \quad f_n \neq 0 \in L^p \quad \|f_n + \alpha \chi_B\|_p = \|f_n + \alpha \chi_B\|_p = \left( \int |f_n + \alpha \chi_B|^p \, d\mu \right)^{1/p}$   
 $\|f_n + \alpha \chi_B\|_p = \left( \int |f_n + \alpha \chi_B|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int |f_n|^p \, d\mu + \mu(B) \cdot |\alpha|^p \right)^{1/p}$   
 $\leq \left( \int |f_n|^p \, d\mu + \mu(B) \cdot |\alpha|^p \right)^{1/p}$   
 $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \alpha \mapsto (1 + \alpha^p \mu(B))^{1/p}$   
 also  $\|f_n + \alpha \chi_B\|_p \leq \varphi(|\alpha|)$   
 und damit  $\| \varphi \|_{\infty} \geq \| \varphi \| \geq \| \varphi \| \geq \varphi(|\alpha|) \geq \varphi(|\alpha|) = \varphi(|\alpha|) + \alpha \varphi'(B) = \varphi(|\alpha|) + \alpha \varphi'(B)$   
 $\| \varphi \|_{\infty} \geq \| \varphi \| + \alpha \varphi'(B)$

$\gamma(B) \leq \| \varphi \|_{\infty} \left( \frac{\varphi(|\alpha|) - \varphi(0)}{\alpha} \right) \leq \| \varphi \|_{\infty} \left( \frac{\varphi(|\alpha|) - \varphi(0)}{\alpha} \right)$   
 $\gamma(B) \leq \| \varphi \|_{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\varphi(|\alpha|) - \varphi(0)}{\alpha}$   
 $\stackrel{1. \text{Step}}{=} \| \varphi \|_{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi'(\alpha) = \| \varphi \|_{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{p} (1 + \alpha^p \mu(B))^{1/p-1} \cdot p \alpha^{p-1} \mu(B) = 0$

$p, q \in [1, \infty] \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$   
 Für  $p \in (1, \infty)$  ist  $\gamma: L^q \rightarrow L^p$   
 $G \mapsto \tilde{\gamma}$   
 ein Isom. von Banachräumen  
 für  $p=1$  falls  $\mu$   $\sigma$ -beschränkt

$\gamma$  o.B.d.A.  $\mathcal{R}$  d. Ring  
 müssen Nachweise zeigen: Sei  $\gamma \in (L^p)'$  suchen  $G$  mit  $\tilde{\gamma} = \gamma$   
 $\gamma: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \gamma(A) = \gamma(A)$  ist  $\mu$ -absolutstetig  $\sigma$ -beschränkt für  $p \neq 1$   
 für  $p=1$  ist  $\mu$   $\sigma$ -beschränkt vorausgesetzt dann ist  $\gamma$  auch  $\sigma$ -beschränkt  
 R.N.:  $\exists \tilde{\gamma}$  messbar, lokal  $\mu$ -messbar  $\tilde{\gamma} \cdot \mu = \gamma$  und Anzun.  $\exists \tilde{\gamma} \neq 0 \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$

1. Schritt  $p \neq 1 \Rightarrow \tilde{\gamma} \in L^q$   
 $f$  posit. Trägerfkt. auf  $X$  bez  $\mathcal{R} \quad f \in \mathcal{R}^+$  (bzw.  $f \in \mathcal{R}^+$ )

$\|f\|_q = \left( \int f^q \, d\mu \right)^{1/q}$  und  $\int f^q \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{q-1} \int \alpha_i \chi_{A_i} \, d\mu \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^{q-1} \int \alpha_i \chi_{A_i} \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{q-1} \gamma(A_i)$   
 ins.  $\int f^q \, d\mu \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^{q-1} \int \alpha_i \chi_{A_i} \, d\mu \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^{q-1} \int \alpha_i \chi_{A_i} \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{q-1} \gamma(A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{q-1} \gamma(A_i)$   
 dh:  $\left( \int f^q \, d\mu \right)^{1/q} \leq \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^{q-1} \gamma(A_i) \right)^{1/q} = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^{q-1} \gamma(A_i) \right)^{1/q} = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^{q-1} \gamma(A_i) \right)^{1/q} \leq \| \tilde{\gamma} \|_q \| f \|_q = \| \tilde{\gamma} \|_q \| f \|_q$   
 u. h.  $\left( \int f^q \, d\mu \right)^{1/q} \leq \| \tilde{\gamma} \|_q$   
 $g^q = \int f^q \, d\mu \quad (g^q)^{1/q} = \int f \, d\mu$  Riesz Lemma  $\Rightarrow (g^q)^{1/q} \in L^q \Rightarrow g \in L^q$

3. Schritt  $\tilde{\gamma} = \gamma$

$\gamma(A_n) = \gamma(A) = \int \gamma \chi_{A_n} \, d\mu = \int \gamma \chi_{A_n} \, d\mu = \int \tilde{\gamma} \chi_{A_n} \, d\mu$

$\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  fallen auf  $\mathcal{R}$  zusammen  $\sigma$ -beg., denn ist!

Öteler  
589

$p, q \in [1, \infty] \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad f \in L^p(\mu) \quad g \in L^q(\mu)$   
 $\rightarrow f \cdot g \in L^1(\mu) \text{ und}$   
 $N_1(f \cdot g) \leq N_p(f) \cdot N_q(g)$

①  $f, g$  messbar  
 $\Rightarrow f \cdot g$  messbar

$\Gamma$   $N_p(f) = 0$  oder  $N_q(g) = 0 \Rightarrow f = 0 \mu$ -f.ü. oder  $g = 0 \mu$ -f.ü. also  $f \cdot g = 0 \mu$ -f.ü.  $\rightarrow \int f \cdot g = 0$

also o.B.d.A.  $N_p(f) \neq 0 \quad N_q(g) \neq 0$   
 $p=1 \quad q=\infty \quad f, g$  messbar da  $f$  messbar,  $g$  messbar ① und  $|f \cdot g| \leq N_q(g) |f| \mu$ -f.ü.  $\Rightarrow f \cdot g \in L^1(\mu)$  mit  $N_1(f \cdot g) \leq N_1(f) \cdot N_\infty(g)$   
 also o.B.d.A.  $p \in (1, \infty)$

1. Schritt:  $\forall t \in (0, \infty) \quad t \frac{1}{p} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{q}$

2. Schritt  $\forall \alpha, \beta \in (0, \infty) \quad \alpha \frac{1}{p} \beta \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}$

$\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto \frac{t}{p} + \frac{1}{q} - t \frac{1}{p}$

o.B.d.A.  $\alpha, \beta \in (0, \infty)$

$t \in (0, \infty) \quad \varphi'(t) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$

$\frac{\alpha}{\beta} \in (0, \infty) \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \frac{1}{p} \leq \frac{\alpha}{\beta p} + \frac{1}{q}$

$\varphi''(t) = -\frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - 1\right) + \frac{1}{p^2} > 0$

$\Rightarrow \alpha \frac{1}{p} \beta \frac{1}{q} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}$

$\varphi'(t) = 0 \Rightarrow \varphi$  besitzt Minimum

da  $\frac{t}{p} + \frac{1}{q} - t \frac{1}{p} \geq \varphi(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 0$

3. Schritt: Beh

$\times s x \quad \alpha := \frac{|f(x)|}{N_p(f)} \quad \beta := \frac{|g(x)|}{N_q(g)}$

2. Schritt  $|f(x)| |g(x)| \leq N_p(f) N_q(g) \cdot \left(\frac{|f(x)|}{N_p(f)}\right)^p + \left(\frac{|g(x)|}{N_q(g)}\right)^q$

$|f \cdot g| \leq N_p(f) N_q(g) \left(\frac{1}{p} \frac{|f|}{N_p(f)}\right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g|}{N_q(g)}\right)^q$

$\Rightarrow f \cdot g \in L^1(\mu)$

$f, g$  messbar  $\Rightarrow f \cdot g$  messbar

$N_1(f \cdot g) \leq \left(\frac{1}{p N_p(f)}\right)^p \int |f|^p d\mu + \frac{1}{q N_q(g)} \int |g|^q d\mu = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) N_p(f) \cdot N_q(g) = N_p(f) \cdot N_q(g) \quad \dashv$

oski

$p \in [1, \infty] \quad f, g \in L^p(\mu) \quad \times s \mathbb{R}$   
 $f \pm g, \alpha f, f \cdot g, f \wedge g \in L^p(\mu)$   
 $N_p(f \pm g) \leq N_p(f) + N_p(g)$   
 $N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f)$

1. Schritt  $\forall f, f \wedge g, f \vee g \in L^p(\mu)$   
 $N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f)$

2. Schritt  $f \wedge g \in L^p(\mu) \quad N_p(f \wedge g) \leq N_p(f) + N_p(g)$   
 $\forall f, f \wedge g$  messbar

$f, g$  messbar  $\Rightarrow \alpha f, f \wedge g, f \vee g$  messbar

$f \wedge g = \min(f, g) \quad f \wedge g$  messbar  $\Rightarrow f \wedge g$  messbar

$p = \infty \Rightarrow$  Beh. trivial

$p = \infty \quad |f| \leq N_\infty(f) \mu$ -f.ü.

$p = \infty \Rightarrow |f| \leq N_\infty(f) \mu$ -f.ü.  $|f \wedge g| \leq |f| \leq N_\infty(f) \mu$ -f.ü.

$|f \wedge g| \leq |f| \leq N_\infty(f) \mu$ -f.ü.  $\Rightarrow N_\infty(f \wedge g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$   
 $= (f \wedge g) \in L^\infty(\mu) \text{ und } N_\infty(f \wedge g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$

$N_p(f \wedge g) \leq N_p(f) \wedge N_p(g)$

$N_p(f \vee g) \leq N_p(f) \vee N_p(g)$

$N_p(\alpha f) = \left(\int |\alpha f|^p\right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \int |f|^p\right)^{1/p} = |\alpha| \cdot \left(\int |f|^p\right)^{1/p} = |\alpha| N_p(f)$

Fall  $p = \infty \quad f \wedge g \in L^p(\mu)$  da  $f, g$  messbar

$|f \wedge g|^p \leq (|f| \vee |g|)^p \leq 2^p (|f|^p \vee |g|^p) \in L^1(\mu)$

3. Schritt  $f \wedge g \in L^p(\mu)$  numerisch

$N_p(f \wedge g) \neq 0$  o.B.d.A. und  $p > 1$

$f: X \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{matrix} f(x) & |f(x)| & \leq \\ 0 & \text{sonst} \end{matrix}$

$q := \frac{p}{p-1}$  (was bedeutet  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \quad |f \wedge g|^{p-1} \cdot g = |f \wedge g|^p$ )

und damit  $|f \wedge g|^{p-1} \in L^q(\mu)$

$f \wedge g = f \wedge g \mu$ -f.ü.  $N_p(f \wedge g) \leq N_p(f) + N_p(g)$

$N_q(|f \wedge g|^{p-1}) = \left(\int |f \wedge g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \left(\int |f \wedge g|^p\right)^{1/q} = N_p(f \wedge g)^{\frac{p}{q}} \times$

$N_p(f \wedge g) \leq N_p(f) + N_p(g)$

folgt:  $|f \wedge g|^{p-1} \cdot |f \wedge g| \leq |f \wedge g|^p \in L^1(\mu)$

$f \wedge g = f \wedge g \mu$ -f.ü.  $\Rightarrow f \wedge g \in L^p(\mu)$

$N_p(f \wedge g)^p = \int |f \wedge g|^p = \int |f \wedge g|^{p-1} |f \wedge g| \leq \int |f \wedge g|^{p-1} (|f| + |g|) = \int |f \wedge g|^{p-1} |f| + \int |f \wedge g|^{p-1} |g|$

$N_p(f \wedge g) \leq N_p(f) + N_p(g)$

$\leq N_p(f) \cdot N_q(|f \wedge g|^{p-1}) + N_p(g) \cdot N_q(|f \wedge g|^{p-1})$   
 $= (N_p(f) + N_p(g)) \cdot N_p(f \wedge g)^{\frac{p}{q}}$  also

$N_p(f \wedge g) \leq N_p(f) + N_p(g)$

da  $p - \frac{p}{q} = p - (p-1) = 1$

$f_n$  Folge aus  $L^p(\mu)$ ,  $\sum N_p(f_n) < \infty$   
 $\Rightarrow \sum f_n \in L^p(\mu)$  und  $N_p(\sum f_n) \leq \sum N_p(f_n)$

$\Gamma$  endl. Summe d. vektor. Techn. von Minkowski

$p < \infty \quad \left(\sum_{n=1}^m |f_n|^p\right)^{1/p}$  messbar zum Folge aus  $L^p(\mu)$

$\sup \int \left(\sum_{n=1}^m |f_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum N_p(f_n)\right)^p < \infty$

$N_p(\sum f_n) = N_p\left(\left(\sum_{n=1}^m |f_n|^p\right)^{1/p}\right) \leq \left(\sum_{n=1}^m N_p(f_n)\right)^{1/p} = \sup \int \left(\sum_{n=1}^m |f_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum N_p(f_n)\right)^{1/p} = \sum N_p(f_n) \quad \dashv$

$p = \infty \quad \left\{ \sum_{n=1}^m |f_n| > \sum_{n \in \mathbb{N}} N_\infty(f_n) \right\}$   $\mu$  Nullmenge  $\Rightarrow \left\{ \sum_{n=1}^m |f_n| > \sum_{n \in \mathbb{N}} N_\infty(f_n) \right\} \mu$  Nullmenge

also  $\sum_{n=1}^m |f_n| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} N_\infty(f_n) < \infty$

$N_\infty(\sum f_n) \leq \sum N_\infty(f_n) \quad \dashv$

cor

$p \in [1, \infty]$  für Folge aus  $L^p(\mu)$  mit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} N_p(f_n - f_n) < \infty$   
 $\Rightarrow \exists f \in L^p(\mu) \cap \mathbb{R}^X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \mu\text{-f.ü.}$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} N_p(f_n - f) = 0$

Konvergenz  
 $f_n \rightarrow f$

$\Gamma \quad g_n := \sum_{m=0}^n |d_m - f_m| \in L^p(\nu) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_p(g_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n N_p(d_m - f_m) = 0$

$|f_n - f_m| \leq g_n \quad A := \{g_n < \infty\}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0 \quad \mu\text{-f.ü.}$

$\{n \mid g_n(x) < \infty\}$  Cauchyfolge  $\mu\text{-f.ü.}$

Definieren:  $f: X \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$

$f = \liminf f_n \quad \mu\text{-f.ü.} \quad f$  messbar

$|f_n - f| \leq g_n \quad \mu\text{-f.ü.}$

also  $f_n - f \in L^p(\mu) \quad f \in L^p(\mu)$

$N_p(d_n - f) \leq N_p(g_n)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} N_p(f_n - f) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_p(g_n) = 0 \quad \checkmark$

cor

Fischer Riesz  
1907

$p \in [1, \infty]$   
 $L^p(\mu)$  ist Banachraum

$\Gamma \quad (F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  CF in  $L^p(\mu)$

$F_{k_n}$  Teilfolge  $\|F_{k_n} - F_{k_m}\|_p < \frac{1}{2^n} \quad \forall m > k_n$

$f_n \in F_{k_n} \quad N_p(f_n - f_{n+1}) = \|F_{k_n} - F_{k_{n+1}}\|_p < \frac{1}{2^n}$

$\sum N_p(f_n - f_{n+1}) < \infty$

obige Wahl  $\Rightarrow \exists f \in L^p(\mu) \cap \mathbb{R}^X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \mu\text{-f.ü.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_p(f_n - f) = 0$

Beh:  $F_n \rightarrow f$

$\varepsilon > 0$  vorgeg.  $\exists n \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $N_p(f_n - f) < \frac{\varepsilon}{2}$   
 $m > k_n$

$\|F_m - f\|_p \leq \|F_m - F_{k_n}\|_p + \|F_{k_n} - f\|_p$   
 $\leq \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \checkmark$

cor

Dicht  
in  $L^p(\mu)$

$p \in [1, \infty]$   
 $L$  Treppenf. auf  $X$  bezgl.  $\mu$   
 $\rightarrow \{f \mid f \in L\}$  dicht in  $L^p(\mu)$

$\mathbb{R}$  Ring  
 $\exists$   $f \in L^p(\mu) \cap \mathbb{R}^X$   
 $f = g \quad \mu\text{-f.ü.} \quad g \in \mathbb{R}$  messb.  
 $\exists$   $f \neq 0$  heißt also überdeckt

$\Gamma$  1. Fall  $\mathbb{R}$  Ring

$F \in L^p(\mu) \quad \exists f \in F$   $\mathbb{R}$  messb. mit abzählb. Wert von  $f \neq 0$   $\times$

$f' = \vee g_n \quad f = \vee h_n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} N_p(g_n - f') = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} N_p(h_n - f) = 0$

$f_n := g_n - h_n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - F\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} N_p(f_n - f) = 0$

2. Fall  $\mathbb{R}$  Mengerring  $F = \overline{\{f \mid f \in L\}}$

$\Sigma := \{A \in \mathcal{E} \mid \chi_A \in F\}$  monotone Menge die  $\mathbb{R}$  enthält  $S = \mathbb{R}^d$

$f \in L_{\Sigma} \quad f = \sum d_i \chi_{A_i} \quad A_i \in \mathcal{E}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0 \quad f_n \in L$

$f_n := \sum d_i \chi_{A_i} \in L \quad \|f_n - f\|_p \leq \sum |d_i| \|f_n - \chi_{A_i}\|_p \rightarrow 0$

3. Fall  $\mathbb{R}$  HMR

Treppenf. bez  $\mu$  ist Treppenf. bez  $\mathbb{R}$  da  $\mathbb{R}_f = \{ \cup A_k \mid A_k \text{ disj. endl. Fam. aus } \mathbb{R} \}$

$\mathbb{R}^2$  separabel

$M := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \text{ für } x_2 \neq 0\}$   
 ist dicht in  $\mathbb{R}^2$ :  $\forall \epsilon > 0 \exists x_1 \in M$  mit  $\|x_1 - x\| < \epsilon$

$\exists x_1 \in M \mid \|x_1 - x\| \leq \frac{\epsilon}{N}$   
 d.h.  $\|x_1 - x\| \leq 2\epsilon$

$\mathbb{R}^{\infty}$  separabel

$\Gamma$  FSM  $x_F := (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $x_i = \begin{cases} 1 & i \in F \\ 0 & i \notin F \end{cases}$   
 $d(x_F, x_{F'}) = 1 \iff F \neq F'$

$K(F) = U(x_F, \frac{1}{2})$

$F \neq F' \implies K_F \cap K_{F'} = \emptyset$  d.h. Menge d.  $K_F$  nicht abzählbar  
 also: jeder Pkt hat überabzählbar viele disjunkte Umgebungen, es gibt also immer eine Umgebung, welche keine abzählbare Menge enthält

Banachscher Fixpunktsatz

Jede kontrakt. Abbild.  $A: E \rightarrow E$  hat eindeut. Fixpunkt  
 $E = \bar{E} \subseteq X$  vollst.

$\Gamma$   $x_0 \in E$   $A(x_j) = x_{j+1}$

$d(x_{j+1}, x_j) \leq \theta d(x_j, x_{j-1})$

$d(x_{j+1}, x_0) \leq \sum_{k=j}^{\infty} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \theta^k d(x_1, x_0) \leq \frac{\theta^j}{1-\theta} d(x_1, x_0)$

$x_j$  Cauchyfolge  $x_j \rightarrow x^*$

eindeut.:  $0 \leq d(x^*, x^{**}) = d(Ax^*, Ax^{**}) \leq \theta d(x^*, x^{**})$   
 $0 \leq (1-\theta) d(x^*, x^{**}) \leq 0 \implies d(x^*, x^{**}) = 0$

Anwendungen:

- $\dot{x} = f(t, x)$   $x_0 = x_0$  stetig hat eindeut. lokale Lösung
- $x(t) = A \int_0^t h(s) x(s) ds + g(t)$  mit eindeut. Lösung, falls  $\|A\| \cdot \max \int_0^t |h(s)| ds < 1$   
 hat eindeut. Lösung, falls  $h(s) = 0 \quad t \leq \epsilon$  (Volterra integralgleichung)

Volterra Operator  $Vf(x) = \int_0^x h(x,y) f(y) dy = \int_0^x f(y) dy$   
 $X = \{f \in C\}$

Satz von Hahn Banach

$X$   $\mathbb{R}$ -VR  
 $g$ : sublineares Funktional auf  $X$   
 $M$  lineare Mannigfaltigkeit  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  lineares Funktional  
 $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in M \implies \exists F: X \rightarrow \mathbb{R}$  lin. Funktional  $F|_M = f \quad F(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$

$\Gamma$  Lemma: Betr mit  $\text{codim } 1$  für  $M$

$\Gamma$  wähle  $x_0 \in X \setminus M$  fest  $X = M \vee \{x_0\} = \{tx_0 + y \mid t \in \mathbb{R} \quad y \in M\}$   
 Angenommen  $F$  existiere  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(x) \leq g(x)$

Setze  $d_0 = F(x_0)$

Für  $t > 0$   $y_1 \in M$  gilt  $F(tx_0 + y_1) = t \cdot d_0 + f(y_1) \leq g(tx_0 + y_1)$

d.h.  $d_0 \leq \frac{g(tx_0 + y_1) - f(y_1)}{t} = g(x_0 + \frac{y_1}{t}) - f(\frac{y_1}{t})$

d.h.  $d_0 \leq g(x_0 + y_1) - f(y_1) \quad \forall y_1 \in M$

umgekehrt  $t d_0 \leq g(tx_0 + y_2) - f(y_2) \quad \forall y_2 \in M \quad \forall t > 0$

Für  $t > 0$   $y_2 \in M$   $d_0 \geq f(y_2) - g(-x_0 + y_2) \quad \forall y_2 \in M$

und  $-t d_0 + f(y_2) \leq g(tx_0 + y_2) \quad \forall y_2 \in M \quad t > 0$

müssen also  $d_0$  so wählen, dass

$f(y_2) - g(-x_0 + y_2) \leq d_0 \leq g(x_0 + y_1) - f(y_1) \quad (*)$

d.h.  $f(y_2) + f(y_1) \leq g(x_0 + y_1) + g(-x_0 + y_2)$

$f(y_1 + y_2) \leq g(x_0 + y_1) + g(-x_0 + y_2)$

aber  $f(y_1 + y_2) \leq g(y_1 + y_2) = g(y_1 + x_0 - x_0 + y_2) \leq g(x_0 + y_1) + g(-x_0 + y_2)$

sehen  $F(tx_0 + y) = t d_0 + f(y)$  mit  $d_0$  nach (\*) gewählt

$\mathcal{F} = \{M_i, f_i\}$   $M_i$  lin. Mannigfaltigkeit in  $X$   $M_i \supseteq M$   $f_i: M_i \rightarrow \mathbb{R}$  lin. Funktional  $f_i|_M = f$   
 $(M_i, f_i), (M_j, f_j) \in \mathcal{F}$  definieren  $(M_i \cup M_j, f)$  falls  $M_i \subseteq M_j$   $f_i|_{M_i} = f$

$\{S_i, \epsilon_i\}$  partiell geordnete Menge.

$\mathcal{C} = \{(M_i, f_i)\}$  Kette in  $\mathcal{F}$   $M_i = \bigcup_j M_j$  lin. Mannigfalt.  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$   
 $F(x) = f_i(x) \quad x \in M_i$

$(M_i, F)$  o.k.schränkte für  $\mathcal{C}$  Zorn  $\mathcal{P}$  hat maxim. Element  $(Y, F)$   
 Lemma:  $Y = X \implies F$  gesuchte Erweiterung

Erweiterung des Theorems auf  $\mathbb{C}$

$p$ : Seminorm auf  $X$   
 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  lin. Funktional  
 $\tilde{f}(\lambda) := f(\lambda) - i f(i\lambda)$  ist ein eindeutiges  $\mathbb{C}$ -lin. Funktional mit  $f = \operatorname{Re} \tilde{f}$   
 $|f(\lambda)| \leq p(\lambda) \forall \lambda \Leftrightarrow |\tilde{f}(\lambda)| \leq p(\lambda) \forall \lambda \quad \|f\| = \|\tilde{f}\|$

1)  $\tilde{f}(\lambda)$  ist  $\mathbb{C}$ -linear  $\tilde{f}(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y) - i f(i(\alpha x + \beta y))$   
 $= \alpha f(x) + \beta f(y) - i(\alpha f(ix) + \beta f(iy)) = \tilde{f}(\alpha x) + \tilde{f}(\beta y)$   
 $f = \operatorname{Re} \tilde{f} \quad \operatorname{Re} \tilde{g} = f \quad g(ix) = i g(x) \quad \operatorname{Re} i g(x) = \operatorname{Re} g(ix) = f(ix)$   
 $-i g(ix) = g(x) \quad \operatorname{Im} g(x)$

2)  $|\tilde{f}(\lambda)| \leq p(\lambda) \forall \lambda \quad f(\lambda) = \operatorname{Re} \tilde{f}(\lambda) \leq |\tilde{f}(\lambda)| \leq p(\lambda)$   
 auch  $-f(\lambda) = \operatorname{Re} \tilde{f}(-\lambda) \leq |\tilde{f}(-\lambda)| \leq p(\lambda)$  }  $|f(\lambda)| \leq p(\lambda)$

$|f(\lambda)| \leq p(\lambda)$  wähle  $\theta$  so dass  $\tilde{f}(\lambda) = e^{i\theta} |f(\lambda)|$   
 $\tilde{f}(\lambda) = \tilde{f}(e^{-i\theta} \lambda) = \operatorname{Re} \tilde{f}(e^{-i\theta} \lambda) = f(e^{-i\theta} \lambda) \leq p(e^{-i\theta} \lambda) = p(\lambda)$

3)  $\|f\| = \sup \frac{|f(\lambda)|}{|\lambda|}$   
 $p(\lambda) := |\lambda| \cdot \|f\| \quad \text{d.h. } |f(\lambda)| \leq |\lambda| \cdot \|f\|$   
 $\Rightarrow |\tilde{f}(\lambda)| \leq |\lambda| \cdot \|f\| \quad \text{d.h. } \|f\| \geq \|\tilde{f}\|$   
 $|f(\lambda)| \leq |\lambda| \cdot \|f\|$   
 $\Rightarrow |f(\lambda)| \leq |\lambda| \cdot \|f\| \quad \text{d.h. } \|f\| \leq \|\tilde{f}\| \quad \_$

Corollar

$X$  UR  $M$  lin. Mannigf.  
 $p: X \rightarrow [0, \infty)$  seminorm  
 $f: M \rightarrow \mathbb{F}$  lineares Funktional  $|f(\lambda)| \leq p(\lambda) \Rightarrow \exists F: X \rightarrow \mathbb{F} \quad F|_M = f \quad |F(\lambda)| \leq p(\lambda) \forall \lambda$

$\Gamma \quad |F| = \|F\| \quad f(\lambda) = |f(\lambda)| \leq p(\lambda)$   
 $F(\lambda) \leq p(\lambda)$  Erweiterung  
 $-F(\lambda) = F(-\lambda) \leq p(\lambda)$

$|F| = \|F\| \quad f = \operatorname{Re} f \quad |f| \leq p \quad \exists$  funktional  $F_0: X \rightarrow \mathbb{R} \quad F_0|_M = f \quad |F_0| \leq p$   
 $F(\lambda) = F_0(\lambda) - i F_0(i\lambda) \quad |F| = \|f\|$

Corollar

$f: M \rightarrow \mathbb{F}$  beschr. lin. Funktional  $X$  normierter Raum  
 $\Rightarrow \exists F \in X^* \quad F|_M = f \quad \|F\| = \|f\|$

$\Gamma \quad |f(\lambda)| \leq |\lambda| \cdot \|f\|$   
 $\Rightarrow \exists F$  erwei.  
 $F(\lambda) \leq |\lambda| \cdot \|f\| \quad \text{d.h. } \|F\| \leq \|f\|$   
 $\|f\| \leq \|F\|$  trivial  $\_$

Corollar

$\{x_1, \dots, x_d\}$  unabh. Menge  $x_j$  ... d. d. lin. Skalar  
 $\Rightarrow \exists f \in X^* \quad f(x_j) = \delta_{j,i} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, d\}$

$\Gamma \quad M = \langle x_1, \dots, x_d \rangle$   
 $g: M \rightarrow \mathbb{R} \quad g(\sum \beta_j x_j) = \sum \beta_j \delta_j$   
 $f$  Erweiterung  $\_$

Corollar

$\|x\| = \sup \{ |f(x)| \mid f \in X^* \quad \|f\| \leq 1 \} = \|x\|_{X^*}$   
 mit Streifen-Topologie

$\Gamma \quad |f(x)| \leq \|x\| \cdot \|f\|$   
 d.h.  $\|x\| \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|} > \|f(x)\| \quad \forall f \neq 0$

$M := \{ \beta x \mid \beta \in \mathbb{F} \}$   
 $g: M \rightarrow \mathbb{F} \quad g(\beta x) = \beta \|x\|$   
 $g \in M^* \quad \|g\| = 1$   
 $\exists f \quad \|f\| = 1 \quad f(x) = g(x) = \|x\| \quad \_$

Corollar

$M \subseteq X \quad x_0 \in X \setminus M \quad d = \operatorname{dist}(x_0, M)$   
 $\Rightarrow \exists f \in X^* \quad f(x_0) = 1 \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in M$   
 $\|f\| = d^{-1}$



d.h.  $M \subseteq X \quad x_0 \in X \setminus M$   
 $\Rightarrow \exists f \in M^\circ \quad f(x_0) = 1 \quad \|f\| = d^{-1}$

$\Gamma \quad Q: X \rightarrow X/M$   
 $\|x_0 + M\| = \sup_{y \in M} \|x_0 + y\| = \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| = d$   
 $\exists g \in (X/M)^* \quad g(x_0 + M) = d \quad \|g\| = 1$   
 $f = d^{-1} \cdot (g \circ Q) : X \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f$  stetig  $f|_M = 0 \quad f(x_0) = 1$   
 auch  $|f(x)| = d^{-1} |g(Q(x))| \leq d^{-1} \|Q(x)\| \leq d^{-1} \|x\|$   
 also  $\|f\| \leq d^{-1}$   
 $\|g\| = 1 \Rightarrow \exists x_1 \in X/M \quad |g(x_1 + M)| = 1$   
 $\|x_1 + M\| = d^{-1}$   
 $\forall x \in M \quad \|x_1 + x + M\| = 1 \quad |f(x_1 + x)| = d^{-1} |g(x_1 + M)| = 1$   
 $\Rightarrow \|f\| = d^{-1}$

Corollar

$\exists f \in X^* \quad f(x_0) = \|x_0\| \quad \|f\| = 1$

$\Gamma \quad M = \{ \lambda x_0 \} \quad f(m) = \lambda \|x_0\| \quad \|f\| = \|m\|$   
 $\text{d.h. } \exists \tilde{f} \quad |\tilde{f}(\lambda)| \leq |\lambda| \Rightarrow \|\tilde{f}\| = 1$

Corollar

$\|x_0\|^{**} = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x_0)| = \|x_0\|$

$$M \subseteq X$$

$$\overline{M} = \bigcap \{ \ker f \mid f \in X^* \text{ mit } M \subseteq \ker f \} = N$$

$$M \text{ dicht in } X \iff f|_M = 0 \implies f = 0$$

$\Gamma \overline{M} \subseteq N$  (Stetigkeit von  $f$ )  
 $x_0 \notin \overline{M} \implies d = \text{dist}(x_0, M) > 0$   
 $\exists f \in X^* \text{ mit } f(x_0) = 1 \text{ und } f(x) = 0 \forall x \in M$  d.h.  $\ker f \subseteq N$   
 $\implies x_0 \notin N$  also  $N \subseteq \overline{M}$

$\Gamma X = \overline{M} = \bigcap \{ \ker f \mid M \subseteq \ker f \text{ mit } f \in X^* \} = N$   
 $\forall f \text{ mit } f|_M = 0 \implies f \in N$   
 $\Leftarrow \forall f \text{ mit } f|_M = 0 \implies f = 0 \implies X = \bigcap \ker f$

Banachraum  
 äqu. mit  $\|\cdot\|$   
 als  $X$  norm. Raum

$\Gamma X^*$  ist ein normierter Raum  
 $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$  klar  
 $\|f\| = 0 \iff f = 0$  klar  
 $X^*$  ist vollständig

$B := \{ x \in X \mid \|x\| \leq 1 \}$   
 $f \in X^* \implies \rho(f) : B \rightarrow X \text{ mit } \rho(f)(x) = f(x)$   
 $\rho : X^* \rightarrow C_b(B)$  ist lineare Isometrie  $\|f\| = d$   
 $\|\rho(f)\| = \sup_{x \in B} \|f(x)\| = d$

$C_b(B)$  ist vollständig  
 $\Gamma \{f_n\} \subset C_b(B) \implies \|f_n - f_m\| \leq \epsilon \implies \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \epsilon$   
 $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \implies |f(x) - f_m(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + \|f_n - f_m\| \leq |f(x) - f_n(x)| + \epsilon$   
 $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon \implies \|f - f_n\| \leq \epsilon \text{ für } n > N_\epsilon$   
 $\rho(X^*)$  ist abgeschlossen

$\Gamma \{f_n\} \subset X^* \implies g \in C_b(B) \implies \|f_n - g\| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$   
 $x \in X \text{ mit } \alpha x \in B \implies \alpha' g(\alpha x) = \lim \alpha' f_n(\alpha x)$   
 definieren  $f(x) = \alpha' g(\alpha x)$   
 Beh.  $f \in X^* \implies \rho(f) = g \implies \rho(f)(x) = f(x) = \alpha' g(\alpha x) = g(x)$

besserer Beweis:  
 $X$  norm. Raum  
 $Y$  Banachraum  $\implies \mathcal{L}(X, Y)$  Banachraum

$\Gamma \{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$   
 $x \in X \implies \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \epsilon \cdot \|x\| \text{ für } n, m > N$   
 d.h.  $T_n(x)$  CF  $\forall x \implies T_n(x) \rightarrow T(x)$  do  $Y$  Banachraum  
 $T$  ist linear  $T_n(\lambda x + \mu y) = \lambda T_n(x) + \mu T_n(y)$   
 $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$   
 $T$  ist stetig  $T_n$  ist beschränkt  
 $\|T_n\| \leq M$   
 $\|T_n(x)\| \leq M \|x\|$   
 $\|T(x)\| \leq M \|x\| \implies T$  stetig  
 $T_n \rightarrow T$   
 $\forall n > N \implies \|T_n(x) - T(x)\| \leq \epsilon \|x\|$

normiert  
 $x \rightarrow \mathbb{R}$  lin. Funkt.  
 stetig  $\iff \ker f$  abgeschl.

$\Gamma \bullet$   $f$  stetig  $\implies f^{-1}(0) = \ker f$  abgeschl.  
 $\implies \ker f$  abgeschl.  $Q : X \rightarrow X / \ker f$  natürliche Abbildung stetig  
 $T : X / \ker f \rightarrow \mathbb{R}$  Isomorphismus  $T$  stetig  
 $g := T \circ Q \implies \ker f = \ker g \implies g$  stetig  
 $\implies f = dg \implies f$  stetig

andere Beweis  
 $\bullet$   $f$  nicht besch.  $\|x_j\| = 1 \implies \|f(x_j)\| \rightarrow \infty$   
 wähle  $y \in X \text{ mit } \|y\| = 1 \text{ und } f(y) = d$   $\forall x \in X \implies x = m + dy$   
 $\text{ker}(f)$   
 für  $d = f(x)$  haben wir  $f(x - dy) = f(x) - d f(y) = 0$  d.h.  $x - dy = m$   
 $x_j = m_j + d_j y \implies \|x_j\| = 1 \implies \|d_j\| \neq 0$   
 $-y = d_j^{-1}(m_j - x_j)$   
 $= \frac{m_j - x_j}{d_j}$   
 $\implies -y \notin \ker f$  d.h.  $\ker f$  nicht abgeschl.

vgl. 5.136 Conway

Rechtlich  
für Hypothese  $H = \text{wert}$  gilt:  
 $\|x_0 - H\|$  wird angenommen

kleinstes Folgen  
mit origin. Aussagen

5.136 Conway

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - (H + f)\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

duale Variationsprobleme

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$X$  Banachraum,  $A, B$  disjunkte, offene Umgebungen von  $x$   
 $\rightarrow A, B$  sind i. d. S. trennbar

Separationstheorem

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

$$\|x_0 - H\| \leq \|x_0 - H\| + \|f\|$$

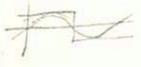
$\forall x_0 \in X \quad \|x_0 - M\|$  wird angenommen  
 $\sup |f(x)|$  wird angenommen  
 $M = \text{kerf}$

**Hyperfläche** Kriterium für Existenz des Minimum abstrakter

Infimum wird nicht immer angenommen

$x = C[0,1]$  max Norm  
 $f(x) = \int_0^1 \sin(x(t)) dt \quad \text{sel} = \sin(2\pi t)$

Beh  $f \neq 0$  wird nicht angenommen



$M \subseteq X$  UR  $M \neq X \quad \theta \in (0,1)$   
 $\exists x_0 \quad |x_0| = 1 \quad \|x_0 - M\| \geq \theta$

In einem  $\infty$ -dim Banachraum  
 Festsätze Folgen  $x_n$   $|x_n| = 1$   
 die keine konv. Teilfolgen enthalten  
Einheitskugel nicht kompakt

$\exists |x_n| = 1$   
 $x_n \cdot x_{j+1} \rightarrow 0$   
 konstruieren  $|x_j| = 1$  mit  $\|x_j - M_j\| \geq \frac{1}{2}$   
 $M_j = \langle x_1, \dots, x_{j-1} \rangle$   
 $|x_{j+1} - x_{j+1}| \geq \frac{1}{2}$

$X'$  separabel  
 $\rightarrow X$  separabel

$\exists \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X'$  dicht in  $X'$   
 wähle  $x_j$  dicht, das  $\|f_i(x_j)\| \geq \frac{1}{2} \|f_i\| > 0$   
 $|x_j| = 1$   
 $D := \{y = \sum r_j x_j \mid r_j \in \mathbb{Q}\}$   
 Beh  $\bar{D} = X$   
 falls  $\bar{D} \neq X \quad \exists z \in \bar{D} = M \quad 0 < \delta = \|z - M\| = \max \|f_i(z)\| = \|g(z)\|$   
 $\|z - M\| = \frac{\delta}{\|f_i\|}$   
 $\frac{1}{2} \|f_i\| \leq \|f_i(z)\| = \|f_i(x_j) - g(x_j)\| \leq \|f_i - g\|$   
 Teilfolge aus  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$   
 $\frac{1}{2} \|f_i\| \leq \|f_i - g\| \rightarrow 0$   
 $\|g\| \leq \frac{\|f_i - g\|}{\frac{1}{2}} + \|f_i\| \rightarrow 0$  d.h.  $\|g\| = 0 \quad \rightarrow M = X$

$X \leftrightarrow X''$   
 $j: x_0 \mapsto \mathcal{U}_{x_0}$   
 $\varphi_{x_0}(f) = f(x_0)$   
 ist Isometrie

$\rightarrow$  Anwendung Hahn-Banach  
 falls surjektiv: haben Reflexivität  
 sonst nicht

Achtung!  $X \cong X^{**}$  ist nicht gleichbedeutend mit  $X$  reflexiv!  
 Bsp. von James  
 Die Einbettung  $i: X \hookrightarrow X^{**}$   
 $x_0 \mapsto \mathcal{U}_{x_0}$   
 muss surjektiv werden

$\Gamma \rightarrow \|x_0 - M\| = \delta = \|x_0 - m_0\|$  wird angenommen für  $m_0 \in M$   
 $|f(x_0)| = \|f\|$  wird angen. mit  $x_1 = \frac{x_0 - m_0}{\|x_0 - m_0\|}$

$|x_1 - m| = \left| \frac{x_0 - m_0}{\delta} - m \right| = \delta^{-1} \left| x_0 - m_0 - \delta m \right| \geq 1$

also  
 $1 - |x_1| \leq |x_1 - m|$

$x = \alpha x_1$  in  $\alpha \in \mathbb{R}$   $m \in M$   
 $|f(x)| = |\alpha| |f(x_1)| \leq |\alpha| \cdot |f(x_1)|$  d.h.  $|f(x_1)| \geq \frac{|f(x)|}{|\alpha|}$

da  $|x_1| = |\alpha| |x_1 + \alpha^{-1} m| \geq |\alpha|$

$\leq$   $|x_1| = 1 \quad |f(x_1)| = \|f\|$

$x_0 = \alpha x_1 + m_0$

zu zeigen  $|x_0 - m_0| = \|x_0 - M\| = \delta_0$

d.h.  $\forall m \in M \quad |x_0 - m_0| \leq |x_0 - m|$

nahen das, wenn  $|x_1 - m| \geq 1 \quad \forall m$   
 (weil  $|x_1 - m| = \left| \frac{x_0 - m_0}{\delta_0} - m \right| = \frac{1}{\delta_0} |x_0 - m_0 - \delta_0 m| \geq 1$

genau dann, wenn  $|x_0 - m_0 - \delta_0 m| \geq \delta_0$

und das ist der Fall wenn

$|x_0| \geq |\delta_0|$  weil  $|x_0| = |\delta_0| |x_1 + \alpha^{-1} m| \geq |\delta_0|$

aber  $|f(x_0)| \leq \|f\| \cdot |x_0|$

$|\delta_0| |f(x_0)| \leq |\delta_0| \|f\| |x_0|$  d.h.  $|x_0| \geq |\delta_0|$

$\Gamma$  wähle  $x_0 \notin M \quad \|x_0 - M\| = \delta > 0$   
 wähle  $m_0 \in M$   
 $x_1 := \frac{x_0 - m_0}{\|x_0 - m_0\|} \quad |x_1 - m| = \left| \frac{x_0 - m_0}{\|x_0 - m_0\|} - m \right| = \frac{1}{\|x_0 - m_0\|} \|x_0 - m_0 - (x_0 - m_0)m\|$   
 $\geq \frac{1}{\|x_0 - m_0\|} \cdot \delta \geq \frac{\delta}{\delta} = 1$

Repräsentations-  
Satz von Lebesgue

Allg.

$X$  lokal kompakt  
 $\mu \in M(X)$   $M(X)$  Raum d. regulären Borelmaße mit Totalvariation norm  
 $F_\mu: C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$   $F_\mu(f) = \int f d\mu$   $F_\mu \in C_0(X)^*$   
 $\mu \rightarrow F_\mu$  ist isom. Isomorphismus von  $M(X)$  auf  $C_0(X)^*$

ges.  $x = [a, b]$

$BV([a, b]) = \{x = \lambda(t) \mid \text{var}(\lambda) = \sup_{\mathcal{P}(a,b)} \sum_{i=1}^m |x(t_i) - x(t_{i-1})| < \infty\}$   $\|x\| = |x(a)| + \text{var}(\lambda)$

$\int_a^b x(t) d\lambda(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m x(t_{i-1}) (d(t_i) - d(t_{i-1})) = \int_a^b x(t) d\lambda(t)$   $x \in C[a, b]$   $d \in BV[a, b]$

$1. \dots \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t)| \cdot \text{var}(\lambda) < \infty$

Satz von  
Lebesgue

$\forall f \in C[a, b]^* \exists d \in BV[a, b]$  eindeutig, falls  $d(t_{i+1}) - d(t_i) \geq 0$

$\chi_S(t) := \begin{cases} 1 & \text{d. t.} \in S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$f \in C[a, b]^*$  gegeben  
 $\tilde{f}$  Fortsetzung auf den Raum d. beschr. Funktionen auf  $[a, b]$



$d(S) := \tilde{f}(\chi_S(t))$   
 $d(a) = 0$

$\sum_{i=1}^n |d(t_i) - d(t_{i-1})| = |d(t_1) - 0| + \sum_{i=2}^n |d(t_i) - d(t_{i-1})|$   
 $= |\tilde{f}(\chi_{[a, t_1])}| + \sum_{i=2}^n |\tilde{f}(\chi_{[t_{i-1}, t_i]})|$   
 $= \sum_{j=1}^n \tilde{f}(\chi_{[t_{j-1}, t_j]}) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}(\chi_{[t_{j-1}, t_j]}) \varepsilon_j$   $\varepsilon_j = t_j - t_{j-1}$

$z_n := \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \chi_{[t_{j-1}, t_j]}$   $\|\tilde{f}(z_n)\| < \|f\| \cdot 1$

$\|z_n\| = 1$  in sup-norm

d.h.  $\text{var}(d) \leq \|f\| < \infty$  also  $d \in BV[a, b]$

$y_n(t) := x(t_0) \chi_{[a, t_1]} + \sum_{j=2}^n x(t_{j-1}) (\chi_{[t_{j-1}, t_j]} - \chi_{[t_{j-2}, t_{j-1}]})$

$\tilde{f}(y_n) = \sum x(t_{j-1}) (d(t_j) - d(t_{j-1})) \rightarrow \int_a^b x(t) d\lambda(t)$

d.h. Satz ist für Treppenfunktionen gültig

weil  $\tilde{f}(y_n) \rightarrow \tilde{f}(x)$

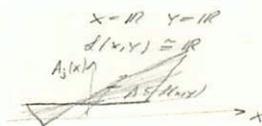
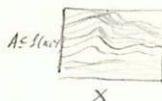
$|\tilde{f}(y_n) - \tilde{f}(x)| \leq \frac{\|f\|}{\|f\|} \cdot \sup |y_n(t) - x(t)| \leq \|f\| \cdot \varepsilon$

da Treppenfunkt. dicht in  $C[a, b]$

Satz von  
Banach  
Steinhaus

Prinzip d.  
gleichm.  
Beschränk-  
theit

$X, Y$  Banachräume  
 $A_j \in \mathcal{L}(X, Y)$   
 $\|A_j x\| \leq M(x) \forall j \Leftrightarrow \sup \|A_j\| = M(x) < \infty$



$\Leftarrow$  trivial  
 $\Rightarrow \|A_j\| \rightarrow \infty$

haben  $x_n \in X$ , so dass  $\|A_j x_n\| \rightarrow \infty$   $\|x_n\| = 1$   
 $\|A_j x_n\| > 4^j$

$y_n = 2^{-n} x_n$   $\|A_n y_n\| > 2^n$

Beh.  $\exists (y_n)$  Teilfolge, so dass a)  $\|A_{n+k} y_{n+k}\| > 1+k + \sum_{j=1}^k M(y_{n+j})$

b)  $\|y_{n+k}\| < \frac{2^{-k-1}}{\sup \|A_{n+j}\| \text{ f. } 1 \leq j \leq k}$

$\sum y_{n_j} = y$  definiert da  $\sum \|y_{n_j}\| < \infty$

$\|A_{n+k} y\| = \left\| \sum_{j=1}^k A_{n+k} y_{n+j} + A_{n+k} y_{n+k} + \sum_{j=n+1}^{\infty} A_{n+k} y_j \right\|$   
 $\geq \|A_{n+k} y_{n+k}\| - \left\| \sum_{j=1}^k A_{n+k} y_{n+j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} A_{n+k} y_j \right\|$   
 $\geq 1+k + \sum_{j=1}^k M(y_{n+j}) - \left( \sum_{j=1}^k M(y_{n+j}) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \|A_{n+k}\| \|y_{n_j}\| \right)$   
 $\geq 1+k - \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j-1} \geq k \quad \square$

Corollar

$A \in X$   $X$  norm. Raum  
 $A$  beschränkt  $\Leftrightarrow \forall f \in X^* \sup_{a \in A} |f(a)| < \infty$

$\Gamma \mathcal{L}(X^*, F) = X^{**}$   
 $\|x\| = \|x\|$

$\forall f \in X^* \hat{\sigma}(f) \in M(C)$   
 $\|a\| \leq C \forall a$   
 $\downarrow$   
 $\|a\| \leq C$

Corollar

$A \in X^*$   $A$  beschränkt  $\Leftrightarrow \forall x \in X \sup_{f \in A} |f(x)| < \infty$

$f_c(x) \in M(X)$   
 $\rightarrow \|f_c\| \leq C$   $\square$

der eigentliche Banach Steinhilf

$A_n$  Folge in  $B(X, Y)$  mit  $A_n x \rightarrow y \quad \forall x \in Y$   
 $\Leftrightarrow \exists A$  in  $B(X, Y)$  mit  $A_n x \rightarrow Ax \quad \forall x \quad \sup \|A_n\| < \infty$

(4)

$\Gamma Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$  existiert und ist linear

$A_n$  beschränkt (PUB)

$\exists M \quad \|A_n\| \leq M$

$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \|x\| \leq M \|x\|$

Schwache Topologie

$x_j \rightarrow x \Leftrightarrow f(x_j) \rightarrow f(x)$   
 $f \in D$  mit  $\overline{LD} = X$   
 mit dichte lineare Hülle

$\Gamma \Rightarrow$  trivial

$\Leftarrow$  s.o.  $f \in X'$

$\exists g \in D \quad f \cdot g \neq 0$

$|f(x_j) - f(x)| \leq |f(x_j) - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \leq 3\epsilon$

Bsp in  $\ell^p$   $1 \leq p < \infty$   
 gilt  $e_n \rightarrow 0$  d.h.  $e_n \rightarrow 0$

in  $\ell^1$  gilt  $x_j \rightarrow x \Leftrightarrow x_j \rightarrow x$

$x_j \rightarrow x \Rightarrow \|x\| \leq \liminf_j \|x_j\|$

$\Gamma \|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| = \|g(x)\| \quad \|g\| = 1$   
 $= \lim_{j \rightarrow \infty} |g(x_j)| \quad |g(x_j)| \leq \|x_j\|$

$\Gamma f(x_j) \rightarrow f(x) \quad \forall f$

müssen zeigen  $x_j \rightarrow x \quad \exists x$  d.h.

$f(x_j) \rightarrow f(x) \quad \forall f \quad \exists x$

$\|x\| \leq \liminf_j \|x_j\| \leq \|f\| \cdot M$

$\{f(x_n)\} \in C(\mathbb{N}) \cap \mathbb{R}$   
 PUB  $\|x_n\| \leq M$

d.h.  $x \in X$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall f \quad |f(x) - f(x_j)| < \delta$

$X$  reflexiv  $\Rightarrow X$  vollständig bes.

ist der eigentliche Banach Steinhilf:  $Y = \mathbb{R}$

$C[0,1]$  nicht schwach  $\rightarrow$  vollständig

$f_n = (1-nt)^n \quad t \in [0,1]$

$n \in \mathbb{N}, t \in [0,1] \rightarrow \mu \in [0,1]$  Bsp. Lebesgue  
 also in norm. nicht schwach gegen stetige Funktionen

Satz von Alaoglu

$X$  reflexiv,  $(X^*)$  separabel  
 Einheitskugel in  $X^*$  ist schwach\* kompakt

vgl. Conway S. 135

folgt direkt aus Alaoglu:

$X$  reflexiv  $\Rightarrow X = X^{**} \Rightarrow$  Einheitskugel in  $X^*$  ist schwach\* kompakt  $\Rightarrow$  Einheitskugel in  $X$  ist schwach kompakt

$\Rightarrow X$  vollständig bes.  $\rightarrow$

(starke Version)

Schwache Version

zeigen: jede beschränkte Folge hat schwach\* bes. Teilfolge

$\|x_j\| \leq M$

$f_1, \dots, f_n, \dots$  dicht in  $X'$

$f_1(x_j'), f_1(x_j''), \dots, f_1(x_j')$   
 $f_2(x_j'), f_2(x_j''), \dots, f_2(x_j')$

S starke Version

$D_n := \{k/n \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad D := \prod D_n \quad x \in \text{ball}(X) \quad \text{kompakt}$

$\tau: \text{ball } X^* \rightarrow D$   
 $\tau(f)(x) = f(x)$

zeigen:  $\tau$  ist Homöomorphismus

- injektiv:  $\tau(f_1) = \tau(f_2) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \Rightarrow f_1 = f_2$
- Stetigkeit:  $f_j \in \text{Nef in } X^* \quad f_j \rightarrow f \Rightarrow f_j(x) \rightarrow f(x) \quad \text{d.h. } f_j \rightarrow f \Rightarrow \tau \text{ stetig}$
- surjektiv:  $s \in D$  definieren  $f \in X^* \quad f(x) = s_x$
- abgeschlossen:  $f_j \in \text{Nef in ball } X^* \quad d \in D \quad \tau(f_j) \rightarrow d$  zeigen  $\exists f \quad f_j \rightarrow f$   
 definieren  $f(x) = \alpha \cdot f(x)$   $f(x) = \lim f_j(x)$  in ball  $X$   
 ist eindeutig:  $f(x) = \alpha \cdot f(x) = \lim \alpha \cdot f_j(x) = \lim \beta \cdot f_j(x) = \lim \beta \cdot f_j(x) = \lim \beta \cdot f_j(x)$   
 $f$  ist lin. Funktional

Satz von James

$X$  reflexiv  $\Leftrightarrow \forall M \in X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in M \quad \|x_0 - M\| = (1-\epsilon) \|M\|$

ohne Beweis

Schwarz Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\|x+Ay\|^2 = \langle x+Ay, x+Ay \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle \|A\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \cdot A \geq 0$$

A hat höchstens eine reelle Lösung

d.h.  $4\|x\|^2\|y\|^2 \geq 4 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle^2$   
 $\|x\|^2\|y\|^2 \geq \operatorname{Re} \langle e^{i\theta} x, y \rangle^2 \rightarrow \text{Beh}$

oder sehen  
 $A = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$   
 $0 \leq \|x\|^2 + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} - 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \|x\|$   
 $0 \leq \|x\|^2\|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \|x\| + \langle x, y \rangle^2$

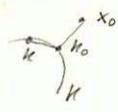
□ Gesetz

$$f, g \in \mathcal{H} \Rightarrow \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Hahn Banach im Hilbertraum

$K$  konvex, abgeschl. in Hilbertraum  
 $x_0 \notin K \Rightarrow \exists ! k_0 \in K$   
 $\|x_0 - k_0\| = \|x_0 - k\|$  und zusätzlich gilt  $\forall k \in K$   
 $\operatorname{Re} \langle x_0 - k_0, k - k_0 \rangle \leq 0$

Γ zusatz.  $k, k_0 \in K$   
 $x = (1-t)k_0 + tk \in K$



$$\|x_0 - x\|^2 \geq \|x_0 - k_0\|^2$$

$$\|x_0 - k_0 - t(k - k_0)\|^2 \geq \|x_0 - k_0\|^2$$

$$\|x_0 - k_0\|^2 - 2t \operatorname{Re} \langle x_0 - k_0, k - k_0 \rangle + t^2 \|k - k_0\|^2 \geq \|x_0 - k_0\|^2$$

$$-2 \operatorname{Re} \langle x_0 - k_0, k - k_0 \rangle \geq -t \|k - k_0\|^2$$

$$t \rightarrow 0 \rightarrow \text{Zusatz } \perp$$

Γ o.E.d.A  $0 = x_0$

$$d = \operatorname{dist}(0, K) \exists ! k_n \|k_n\| \rightarrow d$$

Punktfolge:  $\|\frac{k_n - k_m}{2}\|^2 = \frac{1}{2} (\|k_n\|^2 + \|k_m\|^2) - \frac{1}{2} \|k_n + k_m\|^2$

$$\|\frac{k_n + k_m}{2}\|^2 \geq d^2 \text{ (wegen Konvexität)}$$

wähle für  $\epsilon > 0$   $N$  so dass  $\forall n > N$   
 $\|k_n\|^2 < d^2 + \frac{\epsilon^2}{4}$  nehmen dann

$$\|\frac{k_n - k_m}{2}\|^2 \leq \frac{1}{2} (d^2 + \frac{\epsilon^2}{4}) - d^2 = -\frac{\epsilon^2}{4}$$

also  $\|k_n - k_m\| < \epsilon$   $\forall n, m > N$  CF  $k_n$

$$\cdot \delta \leq \|k_n\| - \|k_0 - k_n + k_n\| \leq \frac{\|k_0 - k_n\|}{2} + \|k_n\|$$

$$\cdot k_0 \text{ eindeutig: } k_0 \in K \quad \|k_0\| = d$$

$$\frac{1}{2} (k_0 + k_0) \in K$$

$$d \in \frac{1}{2} (\|k_0 + k_0\|) \leq \frac{1}{2} (\|k_0\| + \|k_0\|) = d$$

also mit □ Gesetz

$$d^2 = \|\frac{k_0 + k_0}{2}\|^2 = d^2 - \|\frac{k_0 - k_0}{2}\|^2 \rightarrow k_0 = k_0$$

Corollar

$$|P_H x_1 - P_H x_2| \leq \|x_1 - x_2\|$$

$P_H$  Projekt. auf  $K$   
 $P_H x_1 = k_1, P_H x_2 = k_2$

Γ  $\operatorname{Re} \langle k_1 - k_2, x_1 - k_1 \rangle \leq 0 \rightarrow \operatorname{Re} \langle k_1 - k_2, x_1 - k_2 \rangle \leq 0$   
 $\operatorname{Re} \langle k_1 - k_2, x_2 - k_2 \rangle \leq 0 \rightarrow \operatorname{Re} \langle k_1 - k_2, x_2 - k_1 \rangle \leq 0$

$$\operatorname{Re} \langle k_1 - k_2, x_2 - k_2 - (x_1 - k_1) \rangle \leq 0$$

$$\operatorname{Re} \langle k_1 - k_2 \rangle^2 - \langle k_1 - k_2, x_1 - x_2 \rangle \leq 0$$

$$\|k_1 - k_2\|^2 \leq \operatorname{Re} \langle k_1 - k_2, x_1 - x_2 \rangle \leq \|k_1 - k_2\| \|x_1 - x_2\|$$

Corollar

$H$  Unterraum  $x_0 \notin H$   $x_0 \notin H$   
 $\exists ! m_0 \in H \quad \|x_0 - m_0\| = \|x_0 - m\|$   
 $\langle x_0 - m_0, m \rangle = 0$

Γ  $\operatorname{Re} \langle m - m_0, x_0 - m_0 \rangle \leq 0$   
 $\operatorname{Re} \langle -m + m_0, x_0 - m_0 \rangle \leq 0$  Unterraum  
 $-m + m_0 = -(m - m_0) \in H$   
 $\operatorname{Re} \langle -m + m_0, x_0 - m_0 \rangle = 0$

$$\operatorname{Re} \langle m - m_0, x_0 - m_0 \rangle \leq 0$$

$$\operatorname{Re} \langle -m - m_0, x_0 - m_0 \rangle \leq 0$$

$$\operatorname{Re} \langle -2m_0, x_0 - m_0 \rangle \leq 0$$

$$\operatorname{Re} \langle -m_0, x_0 - m_0 \rangle \leq 0$$

$$\operatorname{Re} \langle -m_0, x_0 - m_0 \rangle \geq 0$$

Corollar

$H$  UR  $x_0 \in H^\perp$   
 $\exists ! m_0 \in H$   
 $x_0 = m_0 + n_0 \quad n_0 \perp H$   
 $\|x_0\|^2 = \|m_0\|^2 + \|n_0\|^2$   
 $H = H \oplus H^\perp$

$P_H$  Proj.  
 $H^\perp := \ker P_H$   
 $\operatorname{Beh} H^{\perp\perp} = H$

Γ  $m \in H \Rightarrow m \in \ker P_H^\perp$   
 $I - P_H$  orthog. Proj. auf  $H^\perp$   
 $(I - P_H)^\perp = \ker(I - P_H) = \operatorname{ran} P_H = H$

Riesz'sche Darstellung

$f \in H' \Rightarrow f(x) = \langle x, y \rangle$  eindeutig

Γ Exist.:  $f \neq 0 \quad \ker f = H^\perp$   
 $Z \perp H \quad f(z) = 1$  o.B.d.A  
 $x = m + \lambda z$   
 $f(x) = \lambda$   
 $\langle x, z \rangle = \langle m, z \rangle + \lambda \|z\|^2 = \lambda = \frac{\langle x, z \rangle}{\|z\|^2}$   
 $\Rightarrow f(x) = \frac{\langle x, z \rangle}{\|z\|^2} = \langle x, \frac{z}{\|z\|^2} \rangle$

Eindeut

$$\langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x, y - y' \rangle = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \|y - y'\|^2 = 0 \Rightarrow y = y'$$

Cor

$H$  ist reflexiv

Γ  $j: H \rightarrow H'$   
 $y \mapsto \langle x, y \rangle = f(x) \quad \text{bij.}$   
 $\|j(y)\| = \|f\| = \|y\|$  da

$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$   
 $\|f(x)\| \leq \|x\| \quad \|y\| \leq \|y\|$   
 $f(y) = \|y\|$  für  $x = \frac{y}{\|y\|}$

Gram-Schmidt

$x_1, \dots, x_n \in H$  lin. unabh.  
 $\rightarrow \exists ! y_1, \dots, y_n \langle y_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$   
 $x_1 = y_1$   
 $x_2 = y_2 + \alpha_2 y_1$

Basis: maximal orthonormale Menge  
 Hamelbasis: maximal linear unabh. Menge  
 Hamelbasis ist nie eine Basis

$\{e_n\}$  orthonom. Menge in  $X$   
 $H = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \subset P$  Proj. von  $X$  auf  $H$   
 $P_h = \sum_{k=1}^n \langle h, e_k \rangle e_k \quad \forall h \in X$

$\Gamma \quad Oh := \sum_{k=1}^n \langle h, e_k \rangle e_k$   
 $\langle Oh, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle h, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle h, e_j \rangle$  also  $\langle h - Oh, e_j \rangle = 0$   
 an  $h - Oh \perp H \Rightarrow Oh$  ist einzige Dekomposition  $h - Oh \perp H \Rightarrow Oh = P_h$

$\{e_n\}$  orthonom. Menge in  $X$   
 $\sum_{k=1}^n |\langle h, e_k \rangle|^2 \leq \|h\|^2$

$\Gamma \quad h_n := h - \sum_{k=1}^n |\langle h, e_k \rangle| e_k$   
 $\|h\|^2 = \|h_n\|^2 + \|\sum_{k=1}^n \langle h, e_k \rangle e_k\|^2$   
 $= \|h_n\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle h, e_k \rangle|^2 \geq \sum_{k=1}^n |\langle h, e_k \rangle|^2$

$\varepsilon$  orthon. Menge in  $X$   $h \in X$   
 $\Rightarrow \langle h, e \rangle \neq 0$  für maxim. abz. viele  $e \in \varepsilon$ .

$\Gamma \quad \varepsilon_n := \{e \in \varepsilon \mid \langle h, e \rangle \geq \frac{1}{n}\}$   $\varepsilon_n$  endlich  
 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n = \{e \mid \langle h, e \rangle > 0\}$  abzählbar

$\varepsilon$  orthon. Menge in  $X$   $h \in X$   
 $\sum_{e \in \varepsilon} |\langle h, e \rangle|^2 \leq \|h\|^2$

$\Gamma$  folgt direkt aus obig. Beh. wobei gemeint ist  $\sum_{i \in I} h_i$  konverg. falls  $h_i \perp h_{j \neq i}$   $h_I = \sum_{i \in I} h_i$  Fendl. Teilmenge von  $I$   $F \subseteq I$  Folge

$\varepsilon$  orthon. Menge in  $X$   $h \in X$   
 $\sum_{e \in \varepsilon} \{ \langle h, e \rangle \}$  konvergiert

$\Gamma \quad \varepsilon_0 := \{e \mid \langle h, e \rangle > 0\} = \{e_1, e_2, \dots\}$   
 $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, e_k \rangle|^2 \leq \|h\|^2 < \infty \quad \varepsilon_0 \neq \emptyset \exists N \sum_{k=1}^N |\langle h, e_k \rangle|^2 < \varepsilon^2$   
 $\|h_F - h_0\| \leq \sqrt{\sum_{k=N}^{\infty} |\langle h, e_k \rangle|^2} < \varepsilon$  falls  $F, G \supseteq \{1, \dots, n\}$   
 $\{h_F\}$  Cauchyfolge

$\varepsilon$  orthon. Menge  $h \in X$   $h$   $h$   $h$   $h$   
 (a)  $\varepsilon$  basis für  $X$   
 (b)  $h \in X \quad h = \sum_{e \in \varepsilon} \langle h, e \rangle e$   
 (c)  $\forall e \in \varepsilon \quad \langle h, e \rangle = \sum_{e' \in \varepsilon} \langle h, e' \rangle \langle e', e \rangle$   
 (d)  $\langle g, h \rangle = \sum_{e \in \varepsilon} \langle g, e \rangle \langle e, h \rangle$   
 (e)  $\|h\|^2 = \sum_{e \in \varepsilon} |\langle h, e \rangle|^2$  Parseval

Zwei Basen haben gleiche Kardinalität

$\Gamma \quad \varepsilon = \{e\} \quad \varepsilon = \eta$  falls  $\varepsilon, \eta$  endlich  
 $\eta = \{f\} \quad \forall e \in \varepsilon \text{ auf } \eta \exists e' \in \eta \mid \langle e, e' \rangle \neq 0$  endlich  
 $F = \bigcup_{e \in \varepsilon} \{e, e'\} \Rightarrow \eta \subseteq \varepsilon \quad \varepsilon \subseteq \eta$

$X$  separabel  $\Leftrightarrow \dim X = \aleph_0$

$X, Y$  Hilbertraume sind isomorph  $\Leftrightarrow \dim X = \dim Y$

$\Gamma \quad U$  isom.  $\varepsilon$  Basis in  $X \rightarrow U \varepsilon$  Basis in  $Y$   
 $\varepsilon$  Basis für  $X$  Betrachte  $\ell^2(\varepsilon)$  Parseval  
 $\tilde{h}: \varepsilon \rightarrow \ell^2(\varepsilon) \quad \tilde{h}(e) = \langle h, e \rangle e \quad \|\tilde{h}\| = \|h\|$   
 $U: X \rightarrow \ell^2(\varepsilon) \quad U h = \tilde{h}$   $\text{ran } U$  dicht in  $\ell^2(\varepsilon)$   
 $U$  Isometrie  $\Rightarrow \text{ran } U = \ell^2(\varepsilon) \quad U$  Isomorphismus

alle separablen Hilbertraume sind isomorph  $\ell^2$

Bsp  $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$  in  $\ell^2(\mathbb{N})$   $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$  ist immer noch "Basis"

Basis Banachraum  $\{x_i\}_{i \in I}$  dual in Basis Hilbertraum

Isometrie zwischen met. Raum  $X \rightarrow Y$   
 Isomorphie unit. Abb. surj. Isometrie  $X \rightarrow Y$   
 surj. Isometrie  $Y \rightarrow X$

$f \in L^p(-1, \infty) \Rightarrow f \in L^p[0, 2\pi]$  hat konverg. Four. entw. die nichtf. Null. f.ü  
 $f \in L^1 \nexists f$  ohne konverg. Four. entw. (Kolmogoroff)

Four. kof. ist Isomorphie  $L^2[0, 2\pi] \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$

$L^p(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid (\int |f|^p d\mu)^{1/p} < \infty\}$

Bsp f. Banach Hilbertraum

$\ell^p = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$   $1 \leq p < \infty$   
 $0 < p < 1$   
 $n$  unendl.  $\ell^p = \ell^p$   
 $n$  endl.  $\ell^p = \mathbb{C}^n$   
 $\ell^p$  Banachraum  
 $\ell^2$  Hilbertraum

$G$  offen  $\subseteq \mathbb{C}$   
 $L^2(G) = \{f: G \rightarrow \mathbb{C} \text{ analyt.} \mid \int_G |f|^2 dz < \infty\}$   
 Bergmann Raum

$C^{m,n}[a,b] = \{f: \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \text{ stetig } |k| = \sum k_i = m\}$   
 $\|f\| = (\int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}|^p dx_1 \dots dx_{n-1})^{1/p}$

Raum d. fastperiod. Funktionen  
 $L = \langle e^{i\lambda t} \rangle_{\lambda \in \mathbb{R}}$   
 $\|h\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|h(t)\|$   
 $\|h\|_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|h(t)\|^2 dt$   
 $(= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |c_{\lambda}|^2 dt)$   
 $f = \sum c_{\lambda} e^{i\lambda t}$   
 $F$  Abschluss von  $L$  bez  $\|\cdot\|_0$   
 $F^*$  " " " "  $\|\cdot\|_0$   
 $F^* =$  Borel fast period. Fkt  
 $F =$  Besicovitch Fkt

$C_{loc}^{m,n}[a,b] = C^{m,n}[a,b]$   
 $C_{loc}^{m,n}$  Präparachraum  $C_{loc}^{m,n}$  Prähilbertraum  
 $\omega^{m,n,p}[a,b] =$  Verallg. von  $L^p$   
 $\omega^{0,p}[a,b] = L^p[a,b]$

direkte Summe von Hilbertraume

$X, Y$  Hilbertraume  
 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = \{h \oplus h' \mid \langle h_1 \oplus h_2, h_1 \oplus h_2 \rangle = \langle h_1, h_1 \rangle + \langle h_2, h_2 \rangle$

Sub von Lax Milgrami

$B$  beschr. Bilinearform  $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow \exists! A: X \rightarrow X$   
 $B(x,y) = \langle Ax, y \rangle \quad A \in \mathcal{L}(H)$

$\Gamma$  folgt aus Riesz Darstellung  
 $B(x,y) = \langle y, z_x \rangle = \langle z_x, y \rangle$   
 $x \rightarrow z_x$  ist linear  
 $\|Ax\|^2 = B(x, Ax) \in M.H. / Ax\|$   
 $\|Ax\| \leq M \cdot \|x\| \quad RA \parallel SM \quad \_$

$B$  Bilinearform  
 $\|B\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |B(x,y)|$

Operatoren

Lax Milgrami

$B$  beschr. Bilinearform  
 $\text{Re } B(x,x) \geq \delta \|x\|^2 \quad \delta > 0$   
 $\Rightarrow$  dazskll. Operator ist invertierbar  $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta}$

$A: H \rightarrow W(A)$  ist stetig

$\bullet A$  ist injektiv:  $\langle z, y \rangle = \langle Ax, y \rangle$   
 $\langle z, x \rangle = \langle Ax, x \rangle$   
 $\Rightarrow \text{Re } \langle z, x \rangle \geq \delta \|x\|^2$   
 $\|z\| \cdot \|x\| \geq \text{Re } \langle z, x \rangle \geq \delta \|x\|^2$

$\frac{\delta}{\|z\|} \|z\| \geq \|x\| \Rightarrow$  Injektivität, da  $\frac{\delta}{\|z\|} \|z\| \geq \|x\|$

$\bullet W(A)$  ist abgeschlossen:  $z_j \in W(A) \quad z_j \rightarrow z \quad z_j = Ax_j$   
 $\|x_j - x_k\| \leq \frac{1}{\delta} \|z_j - z_k\|$  also  $x_j \rightarrow x^* \Rightarrow Ax_j \rightarrow Ax^* = z$

$\bullet W(A) = H$ :  $W(A) \in H$   
 $\Rightarrow \exists w \perp W(A) \quad \langle Ax, w \rangle = 0 \quad \forall x \in H$   
 $\delta \|w\|^2 \leq \langle Aw, w \rangle = 0 \Rightarrow w = 0$   
 $\Rightarrow W(A)$  dicht in  $H$  abgeschl.  $\Rightarrow W(A) = H \quad \_$

COF

$A \in \mathcal{L}(H) \quad (Ax, y) = (x, A^*y)$   
Adj. Operator  $A^* \exists!$  dann  $B(x,y) = (Ax, y) = (x, A^*y)$   
 $\|A^*\| = \|A\|$

Operatoren auf Banachräumen

$A \in \mathcal{L}(X, Y)$   
 $A^* \in \mathcal{L}(Y', X')$   
 $f \in Y'$   
 $A^*(f)(x) = f(Ax)$   
es gilt  $\|A^*\| = \|A\|$

$\Gamma \|A^*\| = \sup_{\|f\|=1} |A^*(f)| = \sup_{\|f\|=1} \sup_{\|x\|=1} |f(Ax)| = \frac{\|f\| \cdot \|Ax\|}{\|f\| \|Ax\|} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

bestimme  $f_0$  so, dass  $f_0(Ax_0) = \|Ax_0\|$  Hahn Banach  
 $\|f_0\| = 1$   
 $\|A^* f_0\| \geq A^* f_0(x_0) = \|f_0(Ax_0)\| = \|Ax_0\|$   
 $\|A^*\| \geq \|Ax_0\|$   
 $\|A^*\| \geq \sup \|Ax_0\| = \|A\| \quad \_$

$A, B \in \mathcal{L}(A)$   $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$   
 $\|A^n\| \leq \|A\|^n$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = r(A)$  existiert!

$A_i \rightarrow A \iff \|A_n - A\| \rightarrow 0$  glm.  
 $A_i \rightarrow A \iff \|A_n x - A x\| \rightarrow 0 \quad \forall x$  stark  
 $A_i \rightarrow A \iff \|f(A_n x) - f(A x)\| \rightarrow 0 \quad \forall x \in X$

auf Hilbertraum:  
 $\rightarrow$  normierte topol. Vektorraum  
 $\rightarrow$  SOT Topologie  
 $\rightarrow$  WOT Topologie

$\text{Bsp } X = L^2(\mathbb{R}) \quad T_n(t) = f(t-h)$   
 $\|T_n\|_{L^2} = \|I\|_{L^2}$  Isometrie  $\|T_n\| = 1$   
 $T_n \rightarrow I$  stark  
erke  $T_n \not\rightarrow I$

$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j = \text{glm. linear}$

$\Gamma \|e^{A_n} - e^A\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|A_n^j - A^j\|}{j!}$

$(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j \iff r(A) < 1$

folgt aus nächstem Satz:  $\|A^j\|^{1/j} \leq \rho \iff \|A\| \leq \rho$

$A \in \mathcal{L}(A) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = r(A)$  existiert  
 $r(A) \leq \|A^n\|^{1/n}$

$\Gamma \|A^{i+j}\| \leq \|A^i\| \cdot \|A^j\|$   
 $p(n) := \log \|A^n\|$   
 $p(i+j) \leq p(i) + p(j)$   
Furieri  $m = n_j + r \quad p(m) \leq n \cdot p(j) + p(r)$   
 $\frac{p(m)}{m} \leq \frac{n \cdot p(j) + p(r)}{n_j + r} \rightarrow \frac{p(j)}{j} \quad n \rightarrow \infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(m)}{m} \leq \frac{p(j)}{j} \quad \forall j$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(m)}{m} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p(j)}{j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(m)}{m}$   
 $\frac{p(m)}{m} = \frac{\log \|A^m\|}{m} = \log \|A^m\|^{1/m} \quad \_$

Stützung Operatoren

$K_n(t) \in L^1(\mathbb{R})$   
1)  $\int_{-\infty}^{\infty} |K_n(t)| dt \leq c \quad \forall n \geq 1$   
2)  $\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t) dt = 1$   
3)  $\int_{|t| > \delta} |K_n(t)| dt \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$

$\Gamma \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - K_n * f)(t) dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(s) (f(t) - f(t-s)) ds dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K_n(s)| |f(t) - f(t-s)| ds dt$

$I \leq \int_{-\infty}^{\infty} c \sup_{|s| \leq \delta} |f(t) - f(t-s)| dt \rightarrow 0 \quad \delta \rightarrow 0$

$J \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|s| > \delta} |K_n(s)| |f(t) - f(t-s)| ds dt \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$   
 $\rightarrow 0 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds$

Ans  
 $g \in C^1_{comp}(\mathbb{R}) \quad f \in L^p(\mathbb{R})$   
 $g * f = \int_a^x g(t) f(x-t) dt = \int g(t-s) f(s) ds \in C^1$

$\Gamma$  bzw für  $r=1$  p. 1  
 $|g(t+h) - g(t) - h g'(t)| \leq h \cdot \eta(h) \quad \eta(h) \rightarrow 0 \text{ gim } h \rightarrow 0$   
 $|g * f(t+h) - (g * f)(t) - h \cdot (g * f)'(t)| \leq \int |g(t+h-s) - g(t-s) - h \cdot g'(t-s)| |f(s)| ds dt$   
 $\leq h \cdot \eta(h) \cdot \|f\|_1 \rightarrow 0 \text{ gim } h \rightarrow 0$   
 $\text{d.h. } \frac{d}{dt} g * f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g * f(t+h) - (g * f)(t)}{h} = (g * f)'$   
 $g * f \in C^1 \quad \_$

cor  
 $C^\infty_{comp}(\mathbb{R})$  ist dicht in  $L^p(\mathbb{R})$

$\Gamma f_n = k_n * f \quad k_n \in C^1_{comp} \quad k_n \text{ kompakt } \subseteq \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \exists n_0 \quad x \in k_{n_0}$   
 $\cup k_n = \mathbb{R}$

Ans  
 $f \in L^p(\mathbb{R})$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f(x+h) - f(x)|^p dx \rightarrow 0 \quad |h| \rightarrow 0$   
 $\Rightarrow f = 0 \text{ f.ä.}$

$\Gamma f_n = k_n * f$   
 $\frac{1}{n^p} \int |f_n(x+h) - f_n(x)|^p dx \leq \frac{1}{n^p} \|k_n\|^p \int |f(x+h) - f(x)|^p dx$   
 $\int |f_n|^p dx = 0 \quad p=1$   
 $f_n' = 0 \quad f = 0 \quad f \in L^p(\mathbb{R})$   
 $f = 0 \quad f = 0$

Anwend. auf Fourierreihen

$S_N = \sum_{j=-N}^N a_j e^{ijx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x-y) f(y) dy$  mit  $D_N(x) = \sum_{j=-N}^N e^{ijx} = \frac{\sin \frac{N+1/2} x}{\sin \frac{1}{2} x}$  Dirichlet kern

$n: f \in L^p[0, 2\pi]$  p. 8 (1, 0)  
 unendliche komp. f. fast überall  
 $f: f \in L^p[0, 2\pi]$   
 überwiegen kann nicht unbest. f.  $\bar{u}$   
 $f: f \in C^p[0, 2\pi]$   
 überwiegen kann nicht unbest. überall  
 nie keine Komp. überall  
 über. ist nicht überall  $f \in C^1[0, 2\pi]$   
 No!

$\int_0^{2\pi} |D_N(x)| dx = \frac{2}{\pi} \log N + O(1) \rightarrow \infty \quad N \rightarrow \infty$  hat keine Konsequenzen  
 $\sup_{|f| \leq 1} |S_N f(x_0)| = \frac{1}{2\pi} \int |D_N(x)| dx$  nicht gim Restriktion

$\exists f \in C_p$  für die die Fourierreihe an der Stelle  $x_0$  nicht konvergiert

$\Gamma S_N f(x_0) \rightarrow f(x_0) \quad \Rightarrow |S_N f(x_0)|$  beschränkt  $N \rightarrow \infty \quad |S_N f(x_0)| \leq M(f)$   
 und mit Banach Steinhaus:  $\frac{1}{2\pi} \int |D_N| dx = \sup_{|f| \leq 1} |S_N f(x_0)| \leq c$

mit neuem Operator  $\delta_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(f)$  Fejer kern  
 $= \frac{1}{N+1} \left( \frac{\sin \frac{N+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} \right)^2$  der Glättungsoperator ist  
 $\delta_N(f) = \frac{1}{2\pi} \int k_N(y) f(x-y) dy \xrightarrow{\text{stark}} f$  Cesaro konvergenz

Baire'sche Kategorie

$X$  vollst. metr. Raum  
 $M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j \quad \text{int } M_j = \emptyset \quad (M_j \text{ nirgends dicht})$   
 $\Rightarrow \text{int } M = \emptyset$   $M$  von 1. Kategorie od meager

$U_j$  offen dicht in  $X \quad (X - U_j)^o = \emptyset$   
 $\Rightarrow \bigcap U_j$  dicht in  $X$

$\Gamma U_j$  dicht, offen zeigen  $\bigcap U_j$  dicht  
 $V$  offen  $\exists \varepsilon > 0 \quad V \cap \bigcap U_j \neq \emptyset$   
 $M$  ist überdichtbar  
 Vereinigung unendlich  
 dichter Mengen.

$\overline{B_{r_1}(x_1)} \subseteq U_1 \cap V$   
 $\overline{B_{r_2}(x_2)} \subseteq U_2 \cap \overline{B_{r_1}(x_1)} \quad r_2 < \frac{1}{2} r_1$   
 $\vdots$   
 $\overline{B_{r_j}(x_j)} \subseteq U_j \cap \overline{B_{r_{j-1}}(x_{j-1})} \quad 0 < r_j < \frac{1}{2} r_{j-1}$   
 $|x_j - x_{j-1}| < r_{j-1} < \frac{1}{2} r_{j-2} \dots \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - x_{j-1}| < \infty \quad x_j \rightarrow \xi \in X$   
 $\xi \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} U_j \cap V$  oder  $x_j$  Cauchyfolge

cor

$X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j \quad M_j = \overline{M_j} \Rightarrow \exists j^* \quad (M_{j^*})^o \neq \emptyset$

cor Banach Steinhaus

$A_j: X \rightarrow Y$   
 $|A_j x| \leq M_j(x)$   
 $\Rightarrow \|A_j\| \leq c$

$\Gamma M_j = \{x \in X \mid \forall n \quad |A_n x| \leq j\}$   
 $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j = X \Rightarrow \exists j^* \quad \text{int } M_{j^*} \neq \emptyset$   
 $B_r(x_0) \subseteq M_{j^*} \quad x = x_0 + r \cdot y \quad |y| < 1$   
 $|A_n x| \leq j^*$   
 $|A_n y| \leq \frac{j^*}{r} |A_n x - A_n x_0| \leq \frac{j^*}{r} |A_n x - A_n x_0| \leq \frac{j^*}{r} |y| \cdot M(x_0) = c$

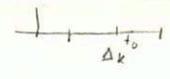
Anw. d. Satzes von Baire

$A_n: X \rightarrow Y$   
 $M = \{x \in X \mid \sup |A_n x| < \infty\}$   
 $\rightarrow M$  ist von erster Kategorie  
 oder  $M = X$

$\Gamma M_j := \{x \in X \mid \sup |A_n x| \leq j\}$   $U M_j = M$   
 $M$  nicht von 1. Kategorie  $\Rightarrow \exists j^*$  mit  $M_{j^*} \neq \emptyset$   
 $B_r(x_0) \subseteq M_{j^*}$   $x = x_0 + ry$   $\sup |A_n x| \leq j^*$   
 $y \in 1$   
 $\sup |A_n y| \leq \frac{1}{r} \sup |A_n(x - x_0)| \leq \frac{1}{r} (\sup |A_n x| + \sup |A_n x_0|) \leq C$   
 $\forall y \in 1$  d.h.  $\|A_n\| \leq C$   
 und  $\|A_n x\| \leq C \cdot \|x\|$

Bsp

$X = C[0,1]$   
 $Lip[0,1] = \{x \in C[0,1] \mid \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|} \leq C\}$  Lipschitz stetige Funktionen  
 Beh.  $Lip(\Delta_k)$  ist von erster Kategorie  $\Delta_k$  endlich Intervall



$\Gamma M_j(\Delta_k) = \{x(t) = x(s) \mid |t - s| \leq \Delta_k \forall t, s \in \Delta_k\}$   
 $U M_j = Lip \Delta_k$   
 $\tilde{x}(t) = x(t) + \sqrt{\epsilon} \cdot (\frac{t - t_0}{\epsilon}) \notin M_j(\Delta_k)$   
 für  $|\epsilon| < \epsilon_0$   
 also  $Lip \Delta_k \neq C[0,1]$

Prinzip der offenen Abbildung

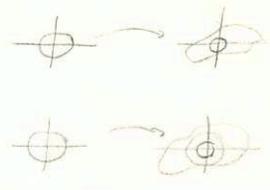
$A \in \mathcal{L}(X, Y)$  surjektiv  $\Rightarrow$  offen

$\Gamma A B_r(x_0) \supset B_\rho(y_0) \stackrel{!}{=} \exists \rho$  genügt  
 $A B_r(0) \supset B_\rho(0) \stackrel{!}{=} \text{wegen linearität}$   
 $(A B_r(0) \supset B_\rho(0) \stackrel{!}{=} \text{Strecken})$

i) zeigen  $\overline{A B_r(0)} \supset B_\rho(0)$   
 $M_j := \overline{A B_j(0)} = \overline{j A B_1(0)} \subset Y$   $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j = Y$  wegen surjektiv.

Baire:  $(M_j) \neq \emptyset$   $B_\rho(y_0) \subset M_{j^*}$   
 $B_\rho(y_0) \subseteq M_{j^*} = \overline{A B_{j^*}(0)}$   $-y_0 \in \overline{A B_{j^*}(0)}$   
 $B_\rho(0) = -y_0 + B_\rho(y_0)$   
 $B_\rho(0) \subseteq 2j^* \overline{A B_1(0)}$  da  $\overline{A B_{j^*}(0)} + \overline{A B_{j^*}(0)} \subseteq \overline{2 A B_{j^*}(0)}$   
 $B_\rho(0) \subseteq \overline{A B_1(0)}$   $\rho' = \frac{\rho}{2j^*}$

ii) zeigen  $A B_r(0) \supset B_{\rho'}(0)$   $\rho'' = \frac{\rho'}{2} \rho' > 0$   
 geg  $y \in B_{\rho'}(0)$   
 finde  $\xi \in \mathbb{N}$  mit  $y = A \xi$  für  $|\xi| < 1$  gilt wegen surjektivität  
 $|y| < \rho' \Rightarrow \exists \lambda, \lambda_k \neq 0$   $|y - A \lambda_k| < \epsilon$   $\forall \epsilon$   
 $|y - A \lambda_k| < \frac{\rho'}{4}$



$|x_k| < \frac{1}{2k}$   $|y - A(\lambda_k + \lambda_{k+1})| < \frac{\rho'}{2k+1}$   $f := x_1 + x_2 + \dots$   $|f| \leq \sum |x_k| < \sum \frac{1}{2^k} = 1$

Stetige Bijektionen sind Homöomorphismen

Der Invers Abb Satz

$A: X \rightarrow Y$   $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  bijektiv  
 $\Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$  d.h.  $\exists C \in \mathbb{R} \mid \|A^{-1} y\| \leq C \|y\|$

$\Gamma A$  bij. stetig  $A^{-1}$  stetig da  $A$  offen

cor

$X$  Banachs.  $\text{begr. } \|x_1\|, \|x_2\|$   
 $\|x_1\| \leq c \|x_2\| \Rightarrow \exists b > 0 \quad \|x_2\| \leq b \|x_1\|$

$\Gamma I: x_1 \rightarrow x_2$  beschr. surj.

Der Satz vom abgeschl. Graphen

$D(A) = X$   
 $A \in \mathcal{L}(X, Y) \Leftrightarrow \Gamma(A)$  abgeschlossen

" $\Leftarrow$ "  $X \oplus Y$  Banachraum  $\Gamma(A)$  abgeschl.  
 $\Rightarrow \Gamma(A)$  ist Banachraum  
 $P: \Gamma(A) \rightarrow X$   $(x, Ax) \rightarrow x$  ist stetig und bijekt  
 Invers Abb Satz  $\Rightarrow P^{-1}$  stetig  
 $Q: \Gamma(A) \rightarrow X$   $(x, Ax) \rightarrow Ax$  stetig  
 $A = P^{-1} \circ Q$  stetig  
 $A \in \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow A$  stetig  
 $x_j \rightarrow x \Rightarrow Ax_j \rightarrow Ax = y$

$\Gamma(A)$  abgeschl.  
 $\Downarrow$   
 $A$  abgeschl.  $\Rightarrow x_j \in D(A)$   $x_j \rightarrow x$   
 $Ax_j \rightarrow y$   
 $\Rightarrow x \in D(A)$   $Ax = y$   
 $\Leftrightarrow \Gamma(A)$  abgeschlossen in  $X \oplus Y$

folgt nicht:  $x_j \in D(A)$   
 $x_j \rightarrow x \Rightarrow x \in D(A)!$

$\Gamma \Leftarrow (x_j, y_j = Ax_j) \in \Gamma(A)$   
 $x_j \rightarrow x$   $y_j \rightarrow y$   
 $\Rightarrow (x, y) \in \Gamma(A)$   
 $\Leftarrow (x_j, y_j) \rightarrow (x, y) \in \Gamma(A)$

$A: D(A) \rightarrow Y$  abgeschl.  
 $A$  beschränkt  $\Leftrightarrow D(A)$  abgeschlossen

Banachs Satz vom abgeschl. Graphen

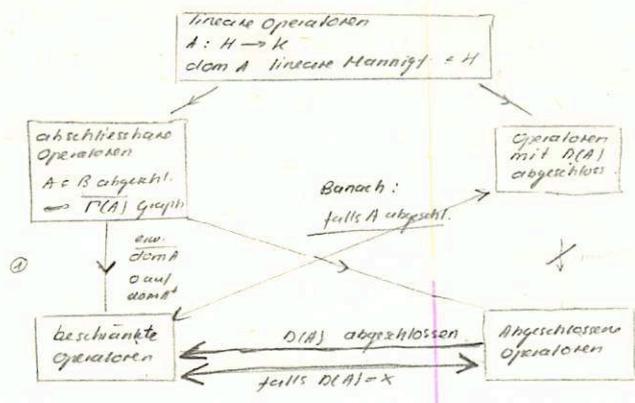
$\Gamma \rightarrow D(A) -$  abgeschl.  $\Rightarrow \exists$  Folge  $x_j \in D(A)$   $\lim x_j \notin D(A)$   
 $\Leftarrow \Gamma(A)$  Unterraum von  $X \oplus Y$  Banachraum  
 $P_1: \Gamma(A) \rightarrow X$   $(x, Ax) \rightarrow x$   
 $P_2: \Gamma(A) \rightarrow Y$   $(x, Ax) \rightarrow Ax$   
 $P_1$  Bij.  $P_1^{-1}$  beschr.  $Ax = P_2 P_1^{-1} x$  beschr.

$X, Y$  normierte Räume  $A: X \rightarrow Y$  linear  
 $\text{gra } A$  abgeschl.  $\Leftrightarrow x_n \rightarrow 0$   $Ax_n \rightarrow y$   
 $\Rightarrow y = 0$

$A$  abschliessbar  $\Leftrightarrow C(\text{gra } A)$  ist Graph

$\Gamma \Leftarrow C(\text{gra } A)$  Graph  $\exists B$   $H \rightarrow k$   $\text{gra } B = C(\text{gra } A)$   
 $\text{gra } A \subseteq \text{gra } B = A$  abschliessbar  
 $\rightarrow A$  abschliessbar  $\exists B$  dom  $B$  dom  $B$   $B \text{ dom } A = A$   
 $(0 \in k \in C(\text{gra } A))$   $0 \in k \in \text{gra } B \Rightarrow k = 0 \Rightarrow C(\text{gra } A)$  ist Graph

abgeschlossene Operatoren



$C(X, Y)$  Menge der nicht definierten, abgeschlossene Operatoren

$$\begin{array}{ccc}
 & D(A) \oplus A(D(A)) & \\
 P \swarrow & & \searrow Q \\
 D(A) & \xrightarrow{A} & A(D(A))
 \end{array}$$

o.F.a.A. beschränkte Operatoren sind abgeschlossen!

①  $x = y = e^2$   $D(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, |x_2| \leq 1\}$   
 $Ax = (x_1, 2x_2)$   $\dim \rightarrow \infty$

$D(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{j=1}^2 |x_j| \leq 1\}$

$X_1, Y_1, Y_2$  Banachräume  
 $A_1: D(A_1) \rightarrow Y_1$  abgeschlossen  
 $A_2: D(A_2) \rightarrow Y_2$  abschließbar  
 $D(A_1) \subseteq D(A_2) \Rightarrow \exists C \forall x \in C \ (x \in D(A_1) \Rightarrow Ax_1 \in Y_1)$   $\forall x \in D(A_1)$

$T: D(A_1) \rightarrow Y_2$   
 $(x, A_1 x) \rightarrow A_2 x$   
 $T$  ist abgeschlossen  
 $D(T) = D(A_1) \cap D(A_2)$ ;  $A_1(D(A_1) \cap D(A_2)) \subseteq D(A_2)$  abgeschlossen  
 Also  $T$  ist beschränkt

\*  $(x_n, A_1 x_n)$  konv. in  $D(A_1)$   $\Rightarrow \exists x = \lim x_n$   
 $A_1 x = \lim A_1 x_n$   
 $\Rightarrow x \in D(A_2)$  da  $D(A_1) \subseteq D(A_2)$   
 und das kann nur  $A_2 x$  sein da  $A_1$  abschließbar

komplementäre Unterräume in Banachräumen

$H \subseteq X$   $M$  orthogonal komplementär  $\exists N \subseteq X$   $M \cap N = \{0\}$   $M \cup N = X$   
 $M, N$  topologisch komplementär  $A: M \cup N \rightarrow X$   $M \rightarrow M$   $N \rightarrow N$  ist homöomorph  
 inv. Abb.  $\Rightarrow$  algebraisch komplementär  $M, N$  sind topol. komplementär, denn  
 $\exists P: X \rightarrow M$  stetig surj.  
 $\exists Q: X \rightarrow N$  stetig surj.  
 $\exists X \rightarrow (M \cup N)$  stetig surj.

für lineare Mannigf. der Unterraum

Satz  $H \subseteq X$  heißt komplementärer UR  $N \iff$   
 $\exists P \in \mathcal{L}(X)$   $P^2 = P$   $\text{ker } P = N$   
 denn ist  $N = \text{ker } P$   $\text{ker } P = \text{rang } P^\perp$

$\Gamma \Rightarrow$   $N = \text{ker } P$   
 1)  $N$  abgeschl.  
 2)  $x = P(x) + (I-P)x$   
 $P(I-P)x = 0$   
 3)  $M \cap N = 0$   $\exists x \in M \cap N = x = P(x) = 0$   $(x \in M) \Rightarrow x = 0$   
 $\exists x \in N \Rightarrow x = (I-P)x = x$   $(x \in N) \Rightarrow x = x$

komplementäre UR in  $\mathbb{R}^2$   $\mathbb{R}^2$  real komplementär UR

unendlich-dim. komplementäre UR sind isomorph zum Raum selbst

trivial:  $H$  endlich-dim Raum  $\exists$  komplementärer UR

$X$  Banachraum  $\Rightarrow$  je zwei UR komplementär  $\Rightarrow$  normierte Hilberträume

homöomorphe lineare Operatoren

$C(X, Y)$  Menge der abgeschl. Operatoren  
 $L(X, Y)$  Menge der beschr. Operatoren  
 $K(X, Y)$  Menge der kompakten Operatoren  
 $F(X, Y)$  Menge der Operatoren mit endl. Rang  
 $\mathcal{B}(X, Y)$  Inclusion

$A \in \mathcal{L}(X, Y)$   $\dim(R(A)) < \infty \Rightarrow A \in K(X, Y)$   
 $K \subseteq L(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow L \subseteq K \subseteq L(X, Y)$   
 $K \subseteq F(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow K \subseteq F \subseteq L(X, Y)$

$K(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$   
 $K(X) \triangleleft \mathcal{L}(X)$  abgeschlossener  $\mathbb{Z}$ -Modul ideal in  $\mathcal{L}(X)$

$X$  normierter Raum,  $Y$  Banachraum  
 $A_n: X \rightarrow Y$  kompakt  $\forall n$   
 $A_n \rightarrow A$  in  $\mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow A$  kompakt

$\Gamma$   $M \subseteq X$  beschränkt  $\forall \|x\| \leq M$   $\forall x \in M$   
 genügt zuzügen  $A(M) \subseteq K$  kompakt da  $Y$  vollst.  
 $\exists \epsilon > 0$   $\forall n \geq n_0$   $\|A_n - A\| \leq \frac{\epsilon}{2M}$   $\forall n \geq n_0$   
 nutzen dann  $\|A_n x - A x\| \leq \frac{\epsilon}{2}$   
 $A_{n_0}$  ist  $\epsilon$  kompakt d.h.  $\exists$  Menge  $\{y_1, \dots, y_m\}$   
 $\forall x \in M \exists y_i: \|A_{n_0} x - y_i\| \leq \frac{\epsilon}{2}$   
 $\|A x - y_i\| \leq \|A x - A_{n_0} x\| + \|A_{n_0} x - y_i\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

nicht-leere kompakt  $\Rightarrow$  kompakt + vollst.

$\Gamma$   $\text{Id}$  nicht kompakt für  $\dim X = \infty$

$A \in \mathcal{L}(X)$   
 a)  $A$  kompakt  $\Rightarrow \forall x_n \rightarrow x \Rightarrow \|A x_n - A x\| \rightarrow 0$  **vollst. stetig**  
 b)  $X$  reflexiv:  $A$  vollst. stetig  $\iff A$  kompakt

$\Gamma$   $x_n \rightarrow 0$   $\text{IUB } \|x_n\| \leq M$   
 o.F.a.A.  $M=1$   $\exists A_n \in \mathcal{L}(X)$   
 $A$  kompakt  $\Rightarrow \exists \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in X$   
 $\|A x_n - A x\| < \epsilon$   
 $A$  beschr.  $\Rightarrow A$  schwach stetig  $x$   
 d.h.  $A x_n \rightarrow A x = 0$  also  $y = 0$   
 $0$  ist einziger  $\text{IUB}$  von  $A_n$  Folge  $A_n$  in kompakter Menge erth.  
 $\Rightarrow \|A x_n\| \rightarrow 0$

$(X, \text{schwach})$   
 $(Y, \text{schwach})$   
 stetig  
 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$   
 $x \rightarrow 0 \Rightarrow Ax \rightarrow 0$   
 $\Gamma$   $\|A(x_n)\| \leq \|x_n\| \|A\|$   
 $\Rightarrow \downarrow \quad \downarrow$   
 $\Rightarrow 0 \quad 0$

b)  $X$  reflexiv  $\Rightarrow$   $X$  separabel  
 $\Rightarrow$  (ball  $B$ ,  $\text{wkl}$ ) kompakter met. Raum  $\Rightarrow X$  separabel  
 $\exists x_n \rightarrow x$  für jede Folge  $x_n \in B$  Teilfolge  $x_{n_k} \rightarrow x$   
 $\Rightarrow \|A x_{n_k} - A x\| \rightarrow 0$  d.h.  $A(B)$  ist folgenkompakt  $\Rightarrow A$  kompakt  
 $\bullet X$  reflexiv  $x_n = \langle x_j \rangle \in X$   
 $A_n = A|_{x_n}$  vollst. stetig  
 $A x_n = A x_{n+1}$

A stetig	$x_n \rightarrow x \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax$
A <u>stetig</u>	$x_n \rightarrow x \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax$
A schwach stetig	$x_n \rightarrow x \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax$

stetig  $\Rightarrow$  stetig  $\Rightarrow$  schwachstetig

Stetigkeit bez. verschiedenen Topologien

(hätten noch u. Topologie)  
 $x_n \rightarrow x \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax$   
 dies ist äqu. geknüpft mit Stetigkeit (Satz 5.11)

Bsp

- $X=Y=L^2(0, \infty)$   
 $Af = \int_0^x e^{ixy} f(y) dy$  ist nicht kompakt da unitär  
 unitäre und Isometrien niemals kompakt falls  $X$  unendlichdimensional
- $Af = \int_0^x e^{-x-y} f(y) dy$  ist eindimensional also kompakt  
 Bild  $f \in L^2(0, \infty)$
- $Af = \int_0^x e^{-|x-y|} f(y) dy$  ist nicht kompakt  
 $f_n = \begin{cases} 1 & n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$   $\|Af_n\| = \|Af_0\| > 0$   
 Bildfolge müsste eine schwach konvergente Teilfolge besitzen, da  $f_n$  beschränkt

4) Integriertoren in  $C[a, b]$

$k: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig kein d. Integriertoren  
 $Ax(t) = \int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau$   
 $M \subset C[a, b]$  beschränkt  
 $A(M)$  glm beschränkt + glg. stetig  $\Rightarrow A(M)$  relativ kompakt

5) gleichwertig Operator in  $L^2[a, b]$   $k(s, t) \in L^2([a, b] \times [a, b])$   
 $A$  beschränkt  $\checkmark$   
 $A$  kompakt:

$$k(s, t) = \sum_{j=1}^N p_j(s) q_j(t) \quad q_j, p_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

ausgespart Kern  $\Rightarrow R[A]$  endl. dimensional  
 gesparte Kerne liegen dicht in  $L^2(a)$  WSS  
 $\Rightarrow \exists k_n \quad \|k - k_n\|_{L^2(a)} \rightarrow 0$   
 $\Rightarrow \|Ax - Ax_n\|_{L^2} \leq \|k - k_n\|_{L^2} \cdot \|x\| \rightarrow 0 \Rightarrow A$  kompakt

6) allgemeine Defn. der Integriertoren  
 $(X, \mu, \nu)$  Maßraum  $1 < p < \infty \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$   
 $k: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mu, \nu$   $\sigma$ -messbar  
 mit  $M = \left\{ \int |k(x, y)|^p d\mu(x) \int |q|^q d\nu(y) \right\}^{1/q} < \infty \quad \|k(x, y)\|_{p, q}$   
 $\Rightarrow k \in K(L^p(\mu)) \quad \|k\| \in M$

oder  $\int |k(x, y)|^p d\mu(x) \int |q|^q d\nu(y) \leq C_1 \quad \forall f$   
 $\int |k(x, y)|^q d\nu(y) \int |p|^p d\mu(x) \leq C_2 \quad \forall f$   
 $\|k(x, y)\|_{p, q} \leq C_1 \cdot C_2$

$H$  Hilbertraum separabel  
 $F(H) = B_0(H)$  ist dicht in  $\mathcal{K}(H) = B_0(H)$

gilt nicht in belieb. Banachräumen  
 (Enflo) 1973!

$B_0(C(K))$  dicht in  $B_0(C(K))$

$k \in K(X, Y)$   
 $\omega(k) = k^*k$  abgeschlossen  
 $\Rightarrow \dim \omega(k) < \infty$

$\Gamma$   $e_1, \dots$  orthon. Basis  
 $P_N x = \sum_{j=1}^N \langle x, e_j \rangle e_j$  Proj. operator  
 $Q_N = (I - P_N)$  orthog. komplement  
 $k_N = k P_N$  mit Rang höchstens  $N$

$\|k - k_n\| = \|k \cdot Q_n\| \rightarrow 0$   
 denn  $\|k Q_n x_n\| \rightarrow 0$   
 $y_n \rightarrow 0$  da  $k$  stetig  
 $\Rightarrow \|k Q_n\| \rightarrow 0$

$\Gamma$   $k: X \rightarrow \omega(k) \subset Y$   
 $\omega(k)$  Banachraum  
 Relativen Abb.  $k$  offen  
 $\exists c \quad k B_r \supset B_c$   
 d.h. Einheitskugel kompakt  
 $\Rightarrow$  Einheitskugel endl. dimensional

Satz von Schauder

$A \in B(X, Y)$   
 $A$  kompakt  $\Leftrightarrow A^*$  kompakt

$\Gamma \Rightarrow \{y_n^*\}$  Folge in  $\text{Ball}(Y^*)$   
 zeigen  $\{A^* y_n^*\}$  hat  $\mu P$  in normiert.  
 Analog:  $\exists y^* \in \text{Ball}(Y^*) \quad y_n^* \xrightarrow{c} y^*$  (Cl. Clusterpunkt)  
 zeigen  $A^* y_n^* \xrightarrow{c} A^* y^*$   
 $y_n, y_m \in \text{Mgl}$  in  $A(\text{ball } X)$   
 da  $y_n^* \xrightarrow{c} y^*$  g. h. es  $n \geq N \quad |\langle y_n, y^* - y_m^* \rangle| < \frac{\epsilon}{2}$   
 $x$  beliebig in  $\text{ball } X \quad \exists y_n \quad \|Ax - y_n\| < \frac{\epsilon}{2}$   
 $|\langle x, A^* y^* - A^* y_n^* \rangle| = |\langle Ax, y^* - y_n^* \rangle|$   
 $\leq |\langle Ax - y_n, y^* - y_n^* \rangle| + |\langle y_n, y^* - y_n^* \rangle|$   
 $\leq 2 \|Ax - y_n\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$   
 $\Rightarrow A^*$  kompakt  $\Rightarrow A^{**}$  kompakt  
 $A = A^{**} / X$  ist kompakt

$k \in K(\lambda)$  es gilt  $f(\lambda) \neq 0$   
 $\dim \ker(AI - k) < \infty$   
 $\omega(AI - k)$  ist abgeschlossen

$\Gamma(1)$   $N = \ker(AI - k)$  abgeschlossen  
 $B_0(0) \cap N$  relativ kompakt da  $\lambda^{-1}kx = x$   
 $\rightarrow N$  endl. dimensional

x Lemma

$N$  endl. dim. UR von  $X$   
 $\Rightarrow \exists$  komplet. Unterkeim

$\Gamma$  ist. ind. Basis in  $N$   
 $\exists f_j \in X^1 \quad f_j(n_k) = \delta_{jk}$  (Hahn Banach)  
 $M = \{x \in X \mid |f_j(x)| = 0 \quad f_j(x) = 0\}$

ii)  $\lambda = 1$  oEdA  
 $M = \ker(T)$  heißt abgeschl. komplement  $M \quad X = M \oplus N$   
 $T_n = T|_M \quad M \rightarrow \omega(T) \quad \ker T_n = \{0\}$  ist injektiv, surj.  
 $R = T_n^{-1} : \omega(T) \rightarrow M$  ist beschränkt wenn daraus folgt  $\omega(T)$  abgeschl.

wenn nicht:  $\exists y_n \in M \quad |x_n| = 1 \quad (T_n x_n) \rightarrow 0$   
 $x_n - kx_n = y_n$   
 $x_n = y_n + kx_n$

$x_{n+1} = kx_n + y_n$   
 $x_n \rightarrow 0$ , weil  $kx_n$  konvergiert  
 $|x^*| = 1 \quad T x^* = 0 \Rightarrow x^* \in N$

Linienraum:  $X$  Banachraum, in dem jedes Unterkeim komplementiert ist  $\rightarrow X \cong H$  Hilbertraum

$k \in K(\lambda) \quad \lambda \neq 0$   
 $\omega(AI - k) = X \Leftrightarrow N(AI - k) = \{0\}$

$(AI - k)y = 0$  hat Lösung  $\forall y \in X \Leftrightarrow$   
 $(AI - k) = 0$  nur triviale Lösung

" $\Rightarrow$ "  $\omega(T) = X \quad N_1 = N(T) = \{0\}$   
 $N_n = N(T^n)$  abgeschl.  
 $0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_n \subset \dots$

denn:  $\exists x_0 \in N_1 \quad x_0 \neq 0 \quad T x_0 = 0$   
 $\exists x_1 \quad T x_1 = x_0 \Rightarrow T^2 x_1 = 0$

Folge  $|x_n| = 1$   
 $|x_n - N_n| > \frac{1}{2}$   
 $|kx_n - kx_m| > \frac{1}{2}$   $\nrightarrow$  zu Kompaktheit

$\Gamma'' \Leftarrow$   $\lambda = 1$  oEdA  
 $T_n = I - k$   
 $N(T) = \{0\} \quad \omega(T) = X \subsetneq X$  + indir.  
d.h.  $\exists x_0 \in X \setminus \{0\}$

$\omega(T) = X_n$  abgeschlossen  
 $\omega(T^n) = X_n$  abgeschlossen da  $T^n = I - kn$  kompakt

$T^n x_0 \in X_n \setminus X_{n+1}$   
wäre  $T^n x_0 = T^{n+1} y$   $T^{-n} (x_0 - T y) = 0$   
 $T^{-n} (x_0 - T y) = 0 \Rightarrow T^{-n} x_0 - T^{-n} T y = 0$   
 $T^{-n} x_0 - y = 0$  d.h.  $x_0 \in X_n$

$x_0 \in X_n \setminus X_{n+1}$  Anstieg Folge von Banachräumen  
 $x_n \in X_n \quad |x_n - x_{n+1}| > \frac{1}{2} \quad |x_n| = 1$

men  $|kx_m - kx_n| = |\lambda m - \lambda n - T x_m + T x_n|$   
 $= |\lambda m - \lambda n| > \frac{1}{2}$   $\sum = \lambda n + T \lambda m - T \lambda n$   
 $\nrightarrow$  zu Kompaktheit  $\sum = \lambda n \quad \sum = \lambda n + 1$

Friedholm alternative

Anwend. d. Friedholm alternative

\*  $\frac{d^2 u}{dx^2} + a^2 u = f(x) \quad x \in [0, 1] \quad u(0) = u(1) = 0$   
 Löser  $\forall f \in C[0, 1] \Leftrightarrow$   
 $\frac{d^2 u}{dx^2} + a^2 u = 0 \Rightarrow u = 0$  d.h.  $\frac{a}{\pi} \notin \mathbb{Z}$   
 wenn  $\frac{a}{\pi} \in \mathbb{Z}$



$\sin(ax)$  Lösung  
 $a_1 \cos ax + a_2 \sin ax$

Lösung von  $d$ :  
 $u = \frac{1}{\omega} (\varphi_2(x) \int_0^1 \varphi_1(y) f(y) dy + \varphi_1(x) \int_x^1 \varphi_2(y) f(y) dy)$   
 $\varphi_1(x) = \sin ax$   
 $\varphi_2(x) = \sin a(x-1)$   
 $\omega = \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2 = -a \sin a$

$A \in \mathcal{L}(X, Y)$   
 $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$   
 $\omega(A)^+ = \{f \in Y^* \mid f(y) = 0 \quad \forall y \in \omega(A)\} = N(A^*)$   
 $\omega(A)^- = \{x \in X \mid g(x) = 0 \quad \forall g \in \omega(A^*)\} = N(A)$

$N(A^*) = \{0\} \Leftrightarrow \omega(A)$  dicht in  $Y$   
 $N(A) = \{0\} \Leftrightarrow \omega(A^*)$  dicht in  $X^*$

Index  $\alpha = \dim N(A)$   
 $\alpha^* = \dim N(A^*)$   
 $\text{ind}(A) = \alpha - \alpha^*$

gilt  $A = I - K \Rightarrow \text{ind } A = 0$

o. row.  $\omega(A)$  dicht in  $Y$   
 $\rightarrow$  S. 21 Conway

Friedholm  $\dim N(A) = 0 \Leftrightarrow \dim N(A^*) = 0 \quad A = I - K$

Kompaktheitsbedingung

(x)  $\lambda x - k(x) = y \quad \alpha = \dim N(AI - k) > 0$   
 Notwendig u. hinreichend für Lösbarkeit von \* ist  
 $f \in \omega(AI - k)^+ \Rightarrow f(y) = 0$   
 d.h.  $f \in X^*$  mit  $f(\lambda x - kx) = 0 \Rightarrow f(y) = 0$

Spektraltheorie

Resolventenmenge  
Spektrum

$$\rho(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I)^{-1} \text{ existiert} \} \text{ Resolventenmenge } \lambda \in \rho(A)$$

$$\sigma(A) := \mathbb{C} - \rho(A) \text{ Spektrum von } A$$

Riese  
Funktional  
kalkül

Analytische Vektorwertige Funktionen: stetig  
 $G \subseteq \mathbb{C} \times \text{Banachraum}$   $f: G \rightarrow X$  stetig in  $G \Leftrightarrow A(z)$  hat stetig. Ableit. in  $G$   $\lambda \in \rho(A)$   
 $\Leftrightarrow \forall f \in X' \quad f(A(z)x) = F(z)$  analytisch in  $G$   $\lambda \in \rho(A)$   
 $\Leftrightarrow A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n$  die für  $|z-z_0| < \delta$  schwach konv.  
 $(F(z) = f(Az)) = \sum f(A_n) (z-z_0)^n$

(Schwach)  
 Der grösste Konvergenzradius von  
 $Az = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n$  ist  $\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|^{1/n}}$

$\Gamma \cdot |z-z_0| < \delta < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|^{1/n}}$   
 d.h.  $\|A_n\| \leq C \left(\frac{1}{\delta}\right)^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n (z-z_0)^n\| \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z-z_0|}{\delta}\right)^n$

• Sei nun  $b > \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|^{1/n}\right)^{-1}$   
 $\Rightarrow A(z)$  konvergiert in  $|z-z_0| < b$   
 $f(A(z)x) = F(z)$  analyt. in  $|z-z_0| < b$   
 Konvergenzradius von  $F$  ist  $\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \|c_n\|^{1/n}} \geq b$   $c_n = f(A_n)$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|c_n\|^{1/n} \leq \frac{1}{b} < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|^{1/n}$  wähle  $b$   
 d.h.  $\|c_n\| \leq M \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n$   $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|c_n\|^{1/n} \leq \frac{1}{b} < \frac{1}{b}$   
 $|f(c_n^* A_n) x| \leq M \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n$

$\|b_n^* A_n\| \leq C$   
 $\|A_n\| \leq \frac{C}{b^n}$   
 $\|A_n\|^{1/n} \leq \frac{C^{1/n}}{b}$   
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|^{1/n} \leq \frac{1}{b}$

$\{ \lambda \mid \lambda \in \rho(A) \} \cap \sigma(A) = \emptyset$

$\Gamma \{ \lambda \mid \lambda \in \rho(A) \} \subset \rho(A)$   
 $\rho(A)$  offen machen evtl. überdeckt von  $\{ \lambda \mid \lambda \in \rho(A) \}$   
 $\rightarrow$  Spektralradius  $> r(A)$   $\checkmark$

$\rho(A)$  offen  $\{ \lambda \mid \lambda \in \rho(A) \} \subseteq \rho(A)$   
 $R_\lambda$  analytisch in  $\rho(A)$

$\Gamma \lambda_0 \in \rho(A) \quad R_{\lambda_0} \in \rho(A)$   
 für  $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1} \exists R_\lambda \in \rho(A)$   
 denn  $R_\lambda = (I - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0})^{-1} \cdot R_{\lambda_0}$   
 $= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}$  (Form Neumann)

Bsp für einen Operator mit kontinuierl. Spektrum ohne EW

$X = \mathbb{C}[0,1]$   
 $A(f(x)) = x \cdot f(x)$   
 hat keinen EW:  $x \cdot f(x) = \lambda \cdot f(x)$   
 hat Kont. Spektrum:  $\rho(A) = \{ \lambda \mid \exists f(x) = (x-\lambda)^{-1} \text{ existiert nicht} \}$   
 $\lambda f(x) - x f(x) = (\lambda - x) f(x) = g(x)$   
 d.h.  $f(x) = \frac{g(x)}{\lambda - x} \Rightarrow g(\lambda) = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0$   
 $\sigma(A) = [0,1]$

Kompakte  
Operatoren  
mit diskont.  
HP nicht  $\lambda=0$   
Spektrum

$K \in K(X) \quad \lambda \in \sigma(K) \quad \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \text{EW}$   
 $\lambda \in \sigma(A)$  ist abzählbar mit höchstens einem HP  $\lambda=0$

$\Gamma \lambda \in \sigma(K) \Rightarrow \omega(AI - K)$  ist nicht ganz  $X$  denn:  
 Fredholm:  $N(AI - K) = \{0\} \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(K)$   
 für  $\lambda \neq 0$   
 Sei  $\delta > 0$ . wir zeigen nun, dass  $\sigma(A) \cap \{ \lambda \mid |\lambda| \geq \delta \}$  endlich ist  
 sonst  $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots \in \sigma(A) \cap \{ \lambda \mid |\lambda| \geq \delta \}$  die verschieden sind  
 $\exists \varphi_j \quad \|\varphi_j\| = 1 \quad (k - \lambda_j) \varphi_j = 0$  da  $\sigma_p = \sigma$   
 $M_0 = 0 \quad M_n := \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle \quad M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \dots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \dots \subset X$   
 Inklusionen acht:  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$  sind linear unabh.  
 (K -  $\lambda_{n+1}$ )  $\varphi_{n+1} = 0$   
 $(k - \lambda_{n+1}) \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j = 0$   
 $\Rightarrow (K - \lambda_{n+1}) \varphi_j = 0$  da nach Ind.  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  lin. unabh.  
 $(k - \lambda_j) \varphi_j = 0$   
 $(k - \lambda_{n+1}) \varphi_j = 0 \} \Rightarrow \lambda_j = \lambda_{n+1} \text{ \u2264 \u2013 zusammenrechnen}$

w\u00e4hlen  $x_n \in M_n \quad \|x_n\| = 1 \quad \|x_n - M_{n-1}\| \geq \frac{1}{2}$   
 $m < n \Rightarrow \|Kx_n - Kx_m\| = \left\| \lambda_n x_n - \left( \lambda_n x_n + \sum_{j=1}^{m-1} c_j (\lambda_n - \lambda_j) \varphi_j \right) \right\|$  da  $x_n = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$   
 $\geq |\lambda_n| \|x_n - M_{n-1}\| \geq \frac{\delta}{2} \quad \checkmark$   $\hookrightarrow$  zwei kompakter

$\lambda \in \sigma(K)$   $K$  komp  
 $N_\lambda = \ker(A - \lambda I)$   
 $N_j = \ker(A - \lambda_j I)$   $N_\lambda \perp N_\lambda \dots$   
 Beh  $\exists j^* N_{j^*} = N_j \quad j > j^*$

Die Diagonalisierung Kompakter, selbstadjungierter Operatoren im Hilbertraum

(Selbstadjungiertheit im sehr weiten Hilbertraum nicht sinnvoll)

$A = A^* \in \mathcal{L}(H)$   
 $\Rightarrow s = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|A\|$

$\Gamma s \in \|A\|$  Schwarz  
 $(Ax, y) = \frac{1}{4} |(A(x+y), x+y) - A(x-y), (x-y)|$  im besten Fall  
 $\leq \frac{1}{4} s (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \frac{1}{2} s (\|x\|^2 + \|y\|^2)$   
 $x \rightarrow \varepsilon x$   
 $y \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} y$   $(Ax, y) \leq \frac{1}{2} s (\varepsilon^2 \|x\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|y\|^2) = s \|x\| \|y\|$   
 (Setze  $\varepsilon^2 = \frac{\|y\|}{\|x\|}$ )

$A = A^* \in \mathcal{L}(H)$   
 $(Ax, x) = 0 \Rightarrow A = 0$

s.o.  $(0, 1)$  gegenp.

$A = A^* \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

$\Gamma$  Ann.  $\lambda = \mu + i\delta$   $\delta \neq 0$   
 zeigen  $(A - \lambda I)$  ist bij.

injekt.  $\cdot (A - \lambda I)x = 0 = i\delta \|x\|^2 + ((\mu - A)x, x)$   
 $\neq 0$  falls  $\|x\| > 0$  weil da  $\mu - A$  s.o.

surj:  $(A - \lambda I)x = y$  lösbar  $\forall y \in H$

$B(x, y) = (i(A - \lambda I)x, y) =$   
 $B(x, x) = \delta \|x\|^2$   
 $\forall B(x, x)$

$\delta > 0 \Rightarrow i(A - \lambda I)$  invertierbar Lox Hilbert!  
 $\delta < 0 \Rightarrow -i(A - \lambda I)$  invertierbar

$E = A^*$   
 $\ker(A - \lambda I)$  ist invariant unter  $A$

$\Gamma (A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)Ax = 0$   
 $\lambda x \quad \perp$

$\ker(H - \lambda I) \perp \ker(A - \lambda I) \quad \lambda \neq \mu \quad A = A^*$

$\Gamma (A - \lambda I)x = 0 \quad (A - \mu I)y = 0$   
 $(Ax, y) = (\lambda x, y) = \lambda (x, y)$   
 $(x, Ay) = (x, \mu y) = \mu (x, y)$

$K = K^* \in \mathcal{L}(H)$   
 entweder  $\lambda_1 = \sup \{ (Kx, x) \}$   
 oder  $\lambda_2 = \inf \{ (Kx, x) \}$   
 ist EW von  $K$

$\Gamma \sup \{ (Kx, x) \} = \|K\|$   
 Satz folgt aus

$A = A^* \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow r(A) = \|A\|$

$\Gamma \|A^n\| = \|A\|^n$   
 $\|A^n\|^n = \|A\|^n$   
 $\|0\| = \|A\|^n$

zeigen  $(Ax, x) \leq r(A)$   
 $(Ax, x) \leq \|Ax\| = (Ax, Ax)^{\frac{1}{2}} = (A^2 x, x)^{\frac{1}{2}}$   
 $(A^2 x, x) \leq (A^{2n} x, x)^{\frac{1}{2n}}$   
 $\sup (Ax, x) \leq \sup (A^{2n} x, x)^{\frac{1}{2n}} \leq \|A\|^2$   
 $(Ax, x) \leq r(A)$

$A = A^* \in \mathcal{L}(H) \quad N \subset H$  Inv. UR  
 $\Rightarrow N^\perp$  invariant

$\Gamma y \in N^\perp$  d.h.  $\langle n, y \rangle = 0 \quad \forall n \in N$   
 $\Rightarrow \langle n, Ay \rangle = \langle An, y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$

Cor Alle EWF sind orthogonal

Spektralsatz für kompakte s.o. Operatoren

$K$  kompakter, s.o. Operator auf  $H$   
 $\lambda_0 = 0 \quad \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots \}$  verschiedenen von 0 verschiedenen EW von  $K$   
 $P_n$  Projektion von  $H$  auf  $\ker(K - \lambda_n)$   
 $K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$  (konv. in  $\mathcal{L}(H)$ )  
 $P_n P_m = P_m P_n \quad I = \sum_{j=0}^{\infty} P_j$

$\Gamma \exists \lambda_n \in \sigma_p(K) \quad |\lambda_n| = \|K\|$   
 $N_\lambda = \ker(K - \lambda I) \quad P_\lambda = \text{Proj. von } K \text{ auf } N_\lambda$   
 $H_1 = N_\lambda^\perp \quad N_\lambda, H_1$  sind invariante orthog. Unterräume von  $H$   
 $K_n = K|_{H_1}$  ist selbstadj. kompakter Operator auf  $H_1$   
 $N_2 = \ker(K_n - \lambda_2) \quad \lambda_2 = \|K_n\|$   
 $\Rightarrow |\lambda_2| \geq |\lambda_1| \dots$   
 $N_\lambda = \ker(T - \lambda I) \quad |\lambda_{n+1}| = \|T|_{(N_\lambda \oplus \dots \oplus N_n)^\perp}\|$   
 $|\lambda_n| \rightarrow \alpha$  Beh.  $\alpha = 0$  hier wegen Kompaktheit

$\lambda_n P_n = K|_{N_n}$   
 $h \in N_k \quad k \leq n \Rightarrow (K - \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k)h = 0$   
 $kh - \lambda_k h = 0$   
 $h \in \bigoplus_{k=1}^n N_k \Rightarrow (K - \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k)h = kh$   
 $\|K - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j\| = \|T|_{(N_1 \oplus \dots \oplus N_n)^\perp}\| = \lambda_{n+1} \rightarrow 0$

Cor  $K \in \mathcal{K}(X) \quad K = K^* \quad \ker(K) = \{0\} \Rightarrow H$  separierbar

Spektraltheorem für kompakte normale Operatoren

$T$  kompakter, normaler Operator  
 $\{\lambda_1, \dots\}$  verschiedene EW von  $T$   
 $P_n$  Proj. von  $H$  auf  $\ker(T - \lambda_n)$   
 $\rightarrow P_n P_m = P_m P_n = 0 \text{ n} \neq m$   
 $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$

$\Gamma$  Klein  
 $A = (T + T^*)/2$   
 $B = (T - T^*)/2i$   
 $T = A + iB$   $AB = BA$   
 $A, B$  simultan diagonalisierbar

Courants Minimax Prinzip

suchen EW ohne Kenntnis der EV

posit. EW  $H = K^*$  kompakt,  $(Kx, x) \geq 0$   
 $\lambda_{n+1} = \min_{E_n} \max_{x \perp E_n, \|x\|=1} (Kx, x)$   
 $E_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$

$\Gamma$  orthonorm. EW  
 $E_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$   
 $\lambda_{n+1} = \max_{\substack{x \in E_n^\perp \\ \|x\|=1}} (Kx, x) = (Kx^*, x^*)$   
 $\mu_{n+1} := \min_{E_n} \max_{x \perp E_n, \|x\|=1} (Kx, x)$   
 $\mu_{n+1} \leq \lambda_{n+1}$  klar  
 $\lambda_{n+1} \leq \mu_{n+1}$  ---

$E_n$  bel.:  $\max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in E_n^\perp}} (Kx, x) \geq (Kx^*, x^*) = \lambda_{n+1}$   $x^* \in E_n^\perp$

denn:  $(x^*) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k e_k$   
 $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 = 1$   $(Kx^*, x^*)$   
 $= \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 \lambda_k$

$x = \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k e_k + a_{n+1} e_{n+1}$   $e \in E_n^\perp$   
 $(Kx, x) = \sum_{k=n+2}^{\infty} |a_k|^2 \lambda_k + \lambda_{n+1} |a_{n+1}|^2$   
 $\lambda_{n+1}$  ist max  $> \lambda_{n+1}$

Sturm-Liouville Problemen

$q \in C[0,1]$   
 $A = -\frac{d^2}{dx^2} + q$   $H_0^2 \rightarrow L^2[0,1]$   
 $\{u \mid u'' \in L^2[0,1], u(0)=u(1)=0\}$   
 Annahme  $Au=0$   $\lambda=0 \Rightarrow u=0$  dann  
 $\exists A^{-1} L^2 \rightarrow H_0^2 \subset L^2$   
 $A^{-1} f = \int_0^1 G(x,t) f(t) dt$  Green'sche Funktion  
 $A^{-1}$  kompakt, s.o. falls  $q$  reell  
 $\Rightarrow \exists$  orthon. Basis in  $H_0^2$ , die EW von  $L^2$  sind

Spektraltheorem für beschränkte normale (s.u.) Operatoren

Ordnungstheorie auf  $\{A \in \mathcal{L}(H) \mid A=A^*\}$  =  $S(H)$   
 $A_1 \leq A_2 \Leftrightarrow (A_2 - A_1)x, x \geq 0$   
 $0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n \leq \dots \leq I \Rightarrow A_n \rightarrow A$  in  $S(H)$

$\Gamma$   $A_n - A_m \geq 0$   $n \geq m$   
 zeigen  $\|A_n - A_m\| \leq (A_n f, f) - (A_m f, f)$  genügt da  $\|A_n - A_m\| = \sup_{\|x\|=1} |(A_n - A_m)x, x| \rightarrow 0$  und  $S(H)$  vollständig  
 $\|(A_n - A_m)f\|^2 = ((A_n - A_m)f, (A_n - A_m)f)$   
 $= ((A_n - A_m)(A_n - A_m)f, f) \leq ((A_n - A_m)g, g) (A_n - A_m)f, f$   
 $\leq \|A_n - A_m\| \|g\|^2 [(A_n f, f) - (A_m f, f)]$   
 $\leq \|A_n - A_m\| \|A_n - A_m\| \|f\|^2 [(A_n f, f) - (A_m f, f)]$   
 $\leq 1$

Operatorenkalkül

Lemma

$A \in S(H)$   $\|A\| = a$   
 $p$  Polynom mit  $p(t) > 0 \forall t \in [-a, a]$   
 $\rightarrow p(A) \geq 0$

$\times (a-t)(a+t)q^2$   
 $= \frac{1}{2a} (a+t)(a-t)p + \frac{1}{2a} (a-t)(a+t)p$

$\Gamma$   $P = \{ \text{positiv. Polynome in } |t| \leq a \}$   $Q = \{ \text{endl. Summe von Polynomen d. Form } q^2(t), (a \pm t)q^2 \text{ } q \text{ beliebig} \}$   
 $P \subset Q$   $P \subseteq Q$  klar  $Q \subseteq P$  induktiv  $P_n = P / \text{grad} \leq n$   $Q_n = Q / \text{grad} \leq n$   
 zeigen  $P_n \subseteq Q_n$   $n-1 \rightsquigarrow n$  1. Fall  $\exists t_0 \in (-a, a)$   $p(t_0) = 0 \Rightarrow p(t) = (t-t_0)^2 p_2(t)$  wegen doppelte Null und  $\times$   
 2. Fall  $\exists t_0 \in \{-a, a\}$   $\Rightarrow p(t) = (a \pm t) p_1(t)$   $S \cap n-2$   
 3. Fall keine Null.  $p_{\min} > 0$   $\tilde{p} = p - p_{\min}$  hat Null in  $[-a, a]$   $\tilde{p} \in Q_n$   $p = \tilde{p} + p_{\min} \in Q_n$

$P[M, M]$  Polynome auf  $[m, M]$

$C[M, M]$

$C_1[M, M] = \{f: [m, M] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [m, M] \text{ mit } |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \epsilon\}$

$C_2[M, M] = \{h = f \cdot g \mid f, g \in C_1[M, M]\}$  ist eine reelle Algebra

$C_3[M, M] = \{h = f + ig \mid f, g \in C_1[M, M]\}$

$e_\mu(A) := \begin{cases} 0 & \mu \leq \lambda \\ 1 & \mu > \lambda \end{cases}$  ist in  $C_1$

$E_\mu := e_\mu(A) = \phi(e_\mu)$

$f \in C_1 \quad \lambda \leq \mu \implies f(\lambda) \leq f(\mu)$

$f, g, h \in C_1 \quad f(\lambda) \leq g(\lambda) \implies f(A) \leq g(A)$

$\alpha \geq 0 \quad \alpha f(A) = (\alpha f)(A)$

$f+g \in C_1 \implies f(A) + g(A) = (f+g)(A)$

$f \cdot g \in C_1 \implies f(A) \cdot g(A) = (f \cdot g)(A)$

$\phi: C_3[M, M] \rightarrow S(H)$

$\phi(f) = f(A)$  ist ein

Algebraisomorphismus

$\{E_\mu\}$  ist eine Spektralschar des Operators  $A$

- d.h.  $E_\mu \in S(H)$

$E_\mu^2 = E_\mu$

$E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda$

$E_{\lambda+\epsilon} \rightarrow E_\lambda \quad \epsilon > 0$

$E_\mu = 0 \quad \mu < m \quad E_\mu = I \quad \mu > M$

allg.

$\{E_\lambda\}$  Spektralschar, wenn

1)  $E_\lambda = E_\lambda^* = E_\lambda^2$

2)  $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda$

3)  $E_{\lambda+0} = E_\lambda$

4)  $E_{-\infty} = 0 \quad E_{+\infty} = I$

$A \in S(H) \quad \sigma(A) \subseteq [m, M]$

$Z_n = (\mu_i)_{i=0}^n$  Zerlegung d. Intervalls  $[m, M]$

$\delta(Z_n) = \max_{i=0, \dots, n-1} |\mu_i - \mu_{i+1}|$  Feinheit der Zerlegung

$\lambda_k \in (\mu_k, \mu_{k+1})$

$\{E_\lambda\}$  Spektralschar des Operators  $A$

$\exists B \in S(S(H)) \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \|\epsilon - \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) (E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}})\| < \epsilon \quad \forall$  Zerleg  $Z_n$  d. Feinheit  $\delta$

$\iff$  dann existiert das Stieltjes Integral  $\int_m^M f(A) dE_\lambda$  und ist gleich  $B$

$A \in S(H)$   
 $\iff \exists \{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$   
 $A = \int_m^M \lambda dE_\lambda$   
 $\forall f \in C[M, M] \quad f(A) = \int_m^M f(\lambda) dE_\lambda$

$\Gamma \quad \max_{j=1, \dots, n} (\mu_j - \mu_{j-1}) \leq \eta$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall \lambda_j \in (\mu_{j-1}, \mu_j) \quad \|\epsilon - \sum_{j=1}^n \lambda_j (E_{\mu_j} - E_{\mu_{j-1}})\| < \epsilon$

$\sum_{j=1}^n \mu_{j-1} (E_{\mu_j} - E_{\mu_{j-1}}) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j (E_{\mu_j} - E_{\mu_{j-1}}) \leq \sum_{j=1}^n \mu_j (E_{\mu_j} - E_{\mu_{j-1}})$

$R \subseteq S \subseteq T$

$0 \in S - R \subseteq T - R$

$0 \in ((S-R) \times, \times) \subseteq ((T-R) \times, \times)$

$\|A - R\|, \|S - R\| \leq \|T - R\| \leq \sum_{j=1}^n \mu_j - \mu_{j-1} (\mu_j - \mu_{j-1}) / |\lambda_j| \leq n \cdot |\lambda_j|^2 = \eta$

deut. Spektralschar  $\{E_\lambda\}$

Konstruktion im schwachen Sinne und dann identifizieren

$f \in C[M, M]$

$\varphi(t) = (f(A)x, y) = (\phi_f x, y)$

$|\varphi(t)| \leq \|f\| \|A\| \|x\| \|y\| \leq \max_{\lambda \in [m, M]} |f(\lambda)| \|x\| \|y\|$

$\implies \varphi$  ist beschr. lin. Funktional auf  $C[M, M]$   
 $|\varphi| \leq \|x\| \|y\|$

Riesz  $\varphi(t) = \int_m^M f(t) d\mathcal{P}(t)$

$\mathcal{P} \in BV$   
 $\mathcal{P}(0) = 0 \quad t \leq m$   
 $\mathcal{P}(t+0) = \mathcal{P}(t)$

$\mathcal{P}(t, x, y)$  ist bilinear in  $x, y$   
 beschränkte Bilinearform

d.h.  $\mathcal{P}(t, x, y) = (E_t x, y)$

$\varphi(t) = (f(A)x, y) = \int_m^M f(t) d(E_t x, y)$

Konstruktion des Residuumsformel

Cauchy  $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-\lambda} dw$

$(\omega - A)^{-1} = \int \frac{1}{\omega - \lambda} dE_\lambda = R_\omega$

$f$  analytisch

$\implies f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \cdot R_\omega dw$

Residuumsformel

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (R_{\lambda+i\epsilon} - R_{\lambda-i\epsilon}) d\lambda = \frac{1}{\epsilon} (E_{\lambda_0} + E_{\lambda_0-0}) - \frac{1}{\epsilon} (E_{\lambda_0} + E_{\lambda_0+0})$

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_b^a \left( \frac{1}{\lambda + is - t} - \frac{1}{\lambda - is - t} \right) d\lambda \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda \in (a, b) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} ((R_{\lambda+is} - R_{\lambda-is}) \times \gamma) dy = \int_{m^0} g(z) d\mu(z)$$

Punkteigenwert

$$\lambda_0 \in \sigma(A) \text{ Punkteigenwert} \iff \exists x \neq 0 \quad Ax = \lambda_0 x$$

$$\iff E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0-0} \text{ und } \omega(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0}) \text{ Eigenraum}$$

$$\Gamma \text{ " } \varphi \in \omega(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0}) \quad E_{\lambda_0} \varphi = 0 \quad \lambda < \lambda_0$$

$$E_{\lambda_0} \varphi = \varphi \quad \lambda > \lambda_0$$

$$Ax = \int \lambda dE_{\lambda} \varphi = \lambda_0 (E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0-0}) \varphi = \lambda_0 \varphi$$

$$\iff \lambda \varphi = \lambda_0 \varphi \quad \varphi \neq 0$$

$$(A - \lambda_0) \varphi = 0 \implies (A - \lambda_0)^2 \varphi = 0$$

$$\int (\lambda - \lambda_0)^2 d(E_{\lambda} \varphi, \varphi) = 0$$

monot. zerfallen.

$$\rightarrow (E_{\lambda_0} \varphi, \varphi) = 0 \quad \lambda < \lambda_0$$

$$(E_{\lambda_0} \varphi, \varphi) = 0 \quad \lambda > \lambda_0 \quad ]$$

$$\lambda_0 \in \sigma(A) \iff \inf_{|\lambda|=1} |(A - \lambda_0)x| = 0$$

$$\Gamma \text{ " } \implies 1) \ker(A - \lambda_0) \neq 0 \quad \text{nicht injektiv}$$

$$2) \omega(A - \lambda_0) \text{ nicht trivial} \quad \omega^+(A - \lambda_0) = \ker(A - \lambda_0)^* = \ker(A - \lambda_0) \neq 0$$

$$3) (A - \lambda_0)^{-1} = P/\lambda \text{ nicht beschränkt}$$

d.h.  $|R_{\lambda_0} \gamma_n| \rightarrow 0 \quad |\gamma_n| = 1$

$$(A - \lambda_0)x_n = \gamma_n \quad x_n = \frac{\gamma_n}{|\lambda_n|}$$

$$(A - \lambda_0)x_n = \frac{\gamma_n}{|\lambda_n|} \rightarrow 0$$

$$\implies \inf_{|\lambda|=1} |(A - \lambda_0)x| = 0$$

" "

$$\lambda_0 \notin \sigma(A) \implies (A - \lambda_0)^{-1} \text{ beschr.}$$

$$(A - \lambda_0)x = y \quad |\lambda| \geq \|R_{\lambda_0}\|^{-1} \|y\|$$

$$|\lambda| \leq \|R_{\lambda_0}\| \|y\|$$

$$\implies \inf_{|\lambda|=1} |(A - \lambda_0)x| > \|R_{\lambda_0}\|^{-1} \|y\| > 0 \quad \subseteq ]$$

$$B \in \mathcal{L}(H) \quad AB = BA$$

$$\implies f(AB) = Bf(A)$$

$$f \in \mathcal{C}(m, M)$$

$$\implies \|f(A)\| = \max_{f \in \sigma(A)} |f(z)|$$

Polarzerlegung eines Operators

$$A, A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$$

$$\implies \exists! P^* = P \geq 0 \quad U \text{ unitär}$$

$$A = U \cdot P$$

$$\Gamma \text{ Eindeutigkeit: } A^* = P_1 U^*$$

$$A^* A = P_1 U^* U P_1 = P_1^2 \geq 0$$

$$= P_2^2 \geq 0$$

$P_1^2 = P_2^2$  s.a. so können eindeutig umgekehrt  $\implies P_1 = P_2$  (1)

(1) Wurzel ziehen

$$A^* = A \in \mathcal{L}(H) \quad A \geq 0$$

$$\implies \exists! Q \in \mathcal{L}(H)$$

$$Q^* = Q \quad Q^2 = A$$

und

$$x \cdot A = A \cdot x \implies x \cdot Q = Q \cdot x$$

Existenz

P definiert durch

$$P^2 = A^* A \text{ s.a. posit.}$$

P ist invertierbar  $\implies$  klar mit Spektralsatz ]

$$AP^* \text{ unitär} \quad AP^*(AP^*)^* = AP^* P^* A^* = A(A^*)^* A^* = I$$

$$V \text{ Isometrie} \iff V^* V = I$$

$$\omega(V) = H \implies V^* = V^{-1}$$

$$\Gamma \rightarrow (Vx, Vy) = (x, y) \implies V^* V = I$$

$$\Gamma \quad \forall x \exists y \quad Vy = x$$

$$(x, Vx') = (Vy, y')$$

$$\Gamma \text{ aus Spektralsatz}$$

$$! \quad Q^2 - A = Q_1^2$$

$$Q_1 A = Q_1^2 = A Q_1$$

$$(Q_1 - Q) Q (Q_1 - Q) + (Q_1 - Q) Q_1 (Q_1 - Q)$$

$$= (Q_1^2 - Q^2) (Q_1 - Q) = 0$$

$$\implies (Q_1 - Q)^2 = 0 \implies Q_1 = Q$$

$$\text{unitär} \iff \text{surj. Isometrie}$$

A normal	$A^* A = A A^*$
A unitär	$A^* A = A A^* = I$
A Isometrie	$A^* A = I$
A selbstadj.	$A = A^*$

Spektralsatz ist für alle normalen Operatoren definierbar

Spektralsatz für unitäre Operatoren

$$U \in \mathcal{L}(H) \text{ unitär}$$

$$\implies \exists! \int_{\sigma(U)} f(\lambda) dE_{\lambda} \quad f_{\sigma(U)} = f \circ U$$

$$U = \int e^{i\theta} dE_{\theta}$$

$$\sigma(U) \subseteq \{|\lambda|=1\}$$

Stone

U strongly setig  $\implies$  existiert unitäre Gruppe

$$\implies \exists \text{ s.a. Operator } A$$

$$U(t) = e^{itA}$$

Spektralsatz für s.a. unkehrt. Operatoren

$$A: D(A) \rightarrow H \text{ s.a. dicht def.}$$

$$\exists! \int_{\sigma(A)} f(\lambda) dE_{\lambda}$$

$$D(A) = \{x \in H \mid \int \lambda^2 d(E_{\lambda} x, x) < \infty\}$$

$$x \in D(A) \implies Ax = \int \lambda dE_{\lambda} x$$

Accep:  $U_A = \frac{A^* - A}{A - A^*}$  ist unitär

Cayley transformierte

orientierte n-Simplexe

$S_n$  orient. n-Simplex  $\Leftrightarrow S_n = (p_0, p_1, \dots, p_n)$  orientiert

$S_n = S_n'$   $(p_0, \dots, p_n) = \pi(p_0', \dots, p_n')$   $\pi \in \mathbb{Z}_2$

1 Simplex:  $+p - p$

0 Simplex:  $+A - A$

orient. n-Simplex ist orient. Fläche d. orient. (n+1)-Simplex  $S_{n+1}$   
 $(p_0, \dots, p_n)$

falls  $S_{n+1} = (p_{n+1}, p_0, \dots, p_n)$

$S_n \subset S_{n+1}$  falls  $S_n$  eine Fläche von  $S_{n+1}$  ist

n-G-Kette

G abelsche Gruppe k Komplex

(n, G) Kette von k oder n Kette von k mit Basis G

ist  $\varphi : k_n \rightarrow G$   $k_n$  Menge d. n-Simplexe von k

mit  $\varphi(-S_n) = -\varphi(S_n)$

nenne (n, G) Kette addieren

$C_n(k, G)$  Gruppe der (n, G) Ketten

$(n > \dim k) \Rightarrow C_n(k, G) = 0$

elementare Ketten

$S_n \in k$  Simplex  $g_0 \in G$  vorgegeben

$g_0 S_n^0 := n$ -Kette  $\varphi$  mit  $\varphi(S_n^0) = g_0$

$\varphi(-S_n^0) = -g_0$

$\varphi(S_n) = 0 \quad S_n \neq S_n^0$

Die Rand einer (n, G) Kette  $\varphi$

$\beta \varphi(S_{n-1}) = \sum_{S_n \supset S_{n-1}} \varphi(S_n)$

$\beta : C_n \rightarrow C_{n-1}$  Homomorphismus

$\beta \beta \varphi = 0$

Corand  $\gamma \varphi$  einer (n, G) Kette  $\varphi$

$\gamma \varphi(S_{n+1}) = \sum_{S_n \subset S_{n+1}} \varphi(S_n)$

$\gamma : C_{n+1} \rightarrow C_n$  Homomorphismus

$\gamma \gamma \varphi = 0$

Zyklus  
Cozyklus

$\varphi : (n, G)$  Kette heißt Zyklus falls  $\beta \varphi = 0$

Cozyklus falls  $\gamma \varphi = 0$

Randzyklus  $\varphi = \beta \varphi'$

Corandzyklus  $\varphi = \gamma \varphi'$

$Z_n(k, G)$  Gruppe d. Zyklen von k

$Z^n(k, G)$  Gruppe d. Cozyklen von k

$B_n(k, G)$  Gruppe d. Randzyklen von k

$B^n(k, G)$  Gruppe d. Corandzyklen von k

$H_n(k, G) := \frac{Z_n(k, G)}{B_n(k, G)}$

n-dimensionale Homologiegruppen

von k mit Basis G

mit Elementen: n-dimens. Homologieklassen

$H^n(k, G) := \frac{Z^n(k, G)}{B^n(k, G)}$

n-dimensionale Cohomologiegruppen

von k mit Basis G

$\varphi, \varphi'$  zwei n-Zyklen sind homolog  $\Leftrightarrow \exists (n, G)$  Kette  $\theta \quad \beta \theta = \varphi - \varphi'$

Dimensionen/Doctop:

Möglichkeiten eine Dimensionseigenschaft

Peinhardt 1942:  
 $X$  Raum  
 $X = X_1 \cup X_2$  durch Schnitt  $Y$   
 $Y = Y_1 \cup Y_2$  durch Schnitt  $Z$   
 $Z$  kann nicht mehr gefüllt werden  
 $\rightarrow$  Dimension 3

Lothar:  $Q$ -Quadrat =  $UQ$ ;  $\forall x \in Q \quad x \in Q$ ; nur für 3D

funktionaler Ansatz:  
 $\rightarrow$  Dimensionen  
 Brauer, Wang, Ungers

$f_i(x_i, n) = 0$  ist in  $n$  hat Lösung  $f_i$  stetig  
 $g_i(x_i, n) = 0$  hat Lösung für  $f_i, g_i$  stetig nicht

$\dim =$  max  $n$  mit dieser Eigenschaft.

Homotopieansatz

Homotopiedimension eines kompak. met. Raumes  
 größter  $n$  für den ein nichtleerer Rand  $(n-1)$ -Sphäre existiert.

Triangulierung in  $n$  Kugeln

$C \subseteq X$  abgetrennt mit Umkleidekabine von nichtversch. (n-1) Kugeln kann Feld auf ganz  $X$  ausgedehnt werden.

Hausdorffdimension

$\dim(X) = \sup \{p \in \mathbb{N} \mid X \text{ hat positives } p\text{-dimension. Hausdorffma\ss} \}$   
 in jeder Metrik

Hausdorff

$$p \in [0, \infty) \quad \varepsilon > 0 \quad X \text{ separable met. Raum}$$

$$m_p^\varepsilon := \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } A_i)^p \quad X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{diam } A_i < \varepsilon$$

$$m_p := \sup_{\varepsilon > 0} m_p^\varepsilon(X)$$

$$\dim_H(X) := \sup_{p \in \mathbb{N}} m_p(X) > 0 \quad \text{Hausdorffdimension}$$

n Komplex:

$V$  endlich, Menge (Kantenmenge)  
 $S_p \subseteq V \quad |S_p| = p+1 \quad p$  Simplex

$k$  Fläche: von  $S_p$ :  $k$  Simplex mit Kanten aus  $S_p$

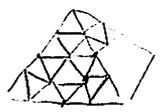
$n$  Komplex =  $\{S_p\}_{i \in I}^n$  mit  $f$  Kanten von  $S_p$ :  $\Rightarrow f \in n$ -Komplex  
 $n$  Komplex enthält mind. 1  $n$  Simplex.

Bsp 1 für 3 Komplex



- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $S_3^{(1)} = \{1, 2, 3, 4\}$  3 Simplex
  - $S_2^{(1)} = \{1, 2, 3\}$
  - $S_2^{(2)} = \{1, 2, 4\}$
  - $S_2^{(3)} = \{1, 3, 4\}$
  - $S_2^{(4)} = \{2, 3, 4\}$
- } 2 Simplexe

Bsp 2 für 3 Komplex



- $S_1^{(1)} = \{1, 2\}$
  - $S_1^{(2)} = \{1, 3\}$
  - $S_1^{(3)} = \{1, 4\}$
  - $S_1^{(4)} = \{2, 3\}$
  - $S_1^{(5)} = \{2, 4\}$
  - $S_1^{(6)} = \{3, 4\}$
- } 1 Simplexe
- $S_0^{(1)} = \{1\}$
  - $S_0^{(2)} = \{2\}$
  - $S_0^{(3)} = \{3\}$
  - $S_0^{(4)} = \{4\}$
- } 0 Simplexe

n Polytop:

Kontinuierliche Realisierungen eines  $n$  Komplexes im  $E^n$  wobei  $p$  Simplex  $p$  Zelle genannt wird

Nerv  
 (Alexanderoff)

$X$  Menge mit Überdeckung  $U = \{U_i\}$   $p_i \in U_i \quad V := \{p_i\}$   
 $N(d)$  Nerv der Überdeckung  $d = (p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$  ist  $k$ -Komplex  $\iff \bigcap_{i=1}^k U_{i_j} \neq \emptyset$   
 $P(d)$  geometrische Realisierung von  $N(d)$

tiefer Standardbau zwischen Topologie und kombinatorik

Gruppenaktion:  $G$  lokal kompakt lokal. Gruppe mit Haarmass  $\mu$

$L^1(G)$  ist kommutat. Banachalgebra

$G \rightarrow L^p(G)$   
 $x \mapsto f_x$  ist glm. stetig

$f, g \in C_0(G)$   $\text{supp}(g) = K$  symm. um 0  
 $\|g - f\|_p < \frac{\epsilon}{2}$   
 $g$  glm. stetig  $\Rightarrow \exists U(0) \quad |g(tx) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2}$   
 $\|g_x - g\|_p^p = \int |g(tx) - g(t)|^p dt \leq \int \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \frac{1}{\mu(K)} dt = \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$   
 $\|g_x - g\|_p \leq \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \|g_x - g\| \leq \frac{\epsilon}{2}$  (inv. d. Haarses  
 $\|f_x - f_y\| \leq \|f_x - g_x\| + \|g_x - g_y\| + \|g_y - f_y\| \leq \epsilon$

$f, g \in L^1(G) \Rightarrow f * g \in L^1(G)$  da  $f * g \leq \|f\| \|g\|$   
 $f \in L^1, g \in L^\infty \Rightarrow f * g \in C$  beschränkt und glm. stetig  
 $\|f * g\| \leq \|f\| \|g\|_\infty$   
 $\|f * g(x) - f * g(y)\| \leq \|g\| \|f\| \|x - y\| \leq \epsilon \|g\|$  falls  $x - y \in U(0)$

Approxim. d. Einheits

$\exists \epsilon_r: G \rightarrow [0, \infty]$   
 $\int \epsilon_r dx = 1 \quad \text{supp}(\epsilon_r) \subseteq V_r$   
 $V_r$  Umgebung basis von 0  
 $\lim_{r \rightarrow \infty} \int f \epsilon_r = \int f$   $\forall f \in L^1$

$\int f * \epsilon_r(x) - f(x) = \int (f(x-y) - f(x)) \epsilon_r(y) dy$   
 $\|f * \epsilon_r(x) - f(x)\|_p \leq \|f - f\|_p \leq \epsilon$

wie sehen die Elemente im Strukturraum aus?  
 $\mathcal{L} M$   $M$  Strukturraum von  $L^1(G)$   
 $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(L^1(G))^* \quad \exists! \varphi \in L^1(G) \quad \mathcal{L}(f) = \int f(x) \varphi(x) dx$

$\mathcal{L}(h) \varphi(y) = \mathcal{L}(h\varphi)$  für alle  $y \in G$

da  $\int (\mathcal{L}(h) \varphi(y) - \mathcal{L}(h\varphi)) f(y) = 0$

weil  $\int f(y) \mathcal{L}(h\varphi) = \int f(y) \int h(x-y) \varphi(x) dx dy = \int \int h(x-y) f(y) dy \varphi(x) dx = \int h(x) \int f(y) \varphi(x-y) dy = \mathcal{L}(h) \cdot \int f(x) \varphi(x) dx = \mathcal{L}(h) \cdot \mathcal{L}(f)$

da  $\mathcal{L}(h\varphi)$  stetig ist ist  $\varphi$  stetig fast überall d.B.d.B.  $\varphi$  stetig  
 $\mathcal{L}(h) \varphi(x+y) = \mathcal{L}(h\varphi) = \mathcal{L}(h(x) \varphi(y)) = \mathcal{L}(h) \varphi(x) \varphi(y)$  also  $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$   
 $\varphi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$  also  $\|\varphi\| = 1$

Def  $\hat{G}$  Charaktere zu  $G$  stetige Homomorphie  $G \rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{C}^*$   
 duale Gruppe zu  $G$

Wann also  $\hat{G} = M$

sehr  $\mathcal{L}_g(f) := \int f(x) \langle g, \cdot \rangle dx$  für  $g \in \hat{G}$   
 $= \int f(x) \overline{g(x)} dx$

$\langle \mathcal{L}_g, x \rangle = \mathcal{L}_g(x) \quad \mathcal{L}_g \in \hat{G}$

Def  $f: \hat{G} \rightarrow \mathbb{C} \quad \lambda: \lambda \mapsto f$   
 $\mathcal{L} \rightarrow \int f(x) \langle \lambda, \cdot \rangle dx$  Fourierkapo

exakt:  $\lambda: L^1(G) \rightarrow C_0(\hat{G})$  ist stetig  
 $\|f\|_1 \leq \|f\|_1$   
 $L^1(G)$  dicht in  $C_0(\hat{G})$   $\lambda: A$  nicht surjektiv ugi. gleichg.

$\hat{L}^1(G)$  ist Unteralgebra von  $(C_0(\hat{G}))$   
 die die Punkte Haars  
 $\widehat{f(1-x)} = \widehat{f}$  also  $f \in L^1(G) \Rightarrow \widehat{f} \in L^1(\hat{G})$   
 Stone Weierstraß  $\widehat{L}^1(G)$  dicht

$\hat{G}$  ist lokal kompakte abelsche Gruppe  
 $\hat{G}$  lokal kompakt  
 zeigen  $\hat{G}$  ist topolog. Gruppe

$L: \langle x, y \rangle \rightarrow \langle \lambda, \lambda \rangle$  ist stetig  
 $\mathcal{L} \circ \lambda \in \text{int} \quad \mathcal{L} \circ \lambda \in \text{int}$   
 dann  $\mathcal{L}(\lambda) \rightarrow \mathcal{L}(x)$  glm. alle  $x \in G$

$G$  kompakt  $\Rightarrow \hat{G}$  distret  
 $G$  distret  $\Rightarrow \hat{G}$  kompakt

$\hat{G}$  distret  $\Rightarrow L^1(G)$  hat Identität  
 $\Rightarrow M = \hat{G}$  kompakt  
 $G$  kompakt  $\Rightarrow \hat{G} \subseteq L^1(G)$  für  $m(0) = 1$   
 dann  $\int \widehat{f(x)} dx = \int |f(x)| dx = 1$

falls  $\mathcal{L} \in \hat{G} \quad \mathcal{L} \neq 1 \Rightarrow \mathcal{L}(1) \neq 1$   
 $\int \mathcal{L}(x) dx = \int \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(x_0) dx = \mathcal{L}(x_0) \int \mathcal{L}(x) dx$   
 $\Rightarrow \int \mathcal{L}(x) dx = 0$  falls  $\mathcal{L} \neq 1$   
 falls  $\mathcal{L} = 1 \quad \int \mathcal{L} dx = 1 \quad f = 1 \in L^1(G) \Rightarrow \widehat{f} \in L^1(\hat{G})$   
 $f(0) = \int \mathcal{L}(x) dx = \chi_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}) \quad \widehat{f}$  stetig  $\Rightarrow$   $\widehat{f}$  offn  
 $\Rightarrow \widehat{f}$  offn  $\forall \mathcal{L} \in \hat{G} \Rightarrow \hat{G}$  distret

Bem  $\lambda: f \rightarrow \widehat{f}$  Schwartzraum  
 id. bijektiv, Normomorphismus  
 auf Topologie durch  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$   
 offen und stetig.  
 bezüglich  $L^2$  Norm ist  $\lambda$  eine  
 isometrie, die sich auf  $L^2$   
 zu einem unitären Operator  
 erweitern lässt. (Planchereltheorem)

$A$  unbeschr. Operator auf  $L^2 \quad Mf = i \frac{d}{dx}$   
 $M$  unbeschr. Operator auf  $L^2 \quad Mf = xf$   
 $\mathcal{L}^{-1} A \mathcal{L} = M \quad \mathcal{L} \text{ dom } M = \text{dom } A$



Approximation von  $f \in A(G)$  durch rationale Funktionen

$K \subseteq \mathbb{C}$  festes kompaktes  $K \neq \emptyset$   
 $\bar{K} = \mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^n D_j$   $D_j$  unversch. Komponente  
 in jeder Komponente von  $D_j$  wird Punkt  $z_j$  fest gewählt.  
 $R := \{ \text{rationale Fkt. mit Polen höchstens in } z_j \in \bar{K} \}$   
 $\exists g \in R \quad |f(z) - g(z)| < \epsilon \quad \forall z \in K \quad \forall \epsilon > 0$

$\exists$  nullhomotope Zyklus  $\gamma$  nullhomotop mit  $N(\gamma, \epsilon) = \emptyset \quad \forall \epsilon > 0$   
 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda \quad \frac{1}{z-\lambda} = h(\lambda, z) \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\tilde{h}: D \rightarrow X \quad \lambda \mapsto \tilde{h}(\lambda) = h(\lambda, z) \quad \tilde{h} \in A(D, X) \quad f(z) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(\lambda) d\mu(\lambda)$   
 $\exists \psi \in A(D, X) \quad \psi = \psi \circ \tilde{h} \in A(D)$   
 $\psi = \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(\lambda) d\mu(\lambda)$

Keine Komponente  $D_j \ni D_j(z_j) \subseteq D_j \quad \lambda \in D_j(z_j)$

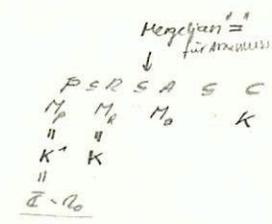
$\Rightarrow \tilde{h}(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \quad g_n \in R$   
 $\epsilon(\tilde{h}(\lambda)) = 0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \text{ in } D_j(z_j)$   
 $\Rightarrow \epsilon = 0 \text{ in } D_j \Rightarrow \epsilon = 0 \text{ in } D$



erhalten  $n \in \mathbb{C}$

$P(K) = \{ \text{Polynome auf } K \}$   
 $R(K) = \{ \text{rationalen Fkt. auf } K \text{ mit Polen in } \bar{K} \}$   
 $A(K) = \{ f \in C(K) \text{ analytisch} \}$

2)  $M_p = \bar{K} - P_0 = K \cup \bigcup_{j=1}^n D_j$   
 1)  $M_0 = K$



$K^*$  polynomiale Nullstellen

$\bar{K} - \{z_j\} / \|p\| \leq \|p\|_K$   
 $K \in \bar{K}$  wegen Maximumprinzip

1)  $\mathbb{A}: K \rightarrow \mathbb{C} \quad \epsilon \in R(K)$   
 $\mathbb{A}: M_0 \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \int \epsilon(z)$  (ist injektiv:  $\mathbb{A}(z_1) = \mathbb{A}(z_2) \Rightarrow \int \epsilon(z_1) = \int \epsilon(z_2) \Rightarrow \epsilon(z_1) = \epsilon(z_2) \quad \forall z \in R(K) \Rightarrow z_1 = z_2$ )  
 $\mathbb{A}(M_0) = \text{span } \mathbb{A} = K$   
 $p$  Polynom  $\beta(z) = p(\mathbb{A}(z)) = p(\epsilon)$  d.h.  $\mathbb{A} \circ p = p \circ \mathbb{A} \quad \forall \epsilon \in R$

2)  $\pi: P(K^*) \rightarrow P(K) \quad f \mapsto f|_K$  ist isomorph.  
 $\|p\|_{K^*} = \|p\|_K$  Maximumprinzip  
 $\|f\|_{K^*} = \|f\|_K \quad f \in P(K^*)$   
 d.h.  $\pi$  injektiv und isomorph

$P(K^*)$  wird von  $\mathbb{A} = \mathbb{A}|_K$  erzeugt  
 d.h.  $M_{P(K^*)} = \sigma(\mathbb{A})$   
 $\sigma(\mathbb{A}) = \bar{K}$  da  $\lambda \in \bar{K} \Rightarrow \lambda \in P_0 \Rightarrow \frac{1}{z-\lambda}$  analyt.  $\Rightarrow \frac{1}{z-\lambda} \in P(K^*) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(\mathbb{A})$  d.h.  $\sigma(\mathbb{A}) = \bar{K}$   
 $\lambda \in \bar{K} \Rightarrow \lambda \in \text{spec } \mathbb{A}$  klar  
 $f \in P(K) \quad f = \pi^{-1}(f)$  ist die Fortsetzung von  $f$  in die Löcher von  $K$  hinein.

Satz von Weierstrass

Stetigkeit  
 Rung'sche  
 zush.

$K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt  $\bar{K} = K$  zush.  
 $f \in C(K) \quad f \neq 0$  analytisch  
 Beh.  $\exists$  Folge von Polynomen  $p_n$  mit  $\lim p_n(z) = f(z)$  glm auf  $K$

für Runge:  $f \in A(G) \quad G \supseteq K$   
 $f(K)$  drht in  $C(K)$

d.h.  $A(K) = P(K)$  und damit  $M_A = K$

$A(\bar{D}) = P(\bar{D})$

$\Gamma \quad p(\bar{D}) \subseteq A(\bar{D})$  klar  
 $f \in A$  fest beh.  $\exists p_n \quad p_n \rightarrow f$  glm auf  $\bar{D}$  folgt aus Runge  
 $f \in A(\bar{D})$  heißt Fourierreiheentwicklung  $f(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$   
 $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta$

$A_D = \{ f \in C(D) \mid f \in A(\bar{D}) \} \subseteq C(\bar{D})$   
 ist maximale Unteralgebra von  $C(\bar{D})$

$\Gamma \quad B \supseteq A_D$  zeigen  $z^k \in B$

gilt  $A, B, C$  kommutativ.  $AA$  mit  $\epsilon$   
 $A \subseteq B \subseteq C$   
 $M_A = M_C \Rightarrow M_B = M_A = M_C$   
 1)  $K_1 \subseteq K_2$  kompakt  
 $C(K_1) \subseteq C(K_2)$  aufnatürl.weise  
 und  $M_{K_1} = K_1 \subseteq K_2 = M_{K_2}$   
 2)  $P(K) \subseteq R(K)$   
 $M_P = K^* \supseteq K = M_R$   
 3, 2)  $A$  Aussagen d. Form  
 $A \subseteq B \Rightarrow M_A = M_B$   
 schwierig

Bsp von Banachalgebren (Pitkin)

- 3 Hauptklassen: I Operatoralgebren  
 II Funktionalalgebren  
 III Gruppenalgebren

Operatoralgebren

$X \text{ BR}$	$B(X)$	Banachalgebra halbeinfach da schon operatorial von endl. Rang irreduzibel operieren
$H \text{ R}$	$B(H)$	Banachalgebra mit Involution
$X \text{ BR}$	$K(X)$	Banachalgebra d. kompakten Operatoren auf $X$
	$B(H)/K(H)$	Kalkül algebra ist $C^*$ Algebra
	$B(H)$	$C^*$ Algebra
	$S(H)$	Hilbertschnittklasse $\ x\ _{HS} = (\sum  A_{ij} ^2)^{1/2}$ Spurklasse $\ x\ _{sp} = \sum_{\lambda}  A_{ii} $

Funktionalalgebren

- $C(K)$   $K$  Hausdorff, kompakt oder lokal kompakt  
 $L^p$  Algebren  
 $L^1$  Algebren (mit absolut konv. Fourierreihen)  
 $A(D)$  Holomorphe Funktionen auf  $D$  (mit natü. Variablen)  
 diskrete Algebren mit unendl. Multiplikation

Gruppenalgebren

- $G$  topolog. Gruppe  
 $L^1(G)$  Gruppenalgebra ( $L^1(G)$  i.d. nicht abstr. top. Konvolution)  
 $G$  lokal komp. abstr. Gruppe speziell  $\hat{G}$  Dualgruppe  
 $M(G)$  Algebra der komplexen messb. reziprenen Borel Masse  $L^1(G) = M(G) \iff$  falls  $G$  diskret

C\*-Algebren  
B\*-Algebren

x Algebra X	$(xy)^* = x^*y^*$ $(x+y)^* = x^*+y^*$ $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$ $x^{**} = x$
B*-Algebra X	$\ x\ ^2 \in \mathbb{R} \quad \ x^*x\ $
C*-Algebra	$x \in B(H)$ abgeschlossene Unteralgebra

jede B\*-Algebra  $\cong$  C\*-Algebra  
isometrisch & isomorph

Eigenschaften in C\*-Algebren

x ist stetig  
 $a^* = e$   
 $\|x\| = \sup \{ \|x\alpha\| \mid x\alpha \neq 0, \|\alpha\|=1 \}$

da  $\|x^*\| = \|x\|$   
da  $y^* = e y_j^* = e^* y^* \Rightarrow e^* = e$   
Operatorkonorm stimmt mit Norm überein

$\|x\alpha\| \leq \|x\| \cdot \|\alpha\| = \|\alpha\|$   
d.h.  $\|x\alpha\| \leq \|\alpha\|$   
andere Seite:  $\|x\alpha^*\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|^2$   
 $\frac{\|x\alpha^*\|}{\|\alpha\|} = \|x\|$   
d.h.  $\|x\alpha\| \geq \|\alpha\|$

$(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$  da  $(a \cdot a^{-1})^* = e^* = e$   
 $\Rightarrow (a \cdot a^{-1})^* = e^* = e$   
 $a^* \cdot (a^{-1})^* = e$   
 $\Rightarrow (a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$

$a = x+iy$  mit  $x, y$  hermitisch

setze  $x = \frac{a+a^*}{2}$   $y = \frac{a-a^*}{2i}$   
 $x+iy = a$   $x^*-x = y^*-y$

u ist unitär  $\Rightarrow \|u\|=1$

$U$  unitär  $\Rightarrow u u^* = e$   
 $\Rightarrow \|u\|=1$

$\rho: A \rightarrow B$   $x$ -homomorphismus  
 $\Rightarrow \|\rho(a)\| \leq \|a\|$

$\rho$  genügt für  $a = a^*$   
für  $a = a^*$  gilt  $\|\rho(a)\| = \|a\|$   $\rho(a^*) = \rho(a)$   
 $\|\rho(a^*)\| = \|\rho(a)\| = \|a\|$   
 $\Rightarrow \|\rho(a^*)\| = \|a\|$

u.d.A.  $A, B$  mit Einsel gilt  $\sigma(\rho(x)) \subseteq \sigma(x)$   
also  $\rho(\rho(x)) \subseteq \rho(x)$

$\|\rho(a)\|^2 = \|\rho(a^*a)\| = \rho(\rho(a^*a)) \leq \rho(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$

x B\*-Algebra  
 $\tilde{x} = x + e$  mit  $(\alpha + \lambda)^* = \alpha^* + \bar{\lambda}$   
ist B\*-Erweiterung, vollständig

$\|\alpha + \lambda\| := \sup \{ \|\alpha x + \lambda x\| \mid x \in X, \|x\|=1 \}$   
 $\in (0,1)$  vorgegeben  $\exists \lambda \in \mathbb{R} \|\alpha + \lambda\| = 1$   $\|\alpha + \lambda x\| \geq \epsilon \|\alpha + \lambda\|$   
 $\epsilon^2 \|\alpha + \lambda\|^2 \leq \|\alpha x + \lambda x\|^2 \leq \|\alpha x + \lambda x\|^2 = \|\alpha^*(\alpha + \lambda) + \lambda(\alpha + \lambda)\|^2$   
 $= \|\alpha^* + \bar{\lambda}\| \|\alpha + \lambda\|^2 \leq \|\alpha^* + \bar{\lambda}\| \|\alpha + \lambda\|^2$   
 $\epsilon$  beliebig nahe bei 1  
 $\Rightarrow \|\alpha + \lambda\|^2 = \|\alpha^* + \bar{\lambda}\| \|\alpha + \lambda\|^2$

x kommut B\*-Algebra  
1)  $a^*x = x a^* \Rightarrow \hat{a}$  reell  
2)  $\hat{a} = \hat{a}^*$

$\rho \in M$   $\hat{\rho}(\rho) = \alpha + i\beta$   
 $\tilde{x} = x + a$   $\tilde{x}(\alpha + \lambda) = \tilde{x}(\alpha) + \lambda$   $y = \alpha + \lambda i$   
 $\|\tilde{x}(\rho)\|^2 = \|\tilde{x}(y)\|^2 = \|\tilde{x}(\alpha) + \lambda i\|^2$   
 $\|\tilde{x}(\rho)\|^2 \leq \|y\|^2 \leq \|y\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\lambda\|^2 \leq \|\alpha\|^2 + \|\lambda\|^2$   
falls  $\tilde{x}(\rho) = \alpha + i\beta + i\lambda = \alpha + i(\beta + \lambda)$   
 $\|\tilde{x}(\rho)\|^2 = \alpha^2 + (\beta + \lambda)^2$   $\alpha^2 + \beta^2 + 2\lambda\beta \leq \|\alpha\|^2$   
 $2\lambda\beta \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow \beta = 0$

Ausdehnung des Riesz'schen Funktionalkalküls

1) x kommut. B\*-Algebra mit e und Strukturraum M  
 $\Rightarrow X \cong C(M)$  x isom. isometrisch  
2) x kommut. B\*-Algebra ohne e und Strukturraum L  
 $\Rightarrow X \cong C_0(L)$  x isom. isometrisch

Gelfand Naimark  
Darstellung der kommut. \* Algebren

1)  $\hat{x}$  klar da  $\hat{\hat{x}} = \hat{x}$   
 $\hat{x}$  isometrisch klar da  $\|\hat{x}\|_{\text{op}} = \|x\|$   
 $\hat{x}$  unitalgebra von  $C(M)$  die Punkte Hermit  
Skalarwertes:  $\hat{x}$  dicht in  $C(M)$   
da vollst.  $\mathbb{R} = C(M)$

2)  $\tilde{x} = x \oplus e$   $\tilde{M} = M \cup \{e\}$   
 $\rho \in M$   $\tilde{\rho}(\alpha + \lambda) = \tilde{\rho}(\alpha) + \lambda$   $\tilde{\rho}(\alpha + \lambda) = \lambda$   
 $\tilde{x} \cong C(\tilde{M})$   
d.h.  $\hat{x} = C_0(M)$  da  $\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \tilde{\rho}(\rho) = 0$

Funktionalkalkül

B C\*-Algebra mit 1  
a normales Element  
 $C^*(a) := \langle a, 1 \rangle$   
 $f \in C(\sigma(a))$   $f(a) := \rho(f)$   
 $f \mapsto f(a)$  heißt Funktionalkalkül für a  
 $C(\sigma(a)) \rightarrow B$

$\rho$  Gelfand  
 $C^*(a) \xrightarrow{\rho} C(\sigma)$   $\rho(a) \rightarrow \rho$   
 $\rho$  ist isom. Isomorphismus  
 $\rho$  ist eine Erweiterung des Riesz'schen Funkt.kalküls

Weyl'sche

y B\*-Algebra mit 1  
 $x \neq y$  kommut.  $a, x$  mit  $a^*x = x a^*$   
 $x^2, x^3, \dots$

$\exists \epsilon \in (0,1) \exists y$   $y$  gen. hermit  
 $C_\lambda := a^* a^\lambda + \lambda e$   $\lambda > 0 \Rightarrow \exists C_\lambda^{-1} \in Y$   
 $(a^* a)^\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0} C_\lambda^{-1}$   
 $\hat{C}_\lambda(\rho) = \rho(C_\lambda) = \rho(a^* a) + \lambda$   
 $= \rho(a^*) \rho(a) + \lambda = \|\rho(a)\|^2 + \lambda > 0$   
 $\Rightarrow \exists C_\lambda^{-1} \in X$   
 $(a^* a)^\lambda \in \bar{X}$   $a^{-1} = (a^* a)^{-1/2} a^* \in X$

Def (a)  
 $\alpha \in X$   $A$  Banachalgebra  
 $M(\alpha)$  Menge aller in einer Umgebung  $G$  von  $\alpha(\alpha)$  holomorphen Funktionen

Satz  
 $\gamma: M(\alpha) \rightarrow A$   
 $\varphi \mapsto \varphi(\alpha)$  ist ein algebra isomorphismus  
 kanon. normiert von  $\|\varphi(\alpha)\| = \sum_{k \in \mathbb{Z}^k}$  gröss. als  $r(\alpha)$   
 $\Rightarrow f \in M(\alpha) \quad \varphi(\alpha) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^k} c_k \alpha^k$   
 $\varphi_0 \rightarrow \varphi$  gleichmässig auf jedem komp. Teil.  
 $\Rightarrow \|\varphi_n(\alpha) - \varphi(\alpha)\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$

$\text{spec}(x) \subseteq G$   
 $\Gamma R(\lambda) := (x - \lambda)^{-1} \in A(G)$   
 $\in A(G)$   
 setzen  $e(\alpha) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \alpha} d\lambda$  wohldefiniert  
 es gilt  $\widehat{e(\alpha)} = e(\hat{\alpha})$   
 $\Gamma \widehat{\varphi(\alpha)}(\hat{\alpha}) = \widehat{\varphi(\alpha)}$   
 $= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \hat{\alpha}} d\lambda = \varphi(\hat{\alpha})$   
 $= \varphi(\hat{\alpha})$

Formale Integralgleichung  
 $u(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 k(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad f, k \in C([0,1])$   
 $u = f + \lambda (k * u)$  in Banachalgebra  $(C([0,1]), *, \|\cdot\|)$

Gleichung besitzt genau eine Lösung  $u_\lambda$ , die ganz analytisch ist. Zum Parameter  $\lambda$ :  
 $\Gamma \lambda \in \mathbb{C} \quad \exists (\lambda, k)^{-1} =: C_\lambda \in X$   
 Fixiert d. Lösung  $u_\lambda$ :  
 $C_\lambda * u = C_\lambda * (f + \lambda (k * u)) = C_\lambda * f + C_\lambda * \lambda (k * u) \lambda$   
 $= C_\lambda * f + (C_\lambda + \lambda k) * u$   
 $C_\lambda * f + \lambda k * u = 0$   
 $C_\lambda * f + u - f = 0 \Rightarrow u = f - C_\lambda * f$

(vgl. Beweis mit Fixpunktsatz:  
 $x(t) = g(t) + \lambda \int_0^1 k(t,s) x(s) ds$  für  $t \in S$   
 (Beweis allgemeinere als muss.)  
 haben mit Metrik  $d(x,y) = \max_{t \in S} |x(t) - y(t)|$  eine Kontraktion.)  
 $\lambda$  jedes  $\alpha \in X$  besitzt Lösungs.  
 da  $\|k\|_{\infty} \leftarrow \|f + \lambda k\|_{\infty} = \frac{\|f\|_{\infty}}{1 - \|\lambda k\|_{\infty}}$   
 $\hat{0}$  d.h.  $\lambda \in \text{rad}(X) \Rightarrow x = \text{rad}(x)$

Strukturtheorie

induzierten auf  $M \subseteq X^*$  die auf  $M$  relative schwache Topologie.  
 Schwache Topologie weaker als  $\hat{x}$  stetig macht.  
 ist die auf  $M$  induzierte Produkttopologie von  $\mathbb{C}^X$ .

$\widehat{M}$  ist komp. Hausdorffraum  $M$  ist lokal komp.  
 $M = \widehat{M}$  oder  $\widehat{M} = M \cup \{\tau_0\} \quad \tau_0(x) = 0$   
 $\uparrow$   
 $\text{mit } \partial \mathbb{C} \quad \text{mit } \partial \mathbb{C}$

$\Gamma \widehat{M}$  ist kompakt:  $\widehat{M} \subseteq \mathbb{C}^X$  kompakt  
 $\widehat{M} = M$  oder  $\widehat{M}$  ist einpunkt kompaktifizierung von  $M$   
 müssen nur zeigen:  $M$  ist lokal kompakt  
 $\tau \in M \Rightarrow \tau \neq \tau_0 \Rightarrow \exists U, V \text{ unv. } \tau \in U \subseteq V \subseteq \widehat{M}$  kompakt  
 $\Rightarrow M$  lokal kompakt  
 $\Rightarrow M = \widehat{M}$  oder kompaktifizierung  
 $e \in X \Rightarrow \hat{e}(\tau) = 1$   
 $\hat{e}(\tau_0) = 0 \Rightarrow \tau_0 \notin \widehat{M} \Rightarrow M = \widehat{M}$   
 $\hat{x} \subseteq C_0(M)$  denn  $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \hat{x}(\tau) = 0$

$\Gamma$  Basis umgebung von  $\tau_0 \in \mathbb{C}^X$  bezüglich Produkttopologie:  
 $V_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon} := \{ \varphi \in \mathbb{C}^X \mid |\varphi(x_i) - \tau_0(x_i)| < \epsilon_i \quad \forall i=1, \dots, n \}$   
 Basis umgebung von  $\tau_0 \in M$  bezüglich schwacher Topologie  
 $V_{R_1, R_2, \epsilon} := \{ \varphi \in M \mid \|\varphi - \tau_0\| < \epsilon \}$

nicht standard beschreib. der schwachen Topologie:  
 $X$  Banachraum  
 $X^*$  Dualraum  
 schwache Topologie auf  $X$   
 umgeb. Basis von  $x$   
 $V_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon} = \{ \varphi \in X \mid |\varphi(y_i) - \varphi(x_i)| < \epsilon_i \}$   
 $\gamma \in X \Rightarrow \varphi(y) \in \varphi(x) \quad \forall \varphi \in X^*$   
 in  $\mathbb{C}^X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \epsilon_n \stackrel{!}{=} 0$  in  $\mathbb{C}^X$  separabel  
 oder  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad |\epsilon_n| = 1$  dann  $\varphi \in \mathbb{C}^X$   
 $|\varphi(\epsilon_n)|_q \rightarrow 0$   
 weil  $\varphi \rightarrow 0$   
 für  $q < \infty$   
 gilt nicht:  
 $\gamma \in X \Leftrightarrow \forall \varphi \in X^* \quad \varphi(\gamma) = \varphi(x)$   
 (Mittelpunkt)  
 also schwache Topologie, weaker  $D(x)$   
 gleichzeitig stetig macht, ist Normtopologie.  
 schwächere Topologie, weaker alle  $f \in X^*$   
 stetig macht ist schwache Topologie.

ist einseitige Topologie:  
 $(L, T)$  kompakt  $F \subseteq C(L)$  Punkte trennend  
 $\Rightarrow T'$  induziert von  $F = T$   
 $(L, T)$  lokal kompakt  $F \subseteq C_0(L)$  Punkte trennend  
 $\Rightarrow T'$  induziert von  $F = T$

$\Gamma T' \subseteq T$  klar  
 $k \subseteq M$  abgeschlossen  
 $\Rightarrow k$  kompakt  
 $\Rightarrow k$  kompakt  $(T')$  da  $T' \subseteq T$   
 $\Rightarrow k$  abgeschlossen  $(T')$  da  $T'$  Hausdorff  
 also  $T \subseteq T'$

Kor  
 $X = C(K) \Rightarrow M \sim K$  Homöomorphie  
 $X = C_0(L) \Rightarrow M \sim L$  Homöomorphie

$X = \langle x_0 \rangle$  erzeugt durch einen Operator  
 $\Rightarrow M \sim \sigma(x_0)$   
 $\hat{x}$  analytisch in  $M$   
 $\tau: M \rightarrow \sigma(x_0)$   
 $\tau \in C(M) \rightarrow C(\sigma(x_0))$   
 $\rho \rightarrow \tau(\rho)$

$\Gamma \hat{x}_0: M \rightarrow \mathbb{C}$   
 $\tau \rightarrow \hat{x}_0 = \hat{x}_0(\tau) = \tau(x_0)$   
 $\hat{x}_0(M) = \text{spec}(x_0)$   
 injektiv, surjektiv für Polynome  
 $M$  kompakte Hausdorffraum  $\Rightarrow \hat{x}_0^{-1}$  stetig

für  $x = \langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$  haben wir  
 analytische Funktionen  $\hat{x}$  in  $n$  Variablen

Anwend.  $x = (J, A) \quad A \in M_n(\mathbb{C})$   
 $\gamma: X \rightarrow \hat{x}$   
 $A \rightarrow \hat{A}(\lambda)$  auf  $\{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \} = \text{Eigen } A$   
 $\text{ker } \gamma = (m(A), p(A))$   $m(A)$  Minimalpolynom  
 $(A - \lambda_i I)$  minimale Ideale  
 $\tau: X \rightarrow X / (A - \lambda_i I) \subseteq \mathbb{C}$

$p(A) = 0$  Cayley  
 Radikal  $= (m(A)) = \{0\}$  falls  $m(A) = p(A)$   
 dann haben wir eine halbeinfache Algebra. ist direkter Produkt von einfachen Algebren.

Taylorreihen  
darstellung  
für Banachs  
wertig analyt.  
Funktionen

$x \in A(D_f(x_0), x)$   
 i)  $x$  beliebig oft diffbar  
 ii)  $x(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(x_0)}{k!} (A-x_0)^k$   
 iii)  $\rho = \frac{1}{\limsup \frac{|a_n|}{n!}} \geq r$  konvergenz

$a_n := \frac{x^{(n)}(x_0)}{n!}$   
 $T(x, A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(x_0)}{k!} (A-x_0)^k$   
 $\forall f \in X^*$   
 $f(A) = \varphi(x(A))$   
 $f^{(k)}(x_0) = \varphi(x^{(k)}(x_0))$   
 $\varphi(T(x, A)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(x^{(k)}(x_0))}{k!} (A-x_0)^k$   
 $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!} (A-x_0)^k = f(A) = \varphi(x(A))$   
 $\stackrel{HB}{\Rightarrow} T(x, x_0) = x(A)$

In und  
Advers

$y \cdot a = 0$   $y$  linksinvers  
 $y \cdot a = y + a$  linksadvers

$y$  linksadvers  $a \Leftrightarrow a - y$  linksinvers  $e - a$

$\Gamma \Leftrightarrow y \cdot a = y + a$   
 $(e - y)(e - a) = e$

falls gemeinsam: advers resp inners  
 advers = quasiinvers

in homomul Algebra

$y(a - e) = a$   
 $y = a(a - e)^{-1}$

homomul BA

Bsp Operatoren:  
 $(1 - \lambda A)^{-1} (1 - \lambda A) = 1$   
 $(1 - \lambda A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda A)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda A)^k$   
 d.h.  $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda A)^k$  ist linksadvers zu  $\lambda A$

Gelfand  
Maßstab

$X$  Banachalgebra  
 $J$  regul. maximales Ideal  
 $\Rightarrow X/J \cong \mathbb{C}$

$\Gamma X/J$  ist schiefkörper

$\Gamma$  keine 0 in  $X/J$  kein Inverses in  $X/J$   
 $J' = (a + J)$  echtes Ideal in  $X/J$   
 $J = \{x \in X \mid x + J \in J'\}$  ist Ideal  $J \subsetneq X$

$\forall x \in X' (x \neq \lambda e)^{-1}$  existiert für mind. ein Element nicht  
 da  $\delta(X) \neq \emptyset \Rightarrow x - \lambda e = 0$

$\delta(X) \neq \emptyset$   $\delta(x) = \emptyset$  würde implizieren  $R(x) = (x - \lambda e)^{-1}$  ist ganz  
 $\Rightarrow (x - \lambda e)^{-1} = \text{const}$  Likwid  
 $R(x) = \frac{1}{\lambda} (e - \frac{x}{\lambda})^{-1} \rightarrow 0 \quad 1 \rightarrow 0$   
 $\rightarrow e$

$\Rightarrow B$   
 bei  $H$  Quasivarietäten  
 kann nicht zu Banach-  
 algebra gemacht werden

$K$  kompakter Hausdorffraum  
 $\Rightarrow$  Die maximalen Ideale von  $C(K)$   
 sind die  $I_p = \{f \in C(K) \mid f(p) = 0\}$   
 $I_p \neq I_q, p \neq q$

$\Gamma I_p$  ist maximales Ideal denn  $\varphi: X/I \rightarrow \mathbb{C}$   
 $f \mapsto f(p)$  ist bijektiv  $\Rightarrow X/I$  regul.  
 $\Rightarrow X/I$  minimal

$K$  Hausdorff, kompakt  $\Rightarrow$  normal  
 $\Rightarrow p \neq q$  dann  $\exists f(p) = 0, f(q) = 1 \Rightarrow I_p \neq I_q$

$K$  lokal kompakte Hausdorffraum  
 $\Rightarrow$  Die regulären maximalen Ideale  
 sind die  $I_p, p \in L$

$L := L \cup \{0\}$  einpunkt kompaktifizierung  
 Umgehung von  $a$  kompakte von Kompaktum Mengen

vor

$x$  mit  $a \in X$   
 Entweder  $\exists a^{-1}$  oder  $a$  liegt in maxim. Ideal  
 Entweder  $\exists a^{-1}$  oder  $\exists J$  regul. maxim. Ideal mit  
 $a x - x \in J$

Gelfandtheorie

Spektrum:  
 •  $M$  Raum der maximalen regul. Ideale  
 •  $M$  Raum d. komplexen Homomorphismen  
 $\varphi: M \rightarrow M \quad \varphi \mapsto \ker \varphi$  ist bijektiv  
 $x \in X \quad \hat{x}(\varphi) := \varphi(x)$  Gelfandtrafo  
 $\hat{x}: X \rightarrow M^{\hat{x}}$  Darstellung d. Algebra  $X$   
 $\hat{x}$  heißt Abb. von  $X$   
 $\hat{x}(M) = \text{spec}(X)$   
 $\ker \hat{x} = \text{rad } X$  Radikal von  $X$   
 $\ker \hat{x} = \bigcap I$   $\ker \hat{x} = 0 \Rightarrow X$  halbeinfach

maximales Spektrum im Ringraum  $\Rightarrow$  das im Spektrum  $\{p \in X \mid p \text{ Primideal}\}$   
 liegt.

Jacobson Radikal in Ringtheorie

Nilradikal :=  $\bigcap P$   
 $P \in \text{Prim}$

vgl. Lie Algebra Theorie: Lie Algebra hat Nilradikal falls im Radikal (2) ist. (d.h. das maximal aufsteigende Ideal)

Bsp  $X = \{f \in C(\mathbb{C}) \mid f(0) = 0\} \quad \hat{x} = \{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \}$  abs. konv. trigon. Reihen  
 $Y = X = \{f \in C(\mathbb{C}) \mid f(0) = 0\} \quad \hat{y} = \{ \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \mid A \in \mathbb{C} \}$  absolut konv. Potenzreihen in Einheitskreis

Interpretation: Wiener  $\hat{x}$  absolut konv. Fourierreihe  
 $\rightarrow \hat{y}$  absolut konv. Potenzreihe

Jordan Algebren: Algebra  $\rightarrow ab + ba$  symmetrisch  
 Lie Algebra Algebra  $\rightarrow ab - ba$  alternierend  
 beschränkt

$\hat{x}$  für beliebige  
 Liealgebra  $(L, X)$   
 $\exists$  Ring  $(R, +)$  sodass  
 $L \subseteq R \quad a \cdot b = ab - ba$

$\Rightarrow$  Theorem von  
 Poincaré-Birkhoff-Witt

$L$  Lie Algebra  
 $\Rightarrow L \cong$  Unteralgebra  $R^-$

Derivationalalgebra:  $A$  beliebige Algebra  
 $D(A) \subseteq C(A)$   
 $\cup \{0\}$  lineare Operatoren

$R^-$  Algebra erhalten durch  
 neue Multiplikation  $b \cdot y := -y \cdot b$

$(x \cdot y)' = (x \cdot y)' + x \cdot (y)'$  Leibniz  
 vgl. Algebra d. Funkt.  
 führt auf Liealg.  
 Lie-Algebra

$K$  kompakter topol. Raum  
 $X \subseteq C_K(K)$  Unteralgebra die Punkte von  $K$  trennt  
 $\Rightarrow \bar{X} = C_K(K) \vee \exists f \in K \bar{X} = \{f \in C_K(K) \mid f(p_0) = 0\}$

1. Fall  $\forall p \in K \exists h \in X \ h(p) \neq 0$

- I  $f(x) = \frac{(g(x)-g(q))h(x)}{(g(p)-g(q))h(p)} \cdot \frac{(g(x)-g(p))h(x)}{(g(q)-g(p))h(q)}$  erfüllt  $f(p) = \alpha$   $f(q) = \beta$
  - II  $\exists g(z)$  Polynom mit  $|g(z^2) - H| < \epsilon/4$  (nenne  $g(z^2)$  in der Nähe von  $(z^2, z^2)^{1/2}$ )
  - III  $f \in \bar{X} \rightarrow H \in \bar{X}$  aus II
  - IV  $f, g \in X \rightarrow \max f, \min f, \max f, \min f \in X$   $\frac{1}{2}(f+g) \in X$   $\frac{1}{2}(f-g) \in X$   $\frac{1}{2}(f+g) = \max$   $\frac{1}{2}(f-g) = \min$
  - V  $g \in C_K(K) \rightarrow \exists f \in X \ f+g \in X$   $\frac{1}{2}(f+g) = \max$   $\frac{1}{2}(f-g) = \min$
- $\exists f, g \ f+g(p) = g(p) \ f+g(q) = g(q)$   $U_{f+g} = \{x \in K \mid f+g < g + \epsilon\}$   $V_{f+g} = \{x \in K \mid f+g > g - \epsilon\}$  } offene Überdeckung von  $K$
- Sei  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{f+g_i} \ f_i := \min_{i=1..n} f_i, g \leq g + \epsilon$   
 Sei  $V_g := \bigcap_{i=1}^n V_{f+g_i} \ \wedge \ V_g \rightarrow f_g(x) > g - \epsilon$   
 Sei  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{f+g_i} \ f := \max_{i=1..n} f_i \geq g - \epsilon \ f \leq g + \epsilon$

2. Fall  $\forall t \ f(p_0) = 0$

$\bar{X} := \{f \in X \mid f(x) = \lambda \ \forall x \in K\}$  U.A. von  $C_K(K)$   
 $\bar{X} = C_K(K) \quad g \in C_K(K) \quad \lambda := \frac{\epsilon}{2} \rightarrow \|g - \lambda\| < \epsilon \ \exists \lambda$

Ein nicht-standardbeweis:

$K$  kompakt  $\Rightarrow \exists$  endlich  $E \subseteq K \ E \ni \{x \in K \mid S(x)\}$   
 Sei  $f$  in  $C_K(K)$  gegeben. Beh. wir können aus  $X$  eine Funktionsfamilie bauen, die auf  $E$  mit Wertebereich  $f$  übereinstimmt. Wegen Stetigkeit von  $f$  und Kompaktheit sind wir fertig:  $f(x) = f(x) = g(x) \hat{=} g(x)$   
 Beweisen Beh. mit Induktion:

Übersetzung: existiert ein  $g \in X$  mit  $g(e_k) = f(e_k) \neq 0$ , können wir so skalieren, dass  $g(e_k) = f(e_k)$  im anderen Fall müssen wir  $f(e_k) = 0$  voraussetzen.

Induktion: wir haben ein  $g_n \in X$  so dass  $f(e_k) = g_n(e_k)$  für  $k \leq n$  (Induktionsanfang)

Definieren  $g_{n+1}(t) := g_n + \frac{\prod_{i=1}^n (x_i(t) - x_i(e_i))}{\prod_{i=1}^n (x_i(e_{n+1}) - x_i(e_i))} \cdot (f(e_{n+1}) - g_n(e_{n+1}))$

$x_1 \dots x_n$  so dass  $x_i(e_i) \neq x_i(e_{n+1})$

$= 0$  für  $t = e_i$   
 $= 1$  für  $t = e_{n+1}$

ged.

$f: G \subseteq E \rightarrow B \quad B$  Banachalgebra  
 $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$  existiert und ist unabh. vom Weg  $\lambda \rightarrow \lambda_0$   
 $A(B, B)$

Können auch so vorgehen:  $x \in A(B, X) \quad \forall x \in X^*$   
 $C \xrightarrow{x} X \xrightarrow{\psi} C$   
 $\psi \circ x \in A(B)$

$x \in A(G, X)$  ganze Banachwertige Fkt.  
 $\exists M \ \|x(\lambda)\| \leq M$  beschränkt  
 $\Rightarrow x(\lambda)$  konstant

$\Gamma \ \forall x \in X^*$  beliebig  
 $t \in G \ X$  ist analytisch beschränkt  $\Rightarrow f(\lambda) = konst$   
 $\psi(x(\lambda) - x(\lambda_0)) = 0 \Rightarrow$  Hahn-Banach  $\Rightarrow x = konst$

$x \in A(G, X) \quad \psi \in X^*$   
 $\gamma: t \rightarrow \lambda(t) \in G$  Kurve in  $G$   
 (1)  $\int \psi(x(\lambda)) d\lambda = \int \psi(x(\lambda(t))) \lambda'(t) dt$  ist wohldef.  
 (2)  $\psi(\int x(\lambda) d\lambda) = \int \psi(x(\lambda)) d\lambda$   
 Riemann Integral

$\Gamma \ t \mapsto x(\lambda(t)) \lambda'(t)$  ist glm stetig auf  $\Gamma$  (total)  $\Rightarrow$  bilden Riem summe  $\Rightarrow$  infiniere Reihe  $\Rightarrow$  konv. da  $X$  vollständig ist.

$x \in A(G, X) \quad \lambda_0 \in G$  Gebiet in Rand  $\partial G \subset C^1$   
 (1)  $\int_{\partial G} x(\lambda) d\lambda = 0$   
 (2)  $x(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{x(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda$

$\Gamma_1 \ \psi \in X^* \quad \psi \int_{\partial G} x(\lambda) d\lambda = \int_{\partial G} \psi(x(\lambda)) d\lambda = \int_{\partial G} f(\lambda) d\lambda = 0$   
 $\Rightarrow \psi \int_{\partial G} x(\lambda) d\lambda = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{H}^1} x(\lambda) d\lambda = 0$

ii)  $b := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{x(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda \quad \psi(b) = \lambda_0$   
 $\psi(b - \lambda_0) = 0 \Rightarrow (b - \lambda_0) = 0$  Hahn-Banach

propre  $e_n(x)$  associée à  $\lambda_n$  possède exactement  $(n-1)$  zéros sur  $]0, 1[$ ; en particulier la première fonction propre  $e_1(x)$  a un signe constant sur  $]0, 1[$ .

C) le quotient  $\frac{\lambda_n}{n^2}$  converge quand  $n \rightarrow \infty$  vers une limite  $> 0$ .

Sur ces questions on pourra consulter Weinberger [1], Protter-Weinberger [1], Coddington-Levinson [1], Hartman [1] et Agmon [1].

# IX

## ESPACES DE SOBOLEV ET FORMULATION VARIATIONNELLE DE PROBLÈMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES EN DIMENSION N

IX.1. Définition et propriétés élémentaires des espaces de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ .

Définition. — L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est défini par <sup>(1)</sup>

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

On pose  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

Pour  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{grad } u.$$

L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est muni de la norme

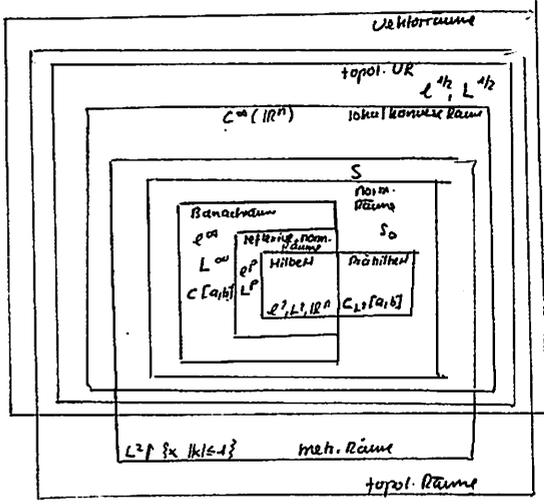
$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois de la norme équivalente  $\left( \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \right)^{1/p}$

<sup>(1)</sup> Quand il n'y aura pas de confusion on écrira souvent  $W^{1,p}$  au lieu de  $W^{1,p}(\Omega)$ .  
<sup>(2)</sup> Cette notation a bien un sens:  $g_i$  est unique grâce au lemme IV.2.



Topologie  
Funktional-  
analysis



$S_0$  Raum d. finiten Folgen  
 $S$  Raum d. rasch  
fallenden Folgen

kompakt + metrisch  $\rightarrow$  vollständig  
Banach + D-Def  $\Rightarrow$  Hilbertraum  
lokal kompakt + abzählb P  $\Rightarrow$  metrisch  
Lokal  
lokal kompakt + Ziffer abzählb.  $\Rightarrow$  norm. Raum  
konvergenz  
Marty

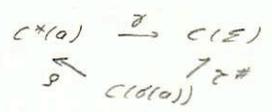
Spektraltheorem für normale Operatoren im Hilbertraum

Idee: Spektraltheorem als Spezialfall einer Darstellung abelscher  $C^*$ -Algebren in  $C(E)$

Ziel

$A$  abelsche  $C^*$ -Algebra mit  $\lambda$  mit Strukturraum  $E$   
 $\Rightarrow \gamma: A \rightarrow C(E)$  Gelfandtransformation ist isometrie u.  
 $\times$  Isomorphismus von  $A$  auf  $C(E)$

speziell:  $a = a^* \Rightarrow a$  erzeugt  $C^*(a)$



nutzen so eine Erweiterung der Riesz'schen Funktionaltheorie

damit:  $Hol(a) \rightarrow A$  lokal: in Umgeb. von  $\sigma(a)$  analytisch

$(X, \mathbb{R})$   $\sigma$ -Raum  
 $H$  Hilbertraum

oft:  $\mathcal{D}$  = Punktmenge auf  $X$   
 jeils  $X$  topol. Raum

Spektralmaß auf  $(X, \mathcal{D}, H)$  ist eine Funktion  $E: \mathcal{D} \rightarrow B(H)$  mit

- $\forall A \in \mathcal{D} \quad E(A)^2 = E(A)$
- $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{D} \quad E(A_1 \cap A_2) = E(A_1) \cdot E(A_2)$
- $E(\emptyset) = 0 \quad E(X) = 1$
- $\{A_j\}$  disj. abzählb. Familie in  $\mathcal{D} \quad E(\cup A_j) = \sum E(A_j)$

auf  $X = \mathbb{R}$  können wir Spektralmaß definieren ein "Stieltjes'sches Spektralmaß"

- $E(\lambda) = E(\lambda)^* = E^*(\lambda)$
- $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_{\min(\lambda, \mu)}$
- $E_{-\infty} = 0 \quad E_{+\infty} = 1$

$E$  Spektralmaß auf  $(X, \mathcal{D}, H)$   
 $\Rightarrow E_{g,h}(A) := \langle E(A)g, h \rangle$   
 ist reelles Maß mit Totalvarianz  
 $|E_{g,h}(A)| \leq \|g\| \|h\|$

$\int \mu(A) \leq \sup \sum \|h(A_j)\| \quad \Delta_j$  messbare Partit. von  $A$ ?

$\sum \mu(A_j) = \sum \langle E(A_j)g, h \rangle = \sum \langle E(A)g, h \rangle$

$\|\sum E(A_j)g\|^2 \leq \|g\|^2 \quad \|g\| \|h\| = 1$

mit  $E(\lambda) = E(\mathbb{R}, \lambda)$ :  
 nutzen damit auf Halb-menge  $I$  ein Spektralmaß

Wissen des Integrals  
 $\int \phi dE$   
 möglich  
 Spektralmaß

$E$  Spektralmaß auf  $(X, \mathcal{D}, H)$   
 $\phi: X \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkte  $\mathbb{C}$ -wertige Funkt.  $B(X, \mathbb{C})$   
 $\Rightarrow \exists! A \quad \forall \Delta_j$  Partit. von  $\Delta \quad \sup_{\lambda \in \Delta_j} \|\phi(\lambda) - \phi(\lambda')\| \leq \epsilon$   
 $\Rightarrow \|A - \sum_{k=1}^n \phi(\lambda_k) \cdot E(\Delta_k)\| < \epsilon$

(vgl.  $(X, \mathcal{D}, \nu)$  vollst. Maßraum  
 $f$   $\mu$ -messbar  $\Rightarrow \exists! g \in L^1(\nu) \quad \int f \cdot \nu(h) \leq \epsilon$ )

Integral bezüglich Spektralmaß

Integral bezüglich Lebesguemaß

Darstellung von  $B(X, \mathbb{C})$  in  $B(H)$

$\mathcal{B}: B(X, \mathbb{C}) \rightarrow B(H)$  ist Darstellung  
 $\phi \mapsto \int \phi dE$

Wissen und Vollständigkeits Spektralmaß

$\mathcal{B}: C(X) \rightarrow B(H)$   
 Darstellung  
 $\Rightarrow \exists!$  Spektralmaß auf den Borelmengen von  $X$

Beweis analog Riesz Darstellung auf oder Konstruktion

$R(\Delta) := \chi(\Delta)$  kann durch lineare von stetigen Funktionen definiert werden  
 $E(\Delta) = e_{\mathcal{B}}(\Delta)$  mit gleicher Maschinend. konstruiert

Spektraltheorem

$N$  Normal  
 $\Rightarrow \exists! E$  Spektralmaß auf Borelmengen von  $\sigma(N)$   
 $N = \int \lambda dE(\lambda)$   
 $\phi$  beschränkte Borelfunktion auf  $\sigma(N)$   
 $\Rightarrow \phi(N) = \int \phi dE$

Dieses Funktionaltheorie

ist eine Erweiterung des Riesz'schen Funktionaltheorie  
 $H$  Banachalgebra mit  $\lambda$   
 $Hol(a)$  in Umgebung von  $\sigma(a)$  analytische Funktionen

Riesz  
 Funktionaltheorie

$\mathcal{S}: Hol(a) \rightarrow A$   
 $f \mapsto f(a)$   
 ist Algebrahomomorphismus  
 $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$

Funktionaltheorie  
 $C^*$ -Algebren

$\mathcal{S}: C(\sigma(a)) \rightarrow C^*(a) \subseteq A$   $a$  normal  
 $f \mapsto f(a)$   
 ist Algebrahomomorphismus sogar injektiv  
 ist Erweiterung des Riesz'schen Funktionaltheorie

Bsp  $H_n(k, \mathbb{Z})$  ist Gruppe mit exakter Geradenanzahl

$$H_n(k, \mathbb{Z}) = F_m \oplus C_{m_1} \oplus \dots \oplus C_{m_r}$$

freie Gruppe d. Ordnung  $m$   $n$ -te Betti-Zahl von  $k$   
 $C_{m_1} \dots C_{m_r}$  endl. Gruppen  $m_1, \dots, m_r$   $n$ -dimens. Torsionskoeffizienten von  $k$

Bem Diskontkoeff. und Betti-Zahl bestimmen  $H_n, H^n$  eindeutig

Bsp  $n > \dim k$   $H^n(k, \mathbb{Q}) = H_n(k, \mathbb{Q}) = 0$

Bsp  $H^0(k, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^{m'}$   $m'$  # Zuskomp. von  $k$

Bsp  $n = \dim k$   $H_n(k, \mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_n(k, \mathbb{Q})$   
 $H^n(k, \mathbb{Q}) = \mathbb{Z}^n(k, \mathbb{Q}) - D^n(k, \mathbb{Q})$

Dualität:

$G$  Gruppe  $S_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\} \cong SO(2) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$   
 $G^* = \{ \chi : G \rightarrow S_1 \}$  charaktere Dualgruppe  
 $\chi$  Homomorph.

$$H_n(k, G^*) = (H^n(k, G))^*$$

Cohomologie und differentialformen

$Z^p(M)$  Menge der geschlossenen  $p$ -Formen  
 $B^p(M)$  Menge der exakten  $p$ -Formen

$$H^p(M) := \frac{Z^p(M)}{B^p(M)}$$

$p$ -te de Rham Cohomologie VR von  $M$

Bsp  $H^0(S^1) = \mathbb{R}$   
 $H^1(S^1) = 0$   $U(1)$   
 $H^2(S^1) = 0$

I	$(\forall x \text{st} \exists y \forall z \text{st} \varphi(x,y,z)) \Leftrightarrow \exists x \forall y \text{st} \varphi(x,y)$	$\varphi(x,y,z)$ klassisch $\bar{u}$ beliebig	Lösbarstruktur Standardisierung Transfer
S	$\text{st}(a) \rightarrow \exists \text{st} b \forall \text{st} x (x \leq b \rightarrow x \leq 0 \wedge P(x))$	$P(x)$ beliebig	
T	$\forall \text{st} x \varphi(x, \bar{u}) \Leftrightarrow \forall x \varphi(x, \bar{u})$	$\text{st}(\bar{u}) \varphi(x, \bar{u})$ klassisch	

zu I  
 Transfer: "Erfüllen alle Standardobjekte eine klassische Eigenschaft  
 So überhaupt alle Objekte"

hinzu  $\forall \text{st} x \varphi \forall x \text{st}(x) \varphi$   
 $\varphi^{\text{st}}$ ,  $\varphi$  ohne quant.  $\varphi^{\text{st}} = \varphi$   
 $\varphi = \forall x \varphi \Leftrightarrow \varphi^{\text{st}} = \forall \text{st} x \varphi^{\text{st}}$

$$\exists x \varphi(x, \bar{u}) \rightarrow \exists \text{st} x \varphi(x, \bar{u}) \quad (\text{Kontraposition})$$

$$\exists \text{st} x \varphi(x, \bar{u}) \rightarrow \forall x (\varphi(x, \bar{u}) \rightarrow \text{st}(x)) \quad \text{klar}$$

- "Alle in der klassischen Mengenlehre definierten Mengen sind Standard"
- "Alle in der klassischen Mengenlehre definierten Operationen erhalten jedem Tupel von Standardmengen eine Standardmenge zu"
- "Standarduniversum ist elementare Substruktur des ganzen Universums"

$\Gamma \text{st}(x, \bar{u}) \rightarrow \exists \text{st} x \varphi(x, \bar{u})$  nennen es  $y$   
 $\varphi(x, \bar{u}) \rightarrow x = y$  weil  $\text{st } y \rightarrow \text{st } x$

$$\text{st}(\bar{u}) \rightarrow \varphi \Leftrightarrow \varphi^{\text{st}} \quad \varphi \text{ klassisch}$$

$\exists \text{st} x \forall \text{st} y \exists x \varphi(x,y)$   $\Gamma$  Sei  $z$  st u. fin  
 $\exists x \forall y \exists z \varphi(x,y,z)$   
 (nimm  $x = z$ )  $\varphi(x,y)$   
 (S)  $\exists x \forall \text{st} y \exists x \varphi(x,y)$   
 $\exists \text{st} x \forall \text{st} y \exists x \varphi(x,y)$

"Es gibt eine endliche Menge, die alle Standardmengen als Elemente enthält"

$$\exists \text{st} x \forall x \exists y \text{st} \varphi(x,y) \Leftrightarrow \forall x \exists \text{st} y \varphi(x,y)$$

(Kontraposition von I)

"u besitzt nur Standardelemente genau  $\bar{u}$  Teilmenge einer st endl Menge ist"

$$\exists \text{st} x \varphi(x, \bar{u}) \Leftrightarrow \forall x \text{st} x \varphi(x, \bar{u})$$

$\Gamma \varphi(x,y) : x \in U \rightarrow x = y$   
 $\exists \text{st} x \forall x \exists y \text{st} \varphi(x,y) \Leftrightarrow \forall x \exists \text{st} y (x \in U \rightarrow x = y)$   
 $x \in U \wedge \text{st } x$

"u besitzt genau dann nur Standardelemente wenn u standard und endlich ist"

$$\text{st}(\text{fin } u) \Leftrightarrow \forall x \text{st} x \varphi(x, u)$$

"jede unendl Menge enthält nichtstandardelemente"

$\Gamma \rightarrow x \text{st} \text{st} u \text{st} u \text{st} u \text{st} u \text{st} u$   
 $\rightarrow x \text{st} \text{fin } u \text{st} u \text{st} u$   
 $\text{st}(\text{fin } u) \rightarrow \text{st}(\text{fin } P(u))$  aus T  
 $x \text{st} u$   
 $u \text{st} \text{fin } u \rightarrow \text{fin } u$

"jede Menge enthält nichtleere <sup>endl</sup> Teilmengen, die alle Standardelemente enthält"

$$\text{fin } E \cdot \forall \text{st} x \exists x \in E \rightarrow \text{st } E$$

"Die endliche Menge, die alle Standardmengen als Elemente enthält ist nichtstandard"

$\Gamma$  Annahme  $\text{st } E$   $\text{st } E$   
 $\rightarrow E \in E$   $\varphi$  zu Funktion

$$\text{st}(\text{fin } (n) \text{ m}) \rightarrow \text{st } m$$

$\Gamma \text{st}(\text{fin } (n) \text{ m}) \rightarrow \text{st } m$

Für  $x \in \mathbb{R}$  definiert man  
 $\text{inf}(x) : x < y \forall \text{st} y \in \mathbb{R}^+$   
 $\text{unb}(x) : y < x \forall \text{st} y \in \mathbb{R}$

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ inf}(x)$$

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ unb}(x)$$

$\Gamma E \subset \mathbb{R}^+$  enthält alle standard Elem.  
 $E \neq \emptyset$  endlich  
 $m = \min E$   $o \in m \in E \subset \mathbb{R}$   
 $M = \max E$   
 wählen  $x$  mit  $0 < x < m$   
 $\text{st } x$  mit  $M < x$

" $\mathbb{R}$  enthält infinitesimal kleine und unendlich grosse Elemente"

$$\forall \text{st} x \in \mathbb{R} \exists \text{st} y \in \mathbb{R} x < y \wedge \varphi(y) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ unb}(x) \rightarrow \varphi(x) \quad \varphi \text{ klassisch}$$

"gilt eine klassische Eigenschaft für beliebig grosse Standard reelle Zahlen, so gilt sie auch für unendl. große Reelle Zahlen"

$\Gamma \forall \text{st} x \in \mathbb{R} \exists \text{st} y \in \mathbb{R} x < y \wedge \varphi(y)$   $\rightarrow$   
 $\forall \text{st} x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x < y \wedge \varphi(y)$   $\rightarrow$   
 $(\exists y \in \mathbb{R} x < y \wedge \varphi(y))$   
 nimm  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\text{unb}(x)$   
 $(\exists y \in \mathbb{R} x < y \wedge \varphi(y))$   
 $\rightarrow \text{unb}(x)$

zu 5

$\exists! b \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \exists! y \in \mathbb{R} : x + y = x$

$\Gamma \forall x \in \mathbb{R} \exists! y \in \mathbb{R} : x + y = x$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \exists! y \in \mathbb{R} : x + y = x$

$\exists! y \in \mathbb{R} : x + y = x$

$\exists! y \in \mathbb{R} : y = 0$

"Die durch  $\varphi$  definierte Menge ist eindeutig"

Sagen  $b = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x)\}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid \exists! y \in \mathbb{R} : x + y = x\} = \mathbb{R}$

oder  $\exists x \in \mathbb{R} : x = x$

NST auf  $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \exists! x^0 \in \mathbb{R} : x^0 = x$

"Die Projektion einer Zahl  $x$  in  $\mathbb{R}$  auf das Standarduniversum ist eindeutig"

$\Gamma \varphi(x) = \inf(x) \wedge \sup(x) \Rightarrow x = 0$  da sonst  $\exists \epsilon > 0 \mid x \mid \leq \epsilon$

$\Rightarrow$  ist Äquivalenzrelation:  $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$x \sim y \wedge x \sim z \Rightarrow y \sim z \Rightarrow \inf(y, z)$

da  $\inf(y, z) \leq y \wedge \inf(y, z) \leq z \Rightarrow \inf(y, z) = 0$

" $\exists$ "  $M := \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq x\}$   $x \in \mathbb{R}$

$-c \leq -x \leq x \wedge x \in \mathbb{R} \Rightarrow -c \in M \neq \emptyset$

$y \in M \wedge y \leq x \Rightarrow y \leq x \leq c$

einleuchtend:  $M := \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq x\}$   $x \in \mathbb{R}$

$\forall y \in M \ y \leq c$  Transfer

$-c \in M \Rightarrow$  Endl.  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$

ist nicht leer

$x_0 := \sup M \ \exists y \in M \ x_0 \leq x$

d.h.  $\forall y \in M \ y \leq c \ \exists y \in M \ y \leq c$

$x^0 := \sup M \ \exists x^0 \leq x$

Beh:  $x^0 = x$

1. Fall  $x^0 < x$

$\forall \epsilon \in \mathbb{R} \ \exists x - x^0 \in \mathbb{R}$

$x^0 < x^0 + \epsilon < x$

$\exists y \in M \ \text{d.h. } x^0 + \epsilon \leq x_0$

$\Rightarrow \epsilon = 0$

also  $x^0 = x$

2. Fall  $x < x^0$

$0 < \epsilon \leq x^0 - x$

$x < x^0 - \epsilon$

$\neg \exists y \in M \ y \leq x^0 - \epsilon$

$\Rightarrow \sup M = x^0 < x$

also  $\neg \exists \epsilon > 0$

Stetigkeit

$\forall \delta \in \mathbb{R} \exists \epsilon \in \mathbb{R} \forall x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

" $\Leftarrow$ " genügt  $\forall \delta \in \mathbb{R} \exists \epsilon \in \mathbb{R} \forall x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

genügt  $\forall \delta \in \mathbb{R} \exists \epsilon \in \mathbb{R} \forall x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Sei  $\delta > 0 \ \exists \epsilon \in \mathbb{R}$

wählen  $\delta$  mit  $\inf(\delta)$

$|x - y| < \delta \Rightarrow x \sim y \xrightarrow{\text{Beh}} |f(x) - f(y)| < \epsilon$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$  da  $\delta > 0$

es gilt also  $\forall x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

" $\Rightarrow$ "  $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

$\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

$\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Sei  $x \in I \ \exists \delta \in \mathbb{R}$

d.h.  $\forall \delta > 0 \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$

also  $f(x) = f(y)$  qed

glimsktigkeit

$\forall \delta \in \mathbb{R} \exists \epsilon \in \mathbb{R} \forall x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

" $\Leftarrow$ " z.z.  $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 \ \forall x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

genügt  $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 \ \forall x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Sei  $\delta$  mit  $\inf(\delta)$   $|x - y| < \delta \Rightarrow x \sim y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$  da  $\delta > 0$

" $\Rightarrow$ "  $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 \ \forall x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

$\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 \ \forall x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

$\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 \ \forall x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

$\forall x, y \in I \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Kompaktheit

$\forall M \subseteq \mathbb{R} \ \exists x \in M \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M \ |x - x^0| < \delta \Rightarrow |x - x^0| < \epsilon$

$\Gamma \Leftarrow$   $M$  kompakt  $\Rightarrow \exists c > 0 \ \forall x \in M \ |x| < c$

$\Rightarrow \exists c > 0 \ \forall x \in M \ |x| < c$  da  $M$  standl.

$\Rightarrow \text{begl}(x)$

$M$  kompakt  $\Rightarrow M = \overline{M}$  genügt also  $x \in \overline{M}$  zu zeigen

$\forall \delta > 0 \ \exists x - x^0 < \delta \ \exists x \in M$  nach Def von  $x^0$

$\forall \delta > 0 \ \exists x \in M \ |x - x^0| < \delta$

$\Rightarrow \exists x \in M \ |x - x^0| < \delta$  d.h.  $x^0 \in \overline{M}$

$\Leftarrow$   $M$  beschränkt  $\Rightarrow$

$\forall x \in M \ \exists c > 0 \ |x| < c$  nach vor

Sei Endl. mit  $x \in M \ \forall x \in M \ \mathbb{R}$

$A = \max \{x\}$

$x \in M$

$\forall x \in M \ |x| < c$

$\forall x \in M \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M \ |x - x^0| < \delta \Rightarrow |x - x^0| < \epsilon$

$M$  kompakt:  $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M \ |x - x^0| < \delta \Rightarrow |x - x^0| < \epsilon$

$M$  regulär:  $\forall \delta > 0 \ \exists \epsilon > 0 \ \forall x \in M \ |x - x^0| < \delta \Rightarrow |x - x^0| < \epsilon$



Anwendungen d. Resultate über metr. Räume

Stetige Abb  
auf komp.  
Menge komp

$K \subseteq M$  kompakt  $f: (M, d) \rightarrow (M', d')$  stetig  
 $\rightarrow f(K)$  kompakt in  $M'$

Stetige Abb  
auf komp.  
Menge stetig

$(M, d)$  kompakt  $f: (M, d) \rightarrow (M', d')$  stetig  
 $\rightarrow f$  glm stetig

Satz über  
Kontinuität  
Abb

$(M, d)$  vollst.  $f: (M, d) \rightarrow (M', d')$   
 $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) \quad c < 1 \quad \forall x, y$   
 $\rightarrow \exists x_0 \in M \quad f(x_0) = x_0$

$f$  Standard d.F.B. (1)  
 $K$  kompakt  $\forall x \in K \exists y \in K \quad x \neq y$   
 $f(x) \neq f(y) \quad d(y) \rightarrow d(f(y))$   
d.h.  $\forall x \in K \exists y \in K \quad f(x) \neq f(y) \quad x \neq y$  d.h.  $K = f(K)$  kompakt  
 $\Gamma \quad x \in K \exists y \in K \quad x \neq y \quad \forall x \in K \forall y \in K \quad x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$  stetig  
müssen zeigen:  $\forall x \in K \forall y \in K \quad x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$  (glm stetig)  
kein Problem:  $x, y \in K \quad x \neq y \rightarrow \exists z \in K \quad x \neq z \neq y$   
Stetigkeit:  $f(x) \neq f(z) \neq f(y) \rightarrow f(x) \neq f(y)$

$\Gamma \quad d(f)$  genügt  
 $x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$   
 $x_0 \in M \quad f(x_0) \in M \quad \exists f(x_0)$  falls  $d(x_0) \in M$  Standard Folge  
 $d(x_{n+1}, x_n) < c^n d(x_0, x_0)$   
 $m > n \quad d(x_n, x_m) < \frac{c^n}{1-c} \quad c.F. \quad a = \lim x_n$   
sein  $\exists x_0 \in M \quad a = x_0 = x_{n+1} = f(a) \quad \text{stetig} \quad a = f(a)$

Existenz von Ultrafiltern in Boolescher Algebra

Ultrafilter auf  
Boolescher Algebra  
 $B(n, 1, -, 0, 1)$

$\mathcal{F}$  Ultrafilter auf  $B$  gelte.  
1)  $0 \notin \mathcal{F} \quad 1 \in \mathcal{F}$   
2)  $x \in \mathcal{F} \quad x \vee y \rightarrow y \in \mathcal{F}$   
3)  $x, y \in \mathcal{F} \rightarrow x \wedge y \in \mathcal{F}$   
4)  $x \in \mathcal{F} \vee \bar{x} \in \mathcal{F}$

In jeder Booleschen Algebra  $\exists$  Ultrafilter  $\mathcal{F}$

$\Gamma \quad B$  Standard Boolesche Algebra  
 $E \subseteq B$  endlich  $\forall x \in E \quad x \in E$   
 $E$  erzeugt endl. Subalgebra  $B'$   $E \subseteq B' \subseteq B$   
 $x_0$  Atom in  $B'$ : 1)  $0 < x_0$   
2)  $\forall y \in B' \quad y < x_0 \rightarrow y = 0$   
 $m$  einer endl. B.A. gibt es nur Haupt-UF und die sind durch Mänge  
 $F := \{x \in B \mid x_0 \leq x\}$  st.F.  
Bth  $F$  ist Ultrafilter auf  $B$   
1)  $0 \notin F \quad 1 \in F$   
 $1 \in F \quad 1 \leq 1 \quad x_0 \leq 1$   
2)  $d(x, y) \quad x \in F \quad y \in B \quad x \vee y \rightarrow x_0 \leq x \vee y \quad y \in F$   
3)  $d(x, y) \quad x, y \in F \quad x \wedge y \rightarrow x_0 \leq x \wedge y$   
4)  $x \in B \quad \text{st} \quad x \in E \subseteq B' \quad x \wedge \bar{x} \in B' \quad \text{d.h.} \quad x \wedge \bar{x} = 0$   
oder  $x \wedge \bar{x} = 0$   
d.h.  $x_0 \leq x$   
oder  $x_0 \leq \bar{x}$   
 $\rightarrow x \in F$  oder  $\bar{x} \in F$

Anwendung

Auf  $\mathbb{N}$  existieren nichttriviale  
Ultrafilter

Nichttriviale  
auf  $\mathbb{N}$

1)  $0 \notin F \quad \mathbb{N} \in F$   
2)  $x \in F \quad y \geq x \rightarrow y \in F$   
3)  $x, y \in F \rightarrow x \wedge y \in F$   
4)  $x \in F \vee \bar{x} \in F$   
5)  $\forall n \in \mathbb{N} \exists \{x\} \in F$

$\leftarrow$  nichttrivialität

$\Gamma \quad B := P(\mathbb{N}) / \sim \quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \vee y - x$  endlich  
 $\rightarrow x \wedge y$  endlich  
 $\rightarrow x \vee \bar{x}$  endlich  
ist Boolesche Algebra  
 $F$  UF auf  $F \rightarrow \pi^{-1}(F)$  UF auf  $\mathbb{N}$

Differential und Integralrechnung

$I \subseteq \mathbb{R} \quad g: I \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \Leftrightarrow \forall \epsilon \in I \quad \exists \delta > 0 \quad x \neq a \quad |x - a| < \delta \rightarrow |g(x) - b| < \epsilon$

$\Gamma \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b; \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x - a| < \delta \rightarrow |g(x) - b| < \epsilon$   
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x - a| < \delta \rightarrow |g(x) - b| < \epsilon$   
wäre  $d$  infid)  
 $\forall \epsilon \in I \quad x \neq a \quad |x - a| < \delta \rightarrow |g(x) - b| < \epsilon$

Differenzierbarkeit

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$  Standard  
 $f$  diffbar auf  $I \Leftrightarrow \forall a \in I \exists h \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad x \neq a \quad |x - a| < h \rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b$

mit Lemma über impliz. Def. von  $\text{st} f$   
 $\exists \delta \in I \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \delta \in I \quad \forall x \in I \quad x \neq a \quad |x - a| < \delta \rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = h(a) \quad \text{instes. st}(h)$

$\Delta$  i.a. gilt  $x \neq a \neq x \rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = h(x)$  nicht für  $\text{st}(a)$  (Bsp  $\log(x)$   $a > 0$  infinitesimal  
 $x = a + \delta \quad x \neq a \quad \delta \neq 0$   
 $\frac{\log x - \log a}{x - a} = \frac{\log 2}{a}$ )

Stetige  
Differenzierbarkeit

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$  Standard  
 $f$  stetig diff. auf  $I \Leftrightarrow \forall a \in I \exists b \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in I \quad [x \neq a \neq y \rightarrow \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = b]$

$\Gamma \quad x \neq y \quad x \neq a \neq y$  Mittelwertsatz  $\exists \xi \in I \quad f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \forall \xi \in I \quad y$   
 $\xi = a \quad \text{st}(a) \quad f'(\xi) = f'(a)$  da  $f'$  stetig

$\hat{=}$   $f$  diffbar hier  
 $\text{st}(a) \quad a \neq x$  zeigen  $f'(a) = f'(x)$   
wählen  $y = a \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(x) = f'(y) = f'(a)$

Integralrechnung

findieren h70 inf(h)  
 $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt  
 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot 1 dx$

konstruktion  
 von Elementen  
 aus  $L^\infty[a,b]^*$

Hauptsatz d.  
 Integralrechnung

$f$  stetig auf  $[a,b]$   
 $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$  Stammfunkt. von  
 $f$  auf  $[a,b]$   
 insbesondere  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

$\exists \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$   
 $\mathcal{O}(f) = \int_a^b f(x) dx$

$\mathcal{O}$  monoton  
 bilinear  
 $\int_a^b (f+g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$

$\Gamma$  Lemma über  
 impliz. Def von  $\int_a^b f dx$

$m \leq f(x) \leq M$   
 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$\Gamma$  St  $(f, a, b)$   
 $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$   $m = \inf_{[a,b]} f(x)$   $M = \sup_{[a,b]} f(x)$

$m \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \leq M$   
 $\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$

Sei  $st(a_0) \in [a,b]$   
 $x_1 = x_0 = x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2) = f(x_0)$   
 stetig

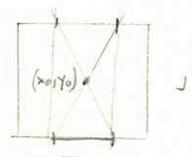
$\frac{m - f(x_0)}{0} \leq \frac{F(x_1) - F(x_0) - f(x_0)(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{M - f(x_0)}{0}$   
 $F'(x_0)$

Lebesgue:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cdot (\mu \{f \geq \frac{m}{2^n}\} - \mu \{f \leq -\frac{m}{2^n}\}) dx$

Differentialgleichungen

$y' = f(x,y)$  stetig in  $B \subseteq \mathbb{R}^2$   
 beschr. durch jedem Pkt von  
 $B$  eine Lösung

$\Gamma$  o.d.  $x_0, y_0 = a_0$   
 $I := [-a, a]$   
 $J := [-b, b]$   
 $\max |f| \leq M$   $\frac{b}{a} \geq M$



wählen h70 infinitesimal  
 definieren  $v$ :

$v(0) = 0$   $v(k+h) - v(k) = \int_k^{k+h} f(t, v(t)) dt$   
 erweitern  $v \in v(k+h) = v(k) + \int_k^{k+h} f(t, v(t)) dt$   
 für  $0 \leq h \leq a$   $v(h) = \int_0^h f(t, v(t)) dt \leq Mh = Mx \leq b$   
 $u := v^0$

$v(k+h) \in M \cdot k + b$   
 mit Induktion

$u$  ist Lösung d. Dgl!

$v(x) = \sum_{0 \leq k \leq x} f(k, v(k)) \cdot h$

Beh:  $u(x) = \sum_{0 \leq k \leq x} f(k, u(k)) \cdot h$  d.h.  $st(x) \rightarrow u(x) = \int_0^x f(x, u(t)) dt$

Bew:  $x \leq x' \rightarrow |v(x') - v(x)| \leq M(x' - x) + Mh$  d.h.  $x' = x \rightarrow v(x') = v(x) \rightarrow v^0(x) = v(x)^0$  für st  $x$   
 $|u(x') - u(x)| = |v(x')^0 - v(x)^0| = |v(x') - v(x)|^0 = M|x' - x|$

$\forall x, x' \in I$   $|u(x) - u(x')| \leq M|x - x'|$  e.  $u, M, I$  standard  
 $T: \forall x, x' \in I$   $|u(x) - u(x')| \leq M|x - x'|$  d.h.  $u$  g.m. stetig auf  $I$

$x \in I$   $u(x) = u(x^0) = v(x^0)^0 = v(x^0) = u(x)$

$0 \leq k \leq x$   $\frac{f(k, v(k))}{A_n} = \frac{f(k, u(k))}{B_n}$  g.m. stetigkeit von  $f$  auf  $I \times J$

$\rightarrow \sum_{0 \leq k \leq x} A_n h = \sum_{0 \leq k \leq x} B_n h$   $u(x) - u(x^0) = \sum_{0 \leq k \leq x} A_n h = \sum_{0 \leq k \leq x} B_n h$

Bem Lösung d. Dgl im Allgem. abhängig vom gewählten  $h$   
 $f \in C^1 \rightarrow$  unabhängig

Hauptsatz d. Integralrechnung  
 geht allgemeiner:

$\rightarrow f$  absolutstetig d.h.  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \leq \delta$   
 $\rightarrow |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \epsilon$

$f$  absolutstetig auf  $[a,b]$   $\rightarrow f \in L^1$   $(\int_a^x f dp)' = f(x)$  a.e.

$v(\frac{a+x}{h}) = v(f[a,x])$

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(x_0)$

heißt  
 $A \mu$  Nullmenge  
 $\Rightarrow f(A) \mu$  Nullmenge  
 d.h.  $r = f \cdot \mu$   
 $\frac{dr}{d\mu} = f$   
 folgt aus Radon-Nikodym

$\mu(A) = 0 \rightarrow \mu(f(A)) = 0$

Konsistenz von IST

wollen zeigen:  $\text{con ZF} \iff \text{con (ZF+IST)}$

äquivalent  $\varphi = \varphi : V^{st} \vec{x} \iff \varphi(\vec{x}) \iff \varphi(\vec{x})$

haben  $T: V^{st} \vec{x} \iff \varphi(x) \iff V^x \varphi(x)$   $\varphi$  klassisch

Allgemeines Transfer Prinzip: Für beliebige Prefix  $Q_1, \dots, Q_n$   $\varphi$  klassisch  
 $Q_1 Q_2 \dots Q_n \varphi \iff Q_1^{st} Q_2^{st} \dots Q_n^{st} \varphi$

[ induktiv mit Transfer ]

Reduktionsalgorithmus: Jede Formel in ZF+IST ist äquivalent  $\equiv$  zu eine klassischen Formel

- 1. Schritt: Ersetze alle externen definierten Prädikate durch ihre Definitionen, so dass nur noch "st" vorkommt.
- 2. Schritt: Schreibe die Formeln wenn nötig so um, dass st nur noch auf den Quantoren ( $\exists^{st}, \forall^{st}$ ) vorkommt.
- 3. Schritt: Forme die Formeln durch Regeln R um, bis die Formel in der Form  $Q_1 Q_2 \dots \varphi$  darstellt, wobei  $\varphi$  intern.
- 4. Schritt: Ist der Rang der Formel  $> j$  gehe folgende Mission vor:  
 Sei  $Q_j$  der am weitesten rechts stehende interne Quantor, der von mindestens einem externen Quantor gefolgt wird, dieser Quantor wird dann von links externer Quantor gefolgt.  
 $Q_j = \forall$  o.d.  $\exists$  sonst anderes Vorgehen  
 1. Fall rechtsstehende Quantoren aller  $\forall^{st}$ . In diesem Fall können die Quantoren ohne Problem durch nach links durchgeschoben werden.  
 2. Fall  $\exists^{st}$  Quantoren stehen rechts. Diese können mit Regeln S von dem  $\forall^{st}$  Quantoren überfallen werden, so dass nur noch  $\exists^{st}$  Quantoren rechts stehen. Diese schiebt man mit T nach links.  
 Damit hat man Rang der Formel um Eins erniedrigt.  
 Fahre so fort bis Rang = 0  
 5. Schritt: Brauche das allgemeine Transfer Prinzip, um die externen Quantoren in interne Quantoren zu verwandeln  
 6. Schritt: [ ]

Rang: Formel ist von Rang j, falls es j interne Quantoren gibt, die von mindestens einem externen Quantor werden.

Regeln R: Quantoren nach vorne schieben  
 $\forall x \varphi \iff \forall x \varphi$   
 $\exists x \varphi \iff \exists x \varphi$

Regeln S:  $\forall x \exists y \varphi \iff \exists y \forall x \varphi(x, y(x))$   
 sah die implizite Defn von Fd. (siehe im Prinzip Skolemfunktionen.)

Regel T:  $\exists x \forall y \varphi \iff \forall y \exists x \varphi(x, y(x))$   
 andere Version

Regel I:  $\forall x \exists y \varphi(x, y) \iff \exists x \forall y \varphi(x, y)$   
 $\exists x \forall y \varphi(x, y) \iff \forall x \exists y \varphi(x, y)$

müssen zeigen: Jedes interne Theorem von (ZF+IST) ist ein Theorem von ZFC

(dann sind wir fertig: denn könnten wir beispielsweise  $\lambda=0$  in ZFC+IST in ZFC+IST beweisen, können wir es auch in ZFC beweisen, da  $\lambda=0$  ein internes Theorem von ZFC+IST ist.)

oder: wir können ein Modell von (ZFC+IST) bauen, indem das Modell von ZFC eine elementare Teilstruktur ist.

Ansatz T:  $V$  Modell für ZFC  
 $V^x$  Ullapotentia von  $V$   
 $i: V \rightarrow V^x$  Einbettung  
 $x \mapsto \hat{x}$  ist elementar  
 definieren:  $s(\hat{s}) \iff \exists x \in V \hat{s} = x$   
 $V^x = (V^x, \in, s)$  ist dann ein Modell für ZFC+IST  
 müssen zeigen, dass I, S, T in  $V^x$  gelten.

Einbettung ist elementar:  $x_1 \dots x_n \in V$   
 $V^x \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  gdw  
 $V \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$   
 $i(V) = \hat{V}$  ist elementare Substruktur von  $V$   $\rightarrow$  Modelltheorie

$L^2(\mathbb{R}^n)$

$H_0 = -\Delta$  mit  $\text{Dom}(H_0) = D = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$H_0$  ist wesentlich s.o. auf  $D$

$\Leftrightarrow n \geq 4$

Strom  
3. + 12?

allg  $V(r)$  stetiger symmet. Potential auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$0 \leq V(r) + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \frac{1}{r^2} \leq \frac{c}{r^2} \quad c \leq \frac{3}{4}$

$\Rightarrow -\Delta + V(r)$  nicht wes. s.o. auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

mögliche  
Refinanzkriterien für  $H_0$ : im Sinne von Nishiz.

$D_{\max} = \{ \psi \mid \psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \wedge \Delta \psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$

$D_{\min} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\psi \in D_{\max} \Leftrightarrow \Delta \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$   
 $T_{\max} \psi = \Delta \psi$

$H_0$  s.o.  $\Rightarrow H_0^m$  s.o.

$H_0^m = F^{-1} |A|^{2m} F$  dom  $H_0^m = W_{2,m}$  Sobolevraum

$H = H_0 + V$   $\text{supp } V \subseteq U(\epsilon, 0)$  infinitesimal  
 $H$  s.o.

$A$  wes. s.o.  $\Leftrightarrow \bar{A}$  s.o.

$A = \bar{A}$  s.o.  $D \subseteq D(A)$  heißt Essen von  $A$   
falls  $\overline{AD} = A$

off kann man einen nicht-adj. Operator angehen d. w. s.o. ist.  $\bar{A} = A^{**}$  ist dann die eindeutig sein Erwartung von  $A$  zu sein. Die Bestimmung von  $D(A)$  kann schwierig sein. Das heißt kann off leicht ausgeh. werden. Bsp  $S(\mathbb{R}^n)$

Satz  $T \in T^*$  symmetrisch

- $T$  s.o.
- $T = \bar{T}$   $N(T^* + i) = \{0\}$
- $\omega(T, i) = \mathbb{R}$

$T a \rightarrow b \quad u \in D(T) = D(\bar{T})$   
 $\bar{T}u = iu - Tu = u$   
 $i(u, u) = (iu, u) = (Tu, u) = (u, \bar{T}u) = (u, u) = \|u\|^2$   
 $\Rightarrow u = 0$

$b \rightarrow c \quad \omega(T, i)$  dicht  
 $\omega(T, i) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}e \mathbb{R}^2 + i \mathbb{R} \mathbb{R}^2 \Rightarrow \omega(T, i)$  dicht  
da  $T$  adj.

$c \rightarrow a \quad \eta \in D(T) \quad (T-i)\eta = (T^*-i)\eta$   
 $D(T) \subseteq D(T^*) = \{ \eta \mid \eta \in D(T^*) \}$   
 $(T^* - i)\eta = 0 \Rightarrow \eta \in D(T)$

Cor  $T \in T^*$  symmet.

- $T$  w. s.o.
- $N(T^* + i) = \{0\}$
- $\omega(T, i)$  dicht in  $\mathbb{R}$

Lie Gruppen Lie Algebren

$G$  zucht. Lie Gruppe  
 $U(t)$  offene Umgeb. von  $e \Rightarrow$   
 $U(t)$  erzeugt  $G$

$\Gamma H = \langle U(t) \rangle$  Untergruppe v.  $G$   $H = \cup_{t \in \mathbb{R}} U(t)$  offen  
 $n \in H$   
 $G = \coprod_{x \in \mathbb{R}} g_x \cdot H$   $0$  zucht.  $\rightarrow H \in G$

$U(t) = U(t)^{-1} \circ \text{Id} \cdot A$

$F(t)$   $\mathbb{R}$  Algebra d.  $C^\infty$  Funktionenräume  
 $F(t) = f(t)/n$   $g(t) = \{ f | f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ s. } C^\infty \}$   
 $f \cdot g \Rightarrow \int U(t) f + V = g \cdot U$   
 $D_x: F(t) \rightarrow \mathbb{R}$   $I$  linear  $II$   $D_x f \cdot g = f(t) D_x g + D_x f \cdot g(t)$  }  $\mathbb{R}$  Derivation  $Der(F(t), \mathbb{R}) = T(t) \cong \mathbb{R}^n$

Tangentialraum als Raum von Differentialoperatoren

$\alpha: I \rightarrow M$   $\alpha(t_0) = a$  Kurve in  $M$   
 $D_0(f) = \frac{df(\alpha(t))}{dt} \Big|_{t=0}$   $D_0 \in Der(T(a), \mathbb{R})$   $T(a) = T_a M = \{ D_0 \}$   
 $= \{ \xi \in C^1(M, \mathbb{R}) | \xi(t_0) = a \} / n$   
 $\xi \sim \eta \Leftrightarrow \frac{d(\xi - \eta)(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(\xi - \eta)(t)}{dt} \Big|_{t=0}$

Tangentialraum als Äquivalenzklassen von Kurven

$T M = \coprod_{U \in \mathcal{U}} U \times \mathbb{R}^n / (a, v) \sim (a, P \cdot P^{-1} v)$  as  $U \cap U' \neq \emptyset$   
 $P_{U \cap U'} = P' \cdot P^{-1}$

Tangentialbündel

$f: M \rightarrow N$   
 $f_* T(a) \rightarrow T(f(a))$   $f_* D_0(g) = D_0(f \circ g) = \frac{d}{dt} g \circ f(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = D_{f \circ \alpha}(g)$   
 $D_0 \mapsto D_{f \circ \alpha}$

$f_*$   
 $\downarrow$

$VF(M) = Der(F(M), F(M))$  vektorfeld  $f_* A(g) = A(g \circ f) \cdot f^{-1}$   $f_*: Der(F(M) \rightarrow F(N)) \rightarrow Der(F(N) \rightarrow F(N))$   
 $f: M \rightarrow N$

$L(G)$  linksinvariante Lie Algebra  $L(a) \subseteq VF(G)$  Unteralgebra d. Dimension  $n$

$Hor(M, G)$  Menge d. 1-param. UG von  $G$

$L G \cong Hor(\mathbb{R}, G)$   $\Gamma \Lambda: Hor(\mathbb{R}, G) \rightarrow L G$   
 $\Lambda \alpha(t) = \frac{d}{dt} \alpha(t) \Big|_{t=0}$   
 $\Lambda$  injekt, surj. Homomorph.

$exp: L G \rightarrow G$   $x \mapsto \Lambda^{-1} x(1)$

für analyt. Mannigf.  $f(exp(tX)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} f^{(m)}(exp(tX))$   $f$  klein

$\exists U(0) \subseteq L G$   $V(0) \subseteq G$   $exp: U(0) \xrightarrow{\text{diff'bar}} V(0)$

$G_1 \cong G_2 \Leftrightarrow L G_1 \cong L G_2$   $\Gamma G_1 \cong G_1$   $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$   
 $\varphi_*: L G_1 \rightarrow L G_2$   
 $L G_1 \cong L G_2$   
 $U_1 \cong U_2$   
 $\exp \downarrow \exp$   
 $U_1 \cong U_2$   
 $G_1 \cong G_2$

$Ad: G \rightarrow GL(L G)$   
 $x \mapsto (C_x)_*$

$C_x: a \rightarrow x \circ a \circ x^{-1}$

adjungierte Darstellung von  $G$  in  $L G$

$ad: L G \rightarrow GL(L G)$   
 $x \mapsto [., x]$

adjungierte Darst. von  $\mathfrak{g}$  in  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$

① Klasse v. Obj.  
 ②  $V(x, Y) = \text{hom}(x, Y)$  Morphismen  
 ③  $f \in \text{hom}(x, Y)$ ,  $g \in \text{hom}(Y, Z) \Rightarrow g \circ f \in \text{hom}(x, Z)$   
 mit a) Assoziativität b)  $\exists$  Identität Kategorie

**Bsp**  
 •  $\mathcal{T}$  = Klasse d. topol. Räume  
 $\text{hom}(X, Y)$  Menge d. stetig. Funkt.  $X \rightarrow Y$   
 •  $\mathcal{S}$  = Klasse aller Mengen  
 $\text{hom}(X, Y)$  Menge d. Funkt. von  $X \rightarrow Y$   
 •  $\mathcal{G}$  = Klasse aller Gruppen  
 $\text{hom}(X, Y)$  Menge d. Homomorphismen

④  $C_1, C_2$  Kategorien  
F kovarianter Funktor  $\Leftrightarrow$   $F: C_1 \rightarrow C_2$  Funktion  
 $(f: X \rightarrow Y) \mapsto F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$   
 a)  $F(h \circ k) = F(h) \circ F(k)$   
 b)  $F(1_X) = 1_{F(X)}$   
F kontravarianter Funktor  $\Leftrightarrow$  b)  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

**Bsp**  
 $\mathcal{M}_K$  Kategorie d. UR über  $K$   
 $D: \mathcal{M}_K \rightarrow \mathcal{M}_K$   $D(V) = V^*$   
 $D(f) = f^*$  Kontravarianter Funktor  
 •  $\mathcal{G}$  mit Funktor  $C: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$   $C(0) = \langle [g_1, g_2] \rangle$   
 • Vergiss Funktor Bsp  $\mathcal{M}_\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_\mathbb{Z}$   
 $\mathcal{M}_\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{G}$   
 $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S}$

$\varphi: T_1 \rightarrow T_2$   $T_1, T_2$  Funktoren  $C_1 \rightarrow C_2$   
 $T_1(X) \xrightarrow{\varphi(X)} T_2(X)$   $T_1: C_1 \rightarrow C_2$   
 $T_2: C_1 \rightarrow C_2$   
 $\downarrow T_1(f) \quad \varphi(f) \quad \downarrow T_2(f)$   
 $T_1(Y) \xrightarrow{\varphi(Y)} T_2(Y)$   
naturliche Transformation

**BSP**  
 $C_1 = C_2 = \overline{\mathcal{M}}_K$   
 $T_1$  Identitäts funktor  
 $T_2(V) = V^{**}$

$X \xrightarrow{\varphi(X)} X^{**}$   
 $\downarrow \quad \downarrow f^{**}$   
 $Y \xrightarrow{\varphi(Y)} Y^{**}$

$\varphi(X), \varphi(Y)$  Isomorphismen  
 $f$  lineare Abb.  
 $\Rightarrow f$  isom.  $f^{**}$   
 $\varphi$  bi  $f \mapsto f^{**}$  Isomorphismus  
 denn  $f^{**} = \varphi(X)^{**} \circ f \circ \varphi(Y)$   
 $f^{**}(x^{**}) = \varphi(X)^{**}(f(\varphi(Y)(x))) = \varphi(X)(f(x)) = (f(x))^{**}$

C Kategorie  
 mit Inklusionsmorphisamen

Kategorie von Paaren  $(X, X')$  wobei  $X' \subset X$   
 $(f, f')$  mit  $(f, f') : (X, X') \rightarrow (Y, Y')$   
 $f : X \rightarrow Y$   
 $f' : X' \rightarrow Y' \quad f'|_{X'} = f|_{X'}$

~~$(X, X') \sim (X, X')$~~

$f : X \rightarrow Y \sim g : X \rightarrow Y \iff f$  homotop  $g$

d.h.  $\exists F : X \times I \rightarrow Y$

$$\begin{aligned} F(0) &= f \\ F(1) &= g \end{aligned}$$

Beh  $[C_n \text{ ist Kategorie}] \quad C_n^X, C_n^Z$  gleichmächtig

$$o : [X, Y] \times [Y, Z] \rightarrow [X, Z]$$

asso. hier  
 Eins hier

$$f \circ g \in [X, Z]$$

$$e : (Y, B) \rightarrow [(X, A), (Y, B)] \quad \text{Aquivalenz von Mengen}$$

# Kompakte Operatoren

$X, Y$  norm. Räume  $A: X \rightarrow Y$  linear  
 $A$  kompakt  $\Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R}) M$  beschr.  $\Rightarrow A(M)$  rel. kompakt

Sätze  
 it. f. Komp  
 wachse  
 starke Konv.

1)  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  beschr. lin. Operat.  
 $\dim R(X) < \infty \Rightarrow A$  kompakt

klar da  
 in endlichdim  
 Räumen  
 rel. komp  $\Rightarrow$  beschr.

$\sup \|Ax\| = \|A\|$   
 $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$   
 d.h.  $A$  stetig

2)  $K \in \mathcal{K}(X, Y)$   
 $x_n \rightarrow x \Rightarrow Kx_n \rightarrow Kx$

prox  
 andl  
 n. Operat

3)  $X$  separable Hilbertraum  
 $K \in \mathcal{K}(X, Y) \Rightarrow (\exists K_\varepsilon) \|K - K_\varepsilon\| < \varepsilon$  Rang  $K_\varepsilon < \infty$

4)  $K \in \mathcal{K}(X, Y)$   $\omega(K)$  abgeseh.  $\Rightarrow \dim \omega(K) < \infty$

5)  $K \in \mathcal{K}(X)$  (i)  $\dim \ker(\lambda I - K) < \infty$   
 $\lambda \neq 0$  (ii)  $\omega(\lambda I - K)$  abgeseh.

erhalten sei  
 Kernel.

6)  $K \in \mathcal{K}(X)$   $\omega(\lambda I - K) = X \Leftrightarrow N(\lambda I - K) = \{0\}$

7)  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$   $A^* \in \mathcal{L}(Y', X')$   
 $N(A^*) = (\omega(A))^\perp = \{f \in Y' \mid f(y) = 0 \ (\forall y \in \omega(A))\}$   
 $N(A) = {}^\perp(\omega(A^*)) = \{x \in X \mid g(x) = 0 \ (\forall g \in \omega(A^*))\}$

## $\lambda I - A$ bij

$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \}$   $\omega(\lambda I - A) = X$   
Resolventenmenge  $(\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda$  Resolvente

$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$  Spektrum von A

$\lambda$  Eigenwert von  $A$   $(A - \lambda I)x = 0$   
 hat Lösung  $\neq 0$

Spektrum  
 Eigenwerte  
 Komp. Operat.

$K \in \mathcal{K}(X) \Rightarrow \sigma(K) = \{ \text{Eigenwerte} \}$

wie bei  
 endl. dim Operat.

$\{ \text{Eigenwerte} \} \subseteq \sigma(A)$  da  $(\lambda I - A)^{-1} \notin \mathcal{L}(X)$  für  $\lambda$  Eigenwert

$\sigma(A) \subseteq \{ \text{Eigenwerte} \}$   $\Gamma \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \omega(\lambda I - A) \neq X$   
 $\Rightarrow N(\lambda I - A) \neq \{0\}$   
 $\Rightarrow \lambda$  Eigenwert

diskrete  
 Menge v.  
 EW bei Komp. Op

$K \in \mathcal{K}(X) \Rightarrow \sigma(A)$  abz. mit höchst. einem HP  $\lambda = 0$

S.A. Op  
 $\Rightarrow$  reelle EW

$A = A^* \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

$N \subset H$  inv. bzgl.  $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$   
 $\Rightarrow N^\perp$  inv. bzgl.  $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$

Rekursionsatz

$K = K^* \in \mathcal{K}(H)$   
 $\Rightarrow H = N(K) \oplus \overline{\omega(K)}$

abz. orth. Basis  $e_1, \dots, e_n, \dots$   
 $\|Ae_n\| \rightarrow 0$   $A_n$  reell

beschränkte, selbstadj. Operatoren

Spektralsatz :

$$A^* = A \in \mathcal{L}(H)$$

$$\Leftrightarrow \exists \{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \text{ Spektralschranke}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda = A$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k (E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}})$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  Zerleg.  
d. Intervalls  $[m, M]$

$$E_{\lambda_k} = e_{\lambda_k}(A)$$

$C[m, M]$

$\mathcal{L}(H) = \{A: H \rightarrow H \mid A^* = A, \|A\| \in [m, M]\}$

Algebrahomomorphismus

kommut. Algebra dem  $A \cdot B = (A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$

kommut. Algebra

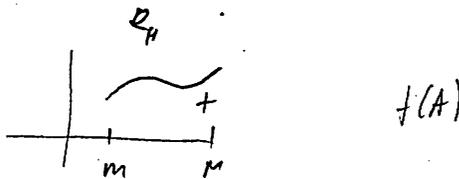
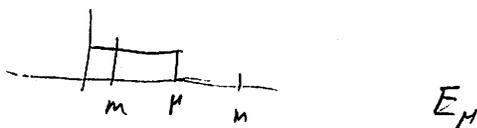
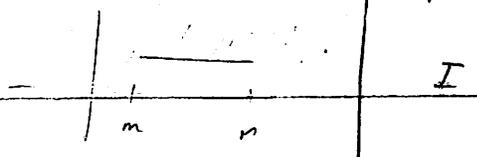
$$1 \leftrightarrow I$$

$$1 \leftrightarrow A$$

$$f(\lambda) \leftrightarrow f(A)$$

$$e_\mu \leftrightarrow e_\mu(A) = E_\mu$$

$$A = \sum_{k=1}^n \lambda_k (E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}})$$



$$\lambda = f(\lambda) = \int_m^M \lambda \cdot d e_\mu$$

$$= \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_{\lambda_k} - e_{\lambda_{k-1}})$$

$$\longleftrightarrow \int_m^M \lambda \cdot d E_\mu$$

$$\longleftrightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k (E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}})$$

$$B = f(A) \leftrightarrow \sum f(\lambda_k) E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}$$

$$f(A) \leftrightarrow \sum f(\lambda_k) e_{\lambda_k} - e_{\lambda_{k-1}}$$

$$A \leftrightarrow \sum \lambda_k E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}$$

$$\lambda \leftrightarrow \sum \lambda_k e_{\lambda_k} - e_{\lambda_{k-1}}$$

$$\sum \lambda_k E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}} \rightarrow \int_m^M \lambda dE$$

$$\sum \lambda_k e_{\lambda_k} - e_{\lambda_{k-1}} \rightarrow \int_m^M \lambda d e_\mu$$

$$= A$$

Tychonof  $\Rightarrow$  Auswahlaxiom

$$(X_\alpha \text{ kompakt} \Rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \text{ kompakt}) \Leftrightarrow (X_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \neq \emptyset)$$

$\Gamma$  Betrachte  $X_\alpha \neq \emptyset \quad \alpha \in I$  und  $u \in \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$  Setze  $Y_\alpha = X_\alpha \cup \{u\}$

Auf  $Y_\alpha$  wählen wir folgende Topologie:  $G \subseteq Y_\alpha$  offen  $\Leftrightarrow G = \{u\} \vee G$  offen in coendl. Topol. von  $X_\alpha$

$Y_\alpha$  ist kompakt:  $\{G_i\}_{i \in I}$  offene Überd.  $G_0$  überdeckt alle bis auf endl. viele  $G_n, G_0$  überdeckt genau  $Y_\alpha$

$\prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$  ist kompakt (Tychonof)

$F_\alpha := p_\alpha^{-1}(X_\alpha) \subseteq \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$  ist abgeschlossen weil  $X_\alpha \neq \{u\}$  offen

zeigen  $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \emptyset$  genügt aber  $F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n} \neq \emptyset$  wegen Kompaktheit

Betrachte  $F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_n} \quad x \in \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$  mit  $x(B) = \begin{cases} \text{kol. Element in } X_{\alpha_i} & B = \alpha_i \\ u & \text{sonst} \end{cases}$

$p_{\alpha_i}(x) \in X_{\alpha_i} \Rightarrow x \in p_{\alpha_i}^{-1}(X_{\alpha_i}) = F_{\alpha_i} \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1, \dots, n} F_{\alpha_i} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists x \in \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \Rightarrow p_\alpha(x) \in X_\alpha \Rightarrow x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \Rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \neq \emptyset$

Auswahlaxiom  $\Leftrightarrow$  Zornischer Lemma

$$(X_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \exists F \quad F(X_\alpha) \in X_\alpha) \Leftrightarrow (P, \leq) \text{ part. geordnet, } \forall C \subseteq P \text{ totalgeordnet} \\ (\exists \text{ oberer Schranke}) \Rightarrow P \text{ hat maximales Element}$$

$\Rightarrow$  werden eine induktiv geordnete Menge konstruieren welche zum Maximieren führt:

Induktiv definieren wir:  $a_\alpha =$  Element in  $P \quad a_\alpha > a_\beta$  wenn  $\alpha > \beta$   
 $C_\alpha = \{a_\beta \mid \beta > \alpha\}$  ist eine induktiv geordnete Menge  
wenn strengtotal geordnete Schranke

$a_\alpha$  können wir immer wählen wegen dem Auswahlaxiom.

Nach Voraussetzung exist. eine obere Schranke für  $C_\alpha, a_\alpha$

$\Rightarrow a_\alpha$  ist das Maximale Element von  $P$

" $\Leftarrow$ "  $\Gamma \{X_\alpha\}_{\alpha \in I} = \{ \text{Familie nichtleerer Mengen} \}$  Suchen Auswahlfunktion auf  $\{X_\alpha\}$

$P = \{f : f \text{ ist eine Auswahlfunktion für ein } Z \subseteq I\}$

$(P, \leq)$  ist induktiv geordnet:  $Z = \{\alpha_\beta\}_{\beta \in I} \quad \bigcup_{\beta \in I} X_{\alpha_\beta} = Z^*$  ist obere Schranke

$\Rightarrow \exists$  maximales Element und das ist  $S$

Zornisches Lemma  $\Rightarrow$  Lemma von Tarski

$$\text{Zorn} \Rightarrow \text{jeder Filter } F \text{ auf } Y \text{ kann zu Ultrafilter erweitert werden}$$

$\Gamma C$  die Familie aller Filter  $G$  auf  $Y$ , welche  $F$  erweitern  
 $\text{Zorn} \Rightarrow \exists$  Maxim. Element  $G$  in  $C$

zeigen:  $G$  ist Ultrafilter

$\Gamma$  kontraposit.  $(\exists E \subseteq Y) \exists \emptyset \neq E' \subseteq E$

$G^* = \{Z \subseteq Y \mid \exists U \subseteq Z \in G\} \supseteq G$  ist Filter  $\neq$  zur Maxim.

Lemma 1

$X$  kompakt  $\Leftrightarrow$  jeder Ultrafilter konvergiert

Lemma 2

$X$  kompakt  $\Leftrightarrow (\forall F \text{ in } \mathcal{A}) \exists \text{HP von } F$

Bew 1.2

" $\Rightarrow$ "

$\mathcal{F}$  Filter Betrachte  $\{\bar{S} : S \in \mathcal{F}\}$

$X$  komp.  $\Rightarrow \bigcap_{S \in \mathcal{F}} \bar{S} \neq \emptyset$ , weil endl. Durchschn  $\neq \emptyset$

" $\Leftarrow$ "

$\mathcal{C} :=$  Familie abgeschl. Mengen in  $X$  mit  $\cdot$  je endl. viele haben nicht leeren Durchschnitt

Betrachte Menge diese endl. Durchschnitte. Dies ist eine Filterbasis  $\mathcal{F}_0$

$\mathcal{F}_0$  erzeugt Filter  $\exists \text{HP} \Rightarrow \bigcap \{A : A \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset \Rightarrow X$  komp.

Bew 1.4

" $\Rightarrow$ "

$\exists \text{HP}$  Ultrafilter konv. gegen HP (wegen Hausdorff)

" $\Leftarrow$ "

jeder Ultrafilter konv.  $\Rightarrow$  Für jeden Filter  $\exists$  Ultrafilter

$\Rightarrow$  jeder Filter hat HP  $\Rightarrow X$  Komp (Lemma 2)

Lemma 3

$F \rightarrow x$  in  $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha \Leftrightarrow p_\alpha(F) \rightarrow x_\alpha \quad \forall \alpha \in I$

" $\Rightarrow$ "

$p_\alpha(F)$  ist Ultrafilter auf  $X_\alpha \quad F \rightarrow x \Rightarrow p_\alpha(F) \rightarrow p_\alpha(x) = x_\alpha$

" $\Leftarrow$ "

$p_\alpha(F) \rightarrow x_\alpha \quad (\forall \alpha)$

$(\exists x \in X) p_\alpha(x) = x_\alpha \quad \forall \alpha \Rightarrow F \rightarrow x$

denn  $p_\alpha(F) \rightarrow x_\alpha$  Betrachte  $U$  offen in  $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha \quad x \in U$

$\Rightarrow U = \bigcap_{j \in J} G_j$  für ein  $J \subseteq I$   $G_j$  offen in  $X_{j_0}$

$p_{j_0}(F) \rightarrow x_{j_0} \quad N_{x_j} \in p_{j_0}(F)$  wissen  $x_j \in G \in N_{x_j} \subseteq p_{j_0}(F)$

$\Rightarrow U = \bigcap_{j \in J} G_j \in F$

$U$  belieb. in  $N_x \Rightarrow N_x \in F \Rightarrow F \rightarrow x$

Lemma von Tarski  $\Rightarrow$  Tychonoff

$F$  Ultrafilter in  $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$  konvergiert

$p_\alpha(F)$  Ultrafilter in  $X_\alpha$  komp.  $p_\alpha(F) \rightarrow x_\alpha$  da  $p_\alpha(F)$  Ultrafilter (Lemma 3)

$F \rightarrow x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$  mit  $p_\alpha(x) = x_\alpha$

$F$  Ultrafilter in  $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$   
(  $p_\alpha(F)$  ) (  $p_\alpha(F)$  )

$F_n$  Fareyfolge  
 $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$  zwei sukzessive Elemente  
 $\Rightarrow ba' - ab' = 1$

$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$  sukzessive Elem. aus  $F_n$   
 $\frac{a''}{b''} = \frac{a+a'}{b+b'}$

$(a, m) = 1$   $a, m$  Fermat-Zahl

$a^{\phi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$   
 $(a, m) = 1$

$\phi(n)$  multiplikative Arithm. Funkt.  
 $\phi(n) = n \cdot \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$   
 $n = \sum_{d|n} \phi(d)$  Differenzierung

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{p}$  (\*)  
 $(a_0, p) = 1$   $n \geq 1$   $p$  prim  
 höchst.  $n$  Lösungen

$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

$\exists x, y \quad bx - ay = 1$  da  $(a, b) = 1$   
 $n - b \leq y \leq n$   $y$  kann frei modulo  $b$  gewählt werden

es folgt  $(x, y) = 1$   $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by} > \frac{a}{b}$

$\frac{x}{y} = \frac{a'}{b'}$  dann dann gilt  $x - a' = y - b'$   
 mit  $ba' - ab' = 1$  ged.

$\frac{x}{y} \neq \frac{a'}{b'}$   $\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{x}{y} - \frac{a'}{b'} + \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} > \frac{1}{b'y} + \frac{1}{b'b} = \frac{b+y}{ybb'} > \frac{1}{ybb'}$

oder aber:  $\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by}$

$a''b - ab'' = 1$   
 $a'b'' - b'a'' = 1$

$a''(b+b') = b''(a+a')$

$\exists m \quad m|n \quad m|n+k$

$n|n+k-2$   $2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}})^2 - 1$  versch. von  $2^{2^n} - 1$

$m|n \quad m|n+k \Rightarrow m|k \Rightarrow m=1$

$S_1, \dots, S_{\phi(m)}$  primitives Restsystem  
 $\Rightarrow a S_1, \dots, a S_{\phi(m)}$  ebenfalls  
 $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

$a$  durchläuft URS mod  $m$   
 $a'$  durchläuft URS mod  $m'$   
 $a m' + a' m$  durchläuft URS mod  $m m'$   
 $a m' + a' m \equiv a_2 m' + a_2' m \pmod{m m'}$   
 $\Rightarrow a_2 m' \equiv a_2' m' \pmod{m}$

$\phi(p^m) = p^m - p^{m-1} = p^m (1 - \frac{1}{p})$

(1) heißt keine Lösung  
 (2) heißt eine Lösung  $x_1$   $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \pmod{m}$   
 (1) - (2)  $a_0(x^2 - x_1^2) + a_1(x - x_1) = 0$

$f(x) = x^{p-1} - 1 = (x-1) \cdot (x^{p-2} + \dots + 1) \equiv 0 \pmod{p}$  für  $x = 1, \dots, p-1$   
 Polynom von Grad  $p-2$   
 $\Rightarrow p | a_0$  heißt  
 $x^{p-1} - 1 = (x-1)(x-2) \dots (x-(p-1)) + p \psi(x)$   $\forall x \neq p$   
 $1 + (p-1)! \equiv 0 \pmod{p}$

Diophantische Approximation

$\xi$  irrational  
 $\Rightarrow \exists \omega$  unendl. ration. Zahlen  $\frac{a}{b}$   
 $|\xi - \frac{a}{b}| < \frac{1}{15b^2}$

vgl. HUA S. 425

$\Gamma$   $a, d, 1 \quad 0 < \xi < 1$   $\frac{a}{b} < \xi < \frac{a'}{b'}$  Farey einhochklung  
 $\omega = \frac{b'}{b}$

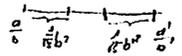
1. Fall  $\omega > (1+\sqrt{5})/2$   $\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb'} = \frac{1}{b^2 \omega}$   
 $\omega < (\sqrt{5}-1)/2$

zeigen:  $(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} + \frac{1}{15b^2})$   $(\frac{a'}{b'} - \frac{1}{15b'^2}, \frac{a'}{b'})$  überlappen

$\frac{a}{b} - \frac{1}{15} (1 + \frac{1}{\omega^2}) = -\frac{1}{15\omega^2} (\omega^2 - 15\omega + 1)$   
 $= -\frac{1}{15\omega^3} (\omega - \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)) (\omega - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)) < 0$

$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b^2 \omega} < \frac{1}{15} (1 + \frac{1}{\omega^2}) = \frac{1}{15} (\frac{1}{b^2} + \frac{1}{b'^2})$

2. Fall  $(\sqrt{5}-1)/2 < \omega < (1+\sqrt{5})/2$   
 $b+b' > (\sqrt{5}+1)/2 \max(b, b')$



d.h.  $(\frac{a}{b}, \frac{a+a'}{b+b'})$   $(\frac{a+a'}{b+b'}, \frac{a'}{b'})$   
 überlappen nach 1. Fall

$n | (A^2 + 1) \Rightarrow \exists s, t \quad n = s^2 + t^2 \quad (s, t) = 1$

mit Hilferstiel  $a = d$   
 $\exists$  Gitter in  $\mathbb{R}^2$  mit  $\{a, b\} \in \mathbb{Z}$  und  $\text{mod } p \exists$  Untergitter von  $\mathbb{Z}^2$  mit Index  $p$   
Schnitten d. Fundamentallparallels:  $p$   
Kreis mit Radius  $r^2 = \frac{3}{2}p$  enthält nach Cauchy'schen Gitterpunkt  
da  $\pi r^2 > 4p \Rightarrow 0 < a^2 + b^2 \leq p^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = p$

$N := \lfloor \sqrt{n} \rfloor$   
 $\exists \frac{s}{N} \left| \frac{n}{N} - \frac{s}{N} \right| \leq \frac{1}{N+1} \quad 0 < s \leq N < \sqrt{n}$   
 $\frac{|As - nr|}{N+1} < \frac{n}{N+1} < \sqrt{n} \quad + < \sqrt{n}$   
 $s^2 + t^2 = s^2 + (As - nr)^2 = s^2(A^2 + 1) - 2Asrn + r^2n^2 \Rightarrow n | s^2 + t^2$   
 $0 < s^2 + t^2 < 2n$   
 $(s, t) = 1 \quad (s, t) = (s, As - nr) \quad (s, r) = 1$   
 $n = s^2 + t^2 = s^2(A^2 + 1) = 2Asrn + r^2n^2$   
 $t = s^2 \frac{(A^2 + 1)}{n} - 2Asr + r^2n \Rightarrow (s, n) = 1$

$n | A^2 + B^2 \quad (A, B) = 1$   
 $\Rightarrow s, t \in \mathbb{Z} \quad n = s^2 + t^2$

$\exists$  viele Primzahlen der Form  $4k+1$

$\Gamma \quad (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2$   
 $-1$  wählen da  $(A, B) = 1$

$\Gamma \quad 4 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot p^2 + 1$   
alle  $4k+1$  Primzahlen  
9 Primzahlen  $q = s^2 + t^2 \quad 0 < s < t \quad s = 0(14) \quad t = 1(14) \Rightarrow q \equiv 1(14)$

Quadratische Reste

$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow a \text{ QR}$   
 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p} \quad (p)$

$\Gamma \quad \Leftarrow$  Fermat  
 $\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$  besitzt höchstens  $\frac{p-1}{2}$  Lösungen (Lagrange)  
Es gibt  $\frac{p-1}{2}$  quadr. Reste und jede erfüllt Gleichung  
ein quadr. Nichtrest erfüllt Gleichung nicht

$\left(\frac{mn}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right) \left(\frac{n}{p}\right) ; \left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right) \cdot \left(\frac{-1}{p}\right)$  falls  $m = -n$

$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 & p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$

$p = 4q + 1 \quad \exists a \quad p | a^2 + 1 \Rightarrow p = s^2 + t^2$

multi Schritte mit  $\text{Odu } p-1 \Rightarrow \exists a \quad a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv -1$

Quadrato

$\exists s, t \quad n = s^2 + t^2$   
 $\Rightarrow$   $4k+3$  Primzahlen haben quadr. Exponenten

$\Gamma (a) \quad p_2 | n \Rightarrow n$  ohne prim. Darstellung

$p_2$  Primzahl  $a$   
Form  $4k+1$   
prim. Darst.  $n = s^2 + t^2$   
 $(s, t) = 1$

$\Gamma \quad p | (x^2 + y^2) \quad p \nmid x, y$   
 $\exists m, t \quad mx - ty = y$   
 $\Rightarrow \exists m \quad mx = y$   
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + m^2 x^2 = 0 \pmod{p}$   
 $\Rightarrow p | m^2 x^2 \Rightarrow m^2 = -1 \pmod{p} \quad -1 \text{ QR } \checkmark$

(b)  $p_2 \in \mathbb{Z} \parallel n \text{ c. l. t. } \Rightarrow \exists s, t \quad p_2 = s^2 + t^2$

$\Gamma \quad n = x^2 + y^2 \quad (x, y) = d$   
 $n = d^2(x'^2 + y'^2) = d^2 N \quad p^m \parallel d \quad p^{c-2m} \parallel N \quad \checkmark \text{ zu (a)}$

$\Gamma (c) \quad \Leftarrow$  L2  
ii)  $\Leftarrow$   $(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$   
 $|z_1|^2 |z_2|^2 = |z_1 z_2|^2$

$\Gamma \quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$   
 $z_i = x_1 y_i + x_2 y_j - x_3 y_3 - x_4 y_4$  Quaternionen  
Hurwitz identität

$\Gamma \quad p$  unger.  $\exists \lambda, \nu \quad 4\lambda^2 + \nu^2 = mp$   
 $\Gamma \quad \exists x, y \quad x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{nicht disj. Mengen da Zusammen probieren}$

$m_0$  kleinste zu  $m$   $m_0 > 0$   
 $p \cdot m_0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$   
 $[m_0 \text{ ungerade}] \quad m_0$  gerade  $\Rightarrow \frac{1}{2} m_0 p = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 - x_4}{2}\right)^2$   
oder  $\frac{m_0 p}{4} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} + \frac{x_3^2 + x_4^2}{4}$

Schreiben  $x_i = b_i m_0 + y_i \quad |y_i| < \frac{1}{2} m_0$  sonst  $|y_i| > \frac{1}{2} m_0 \quad x_i = (b_i + 1) m_0 + (y_i - m_0)$

$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 > 0$  hier also auch  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = m_0^2$

auch  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \equiv 0 \pmod{m_0}$   
 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = p \cdot m_0 \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = m_0^2 m_0 p$   
 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = m_0 m_0 \quad z_1 = 0 \pmod{m_0} \quad z_i = m_0 t_i \quad m_0 p = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2$

quadrat

$\forall i \exists x_1, x_2, x_3, x_4$   
 $n = \sum_{i=1}^4 x_i^2$



Keine Verallgemeinerung d. QR

m ungerade

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \prod_{i=1}^m \left(\frac{n}{p_i}\right)$$

$$m = \prod_{i=1}^r p_i \quad (n, m) = 1$$

Jakobi symbol

$$\left(\frac{-1}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \frac{p^2-1}{8} \pmod{2}$$

$$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$$

$$\left(\frac{u^2v^2-1}{8}\right) = \frac{u^2-1}{8} + \frac{v^2-1}{8} \pmod{2}$$

n, m ungerade

$$\left(\frac{n}{m}\right) \left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2} \frac{m-1}{2}}$$

$$\left(\frac{n}{m}\right) \left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{p_i} \left(\frac{n}{p_i}\right) \prod_{q_j} \left(\frac{m}{q_j}\right)$$

$$m = \prod q_j$$

$$n = \prod p_i$$

$$= \prod_{p_i} \left(\frac{q_j}{p_i}\right) \prod_{q_j} \left(\frac{p_i}{q_j}\right)$$

$$= \prod_{p_i} \left(\frac{q_j}{p_i}\right) \left(\frac{p_i}{q_j}\right) = (-1)^{\frac{p_i-1}{2} \frac{q_j-1}{2}} = (-1)^{\frac{p_i q_j - 1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)$$

Multiplikative Funktionen  
vollständig multiplikative Funkt.

Die multiplikativen Funktionen  
bilden einen Monoid.  
Die vollständig multiplikat.  
Funktionen sind eine Untermonoid

Gamma-Operation: Multiplikation  
Einselement  $1(n) = 1$   
 $= E_0(n)$

Bsp

- $\Delta(n) := \delta(n, 1)$  vollst. multiplikat.
- $E_\lambda(n) := n^\lambda$  vollst. multiplikat.
- $u(n) := \begin{cases} 1 & n=1 \\ 1 & \text{wenn } n \text{ durch } p^2 \text{ teilbar} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  multiplikat.
- $\varphi(n) := \sum_{d|n} 1$  multiplikat.
- $d(n) := \sum_{d|n} 1$  multiplikat.
- $g(n) := \sum_{d|n} d^\lambda$  multiplikat.
- $V_p(n) := p^{-\alpha}$  falls  $p^\alpha || n$  vollst. multipl.
- $V_\omega(n) := |n|$  vollst. multiplikat.

Möbius

Euler

Teilerfunktion

p-adisch Bewertung

Normbewertung

$$\varphi(n) = n \prod_{d|n} \left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

$$= n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$E_\lambda(n) = n^\lambda \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^\lambda}\right)$$

$$= n^\lambda \prod_{d|n} \frac{\mu(d)}{d^\lambda}$$

$$= \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^\lambda$$

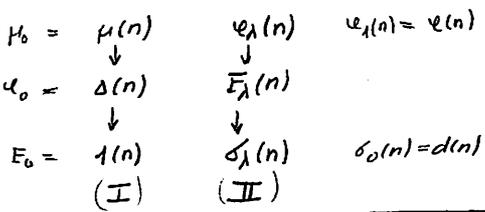
nicht mehr  
vollständig multipl.  
funktionen aus  
den

$g, h$  multiplikat.  
 $\Rightarrow f(n) = \sum_{d|n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right)$  multiplikat.

Faltung

Möbiustrafe

$g(n) := \sum_{d|n} f(d)$  Möbiustrafe  
 $f(n) := \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$  inverse Möbiustrafe



kann man alleine mit den Funktionen  $E_\lambda(n), V_p(n)$   
Multiplikation, Faltung und Möbiustrafe  
alle multiplikativen Funktionen erzeugen?

Dirichletreihen  
Möbiustrafe

$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$  erzeugende Funktion von  $f$

$f(n)$  multiplikative Funktion  
 $\Rightarrow F(s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right)$

Gamma formal ausmultiplizieren und Koeff. vergleichen:

$$\frac{f(n)}{n^s} = \frac{f(p_1^{e_1})}{p_1^{e_1 s}} \cdot \frac{f(p_2^{e_2})}{p_2^{e_2 s}} \dots \frac{f(p_m^{e_m})}{p_m^{e_m s}}$$

$f(n)$  vollst. multiplikat. Funktion  
 $\Rightarrow F(s) = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{f(p)}{p^s}\right)^k\right) = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}$

Bsp  $f(n) = 1$   
 $\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$

nennen  $F(s) = \hat{f}(s)$

$g \times h(n) = \sum_{d|n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right)$  Faltung

$\widehat{f \cdot g}(s) = \widehat{f \times g}(s)$

$$\Gamma \widehat{f \cdot g}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d|k} \frac{f(d)}{d^s} \cdot \frac{g\left(\frac{k}{d}\right)}{\left(\frac{k}{d}\right)^s}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{d|k} f(d) g\left(\frac{k}{d}\right)\right) \frac{1}{k^s} = \widehat{f \times g}(s)$$

Möbiustrafe

$\widehat{M(f)}(s) = \zeta(s) \cdot \hat{f}(s)$

$$\Gamma \widehat{M(f)}(s) = \sum_n \sum_{d|n} f(d) n^{-s}$$

$$\zeta(s) \cdot \hat{f}(s) = \sum_n \left(\sum_m m^{-s}\right) \cdot f(n) n^{-s}$$

$$= \sum_n \sum_{d|n} f(d) n^{-s}$$

$\widehat{g}(s) = \zeta \cdot \hat{f}(s)$   
falls  $g$  Möbiustrafe von  $f$

Bsp

$d(n) = M(1(n))$   
 $\widehat{d}(s) = \zeta(s) \cdot \hat{1}(s) = \zeta^2(s)$

Bsp

$\hat{1}(s) = \frac{1}{\zeta(s)}$

Die Erzeugendenfkt. d.  
Möbiustrafebildung ist  
das Reziproke der Zetafunktion!

Können die bekannten multiplikat. Funktionen so einordnen:

Erzeug.fkt. für Folgen  $a_n \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$   
 Erzeug.fkt. für Multiplikal.fkt  $f(n) \sum_{n=0}^{\infty} f(n) n^{-s}$   
 charakterist. charaktersumme  $S(a, \lambda) = \sum_{n=1}^m \lambda(n) e^{2\pi i a n}$

$\mu_{\lambda}(n)$	$\mu_0(n) = \mu(n)$	Möbius	← geschlossene Form?
↓			
$\varphi_{\lambda}(n)$	$\varphi_1(n) = \varphi(n)$	Euler	
↓	$\varphi_0(n) = \Delta(n)$	Delta	
$E_{\lambda}(n)$	$E_0(n) = 1(n)$	Eins	
↓			
$\delta_{\lambda}(n)$	$\delta_1(n) = \delta(n)$	$\sum$ Teilw	
	$\delta_0(n) = d(n)$	$\#$ Teilw	

Wie bekommt man aus der Erzeugendenfunktion f die Funktion f zurück?

Analogie zwischen Dirichlettrafo  $f(n) \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} f(n) n^{-s}$  und Laplacetrafo  $f(t) \rightsquigarrow \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$

§ Dirichlet funktion

Dirichlettrafo	Laplace trafo	
$D: f(n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f(n) n^{-s} = Df(s)$	$L: f(t) \mapsto \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = Lf(s)$	Transformation
$f \cdot g(n) = f(n) \cdot g(n)$	$f \cdot g(t) = f(t) \cdot g(t)$	Multiplikation
$f * g(n) = \sum_{d n} f(d) g(\frac{n}{d})$	$f * g(s) = \int_0^s f(t) g(s-t) dt$	Faltung
$f'(n) = \sum_{d n} f(d) = 1 * f$	$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \delta' * f$	Möbiustraf - Differenti ( $\delta'$ ist die Ableitung der Distribution $\delta(x)$ )
$\int f(n) = \sum_{d n} \mu(d) f(\frac{n}{d}) = u * f$	$\int f(s) = \int_0^s f(t) dt = 1 * f$	inverse Möbiustraf - Integration
$Df \cdot Dg = D(f * g)$	$Lf \cdot Lg = L(f * g)$	Transformation d. Faltung
$D(f \int) = \frac{Df}{s}$	$L(f \int) = \frac{Lf}{s}$	Transformation d. Integration
$D(f') = Df \cdot s$	$L(f') = s \cdot Lf$	Transformation d. Differentiation
$(f * g)' = f' * g' \quad \int f * g = \int f * \int g$	$(f * g)' = f' * g' \quad \int f * g = \int f * \int g$	Linearität der Differentiation & Integration
$D\mu = \frac{1}{s}$	$L1 = \frac{1}{s}$	Möbiustraf funktion spielt Rolle der Eins
$1 = \mu'' \quad \Delta = \mu' = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\delta' = \delta'' \quad \delta = 1'$	Deltafunktion (als Distribution)
$D\Delta = 1$	$L\delta(s) = 1$	
$D1 = s$	$L\delta'(s) = s$	
$f''(n) = \sum_{a n} f(a) d(\frac{n}{a})$	$f''(n)$	Eindimensionale Laplaceoperator
$\sum_{d n} f(d) = f(n) \quad f(1) = 1$	$f' = f \Rightarrow f = e^t$	Differentialgleichungen
für $f(1) = 0$ wohl $f \equiv 0$	$f(1) = 1$	
	$L(e^{at}) _{t=0} = \frac{1}{s+a}$	

$\frac{1}{s} \sim \mu$	$1 \sim \frac{1}{s}$
$1 \sim \Delta$	$\delta \sim 1$
$s \sim 1$	$d' \sim s$
$s^2 \sim d$	$\delta'' \sim s^2$
$s^{\lambda} \sim \Delta^{\lambda}$	$\delta^{\lambda} \sim s^{\lambda}$
$s(s-\lambda) \sim E_{\lambda}$	$\delta(-\lambda) \sim (s-\lambda)$
$\sim u_{\lambda}$	
$\sim \varphi_{\lambda}$	
$E_{\lambda}$	
$\delta_{\lambda}$	

$\sum_{d|n} f(d) = a \cdot f(n)$

wir definieren  $K_\mu^\lambda := \zeta^{\lambda-1}(s) \cdot \zeta(s-\mu)$

Diese Funktion soll die Dirichlettransformierte der Funktion  $k_\mu^\lambda(n)$  sein:  $k_\mu^\lambda(s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_\mu^\lambda(n) n^{-s}$

Spez  $K_0^1 = \zeta^1(s)$

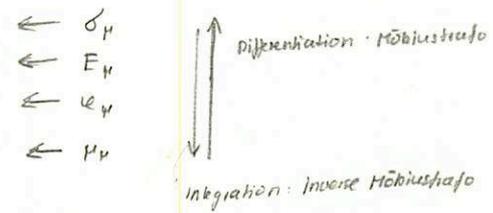
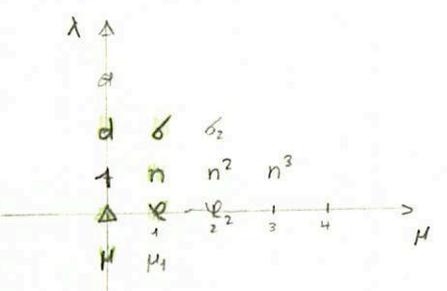
$K_\mu^1 = \zeta(s-\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\mu-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^\mu \cdot n^{-s}$  also  $k_\mu^1 = E_\mu$

$K_\mu^2 = \zeta(s) \cdot \zeta(s-\mu)$   $k_\mu^2 = E_\mu' = \delta_\mu$  speziell:  $k_1^2 = \delta$   $k_0^2 = d$

$K_\mu^0 = \frac{\zeta(s-\mu)}{\zeta(s)}$   $k_\mu^0 = \int E_\mu = \varphi_\mu$  speziell:  $K_1^0 = \varphi$  Euler  $K_0^0 = \Delta$  Delta

$K_\mu^{-1} = \frac{\zeta(s-\mu)}{\zeta^2(s)}$   $k_\mu^{-1} = \int \varphi_\mu = \mu_\mu$  speziell:  $k_0^{-1} = \mu$  Möbius

wir können also alle bekannten zahlentheor. Funktionen in  $k_\mu^\lambda$  einbetten:



$\delta_2 = \sum \frac{d^2}{d \ln}$   
 $\varphi_2 = \sum \frac{\mu(d) n^2}{d^2}$   
 $\mu_1 = \sum \frac{\mu(d) \varphi(\frac{n}{d})}{d}$   
 $a_0 = \sum \frac{d(d)}{d \ln}$

indem wir mit den erzeugenden Funktionen arbeiten, können wir auch eine beliebige rechte Integration bzw. Differentiation definieren nur werden dann die Funktionen  $k_\mu^\lambda$  in nicht mehr ganzseitig werden annehmen.

Funktionen auf den gitterpunkten sind immer multiplikativ. wir haben also eine riesige klasse multiplikative Funktionen.

Problem bleibt immer noch: Wie kriegt man aus eine Funktion  $F(s)$  die Darstellung  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$  ?

könnten wir das (schnell) rechnen, so hätten wir einen <sup>(schnellen?)</sup> Test, ob eine Zahl prim ist oder nicht:

$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$  ist die Erzeugende von  $\varphi(n)$

d.h. der n-te Koeffizient  $a_n$  in der Dirichletdarstellung ist genau dann 2, wenn n eine Primzahl ist. Dieses Verfahren sieht aber rechnerisch sehr hoffnungslos aus.

Auf der andern Seite, wenn wir die Laplacetrafo anstatt der Dirichlettrafo nehmen, sieht die Erzeugendefunktion so aus

$K_\mu^\lambda = s^{\lambda-1} \cdot (s-\mu) = s^\lambda - \mu s^{\lambda-1}$

Das Analogon zu  $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$  ist  $\frac{s-1}{s} = 1 - \frac{1}{s}$ , was Laplacetrafo von  $1 + \delta$  ist.

Die Distribution  $1+d$  ist also ganz nahe verwandt mit der der Eulerfunktion  $\varphi$ .

metrie oder  
stern:

Sub von  
Minkowsky

jede beschränkte, konvexe, symmetrische, messbare Menge mit Mass  $> 0$  im  $\mathbb{R}^n$  enthält einen Gilteypunkt  $\neq 0$

$\Gamma$   $S$  konvex  $\Rightarrow \frac{1}{2}S$  konvex  $\mu(\frac{1}{2}S) = (\frac{1}{2})^n \mu(S) > 1$   
 $\Rightarrow \exists g \ x, y \ x-y=g$   
 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \in \frac{1}{2}S \Rightarrow \frac{1}{2}g \in \frac{1}{2}S \Rightarrow g \in S$   
 ↑ Symmetrie, Konvexität

Lemma von  
Birkhoff

jede messbare Menge im  $\mathbb{R}^n$  mit Mass  $> 1$  enthält zwei Punkte  $x, y: x-y$  Gilteypunkt.

$\Gamma$   $g \in \mathbb{Z}^n$  Gilteypunkt,  $S$  unsere Menge  $W_g = \{x \mid g_i \leq x_i \leq g_i + 1\}$   
 $S_g := S \cap W_g$   $S_g - g$  liegt in  $W_0$   
 $\mu(\bigcup_{g \in \mathbb{Z}^n} (S_g - g)) = \mu(S) > 1 \Rightarrow \exists x, y \in S \ x - y = g \neq 0$

cor

jede beschränkte, konvexe, symmetrische, abgeschlossene, messbare Menge mit Mass  $> 2^n$  im  $\mathbb{R}^n$  enthält einen Gilteypunkt  $\neq 0$

$\Gamma$  Betrachten  $(1 \in S)$  enthält Gilteypunkt die Eigenart einer ist nutzlos  $\mu(S) > 2^n$   $\neq$  Gilteypunkte enthält  
 $\rightarrow \exists$  zwei der Bed. die erfüllt  $\frac{1}{2}S \in S$  da  $S$  abgegrenzt.

cor

$S$  beschränkt konvex, symmetrisch, messbare Mass  $\geq 2^n$   
 $\Rightarrow S$  enthält Punkt

$\Gamma$   $S$  konvex, abgegrenzt, messb.  $\mu(S) \geq \mu(S) - 1$

wend

$A$  Gitter mit  $|A| > 0$   
 $B$  messb. konv. symm. Menge von Mass  $> 2^n |A|$   
 $\rightarrow B$  enthält einen Nullpunkt nach weiteren Punkt von  $A$ .

Satz von Minkowski über  
die Verteilung d. Prim.  
in arithmetischer Folg.

Charakteren:

$G$  endl. abelsche Gruppe  
 $\Rightarrow \hat{G} \cong G$

$\Gamma G \cong \mathbb{C}^n$   $\chi \in \hat{G}$  Basissatz ordn. von  $G: m_i$   
 $G_i$  Erzeugende von  $G_i$   $\chi_i: G_i \rightarrow e^{2\pi i / m_i}$   
 $\varphi: G \rightarrow \hat{G}$  Isomorph  
 $G_1^{a_1} \dots G_s^{a_s} \mapsto \chi_1^{a_1} \dots \chi_s^{a_s}$

Rem  $\varphi: G \rightarrow \hat{G}$   
 kanonische Isomorphismus

$\times \chi \in \hat{G} \Rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} 1 & \chi = \chi_0 \\ 0 & \chi \neq \chi_0 \end{cases}$

$\Gamma \chi \neq \chi_0$   
 $\Rightarrow \exists a \chi(a) \neq 1$   
 $\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(ag) = (\sum_{g \in G} \chi(g)) \cdot \frac{\chi(a)}{1} = 0$

diskrete  
Fourieranalyse

$f(x): G \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben  
 $\rightarrow f(x) = \sum_{\chi \in \hat{G}} a_\chi \chi(x)$  mit  $a_\chi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \chi(g)^{-1}$

$\Gamma \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) g(g) = \langle f, g \rangle$  ist Skalarprodukt  
 $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_j(g) = \delta_{ij}$   $\chi_i$  Basis

Direkte  
L-Reihen

in  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$  Multiplikativ-Gruppe der zu  $m$  teilerfremden Zahlen  
 $\chi$  Charakter modulo  $k$   $\chi(x) = 0$  ( $x, k$ )  $\neq 1$

$L(s, \chi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi(n) n^{-s}$

konvergiert absolut und gleichmäßig für  $s > \delta > 1$   
 $\chi \neq \chi_0$ : absolut und gleichm. konvergen für  $s > 0 > 0$

$L(s, \chi) = \prod_p \left( \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}} \right)$

Euklidische Produktzerlegung  
 $S$  Menge von Primzahlen  
 $\Gamma \sum_{n \in \mathbb{N}(S)} \chi(n) n^{-s} = \prod_{p \in S} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(p)^n p^{-sn} = \prod_{p \in S} \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}}$

Satz von  
Mirchlet

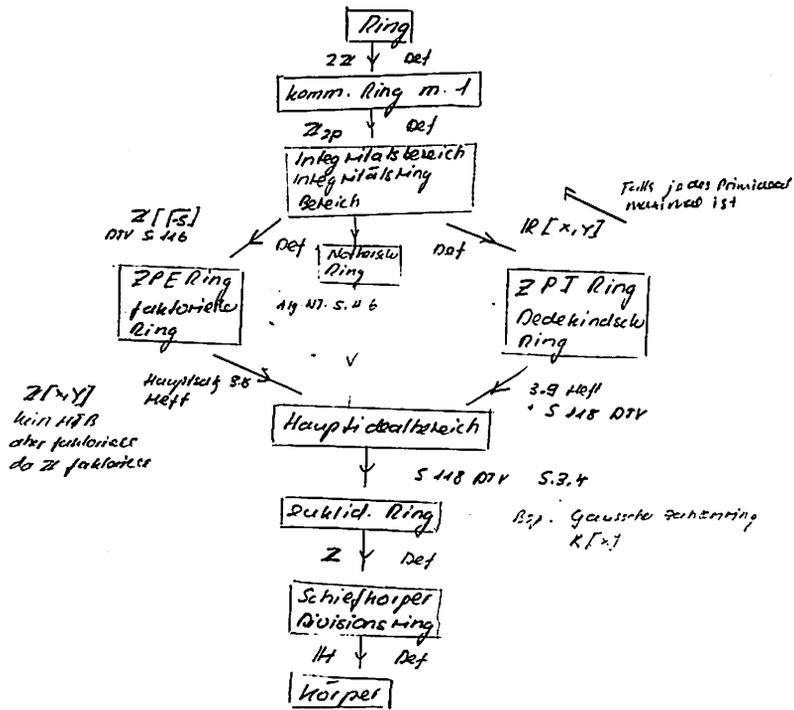
$(k, e) = 1$   
 $\sum_{\chi \in \hat{G}} \frac{1}{p} \chi(e)$  divergiert

$\Gamma s > 1$   
 $1 - \chi(p) p^{-s}$  hat positiven Realteil  
 $\log(1 - \chi(p) p^{-s}) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^m}{m p^{ms}}$  Hauptwert d. Logarithmus.  
 $\log L(s, \chi) = - \sum_p \log(1 - \chi(p) p^{-s}) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^m}{m p^{ms}}$   
 $g(s, \chi) := \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^m}{m p^{ms}}$  ist abs. konv. für  $\sigma > \delta > \frac{1}{2}$ :  
 $\sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^m}{m p^{ms}} \leq \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{p^{ms}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^{\sigma} (1 - m^{-\sigma})}$

$\# \frac{L(1, \chi) \neq 0}{\chi \neq \chi_0}$

sei  $a \in \mathbb{Z}$   $a \equiv 1 \pmod{k}$   
 $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) \log L(s, \chi) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \log \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}} = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) g(s, \chi) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{p^s} + \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(a) g(s, \chi)$   
 endlich für  $s=1$   $\neq$   
 $\rightarrow \infty$  aber  $L(s, \chi_0) = \prod_{p|k} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \zeta(s) \cdot \prod_{p|k} (1 - p^{-s}) \rightarrow \infty$   
 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} > \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$

# Algebraische Strukturen zwischen Ring und Körper



Zahlerringe sind faktoriell  
 In Noetherschen Ringen ist Faktorisierung in irreduzible Elemente möglich  
 Zahlerringe sind faktoriell  $\Rightarrow$  0 ist HIB  
 Zahlerringe sind Dedekindsche Ringe

in HIB zeigt eindeutig bis auf Einheiten

- Integritätsbereich: keine Nullteiler
- faktor. Ring:  $0 \neq a \in R$  lässt sich schreiben  $a = \epsilon \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_n$ 
  - $\epsilon$  Einheit
  - $p_i$  Primelemente
- Dedekind. Ring: jedes Ideal besitzt Zerlegung in Primideale
- Hauptidealbereich: jedes Ideal ist Hauptideal
- euklid. Ring:
  - $g: R \rightarrow \mathbb{N}$  Wertfunktion
  - (1)  $g(ab) = g(a) \cdot g(b)$
  - (2)  $g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$
  - (3)  $0 < g(a) \leq g(b) \Rightarrow \exists q$   $g(b - aq) < g(b)$
 euklid. Wertfunktion.
- Noetherscher Ring: jedes Ideal endlich erzeugt
  - Bsp.: Integerring in Zahlkörpern

$A$  einfach, halfeinfach Modul  
 $A$  einfach  $\rightarrow A = \langle 0 \rangle$   $\forall A \neq 0$   
 $A_k$  einfach  $\rightarrow k$  maximales Ideal von  $A$   
 $C/B$  einfach  $\rightarrow B$  maximales Untermodul von  $C$

$$\sqrt{B \subseteq A \subseteq C} \\ (0) \subseteq A/B \subseteq C/B$$

$A$  einfach  $\Leftrightarrow \forall B \subseteq A \exists$  Komplement von  $B$

vgl. Resultat von Lindenskreuz für Banachräume  
 $X$  Banachraum  
 $X$  Hilbertraum  $\Leftrightarrow \forall Y \subseteq X \exists$  Komplement von  $Y$

$$\Gamma \Rightarrow A = \bigoplus_i B_i, B_i \text{ einfach} \\ B \subseteq A \quad I \text{ Menge mit } \bigoplus_i B_i \cap B = 0$$

$\Rightarrow \exists J$  maximal mit  $B \cap \bigoplus_{i \in J} B_i = 0$  denn  $J$  Kette von Indizes mit dieser Eigenschaft  $\bigoplus_{i \in J} B_i \cap B = 0$   
 $\Rightarrow \bigoplus_{i \in J} B_i \cap B = 0$ , da  $\exists b_i \in B_i, \sum b_i \in B$   
 $\Rightarrow \exists J_k \subseteq J$

Beh  $C := \bigoplus_{i \in J} B_i$  ist Komplement von  $B$

$B \cap C = \{0\}$  klar  
 $B \oplus C = A$  zeigen  $B_i \subseteq B \oplus C \forall i$  ist  $J$   
 $\Rightarrow B \cap \bigoplus_{i \in J} B_i \neq 0 \Rightarrow \exists b = \sum c_i b_i \neq 0 \quad b \in B \cap C$   
 $b_i \neq 0$  sonst  $b = 0 \in B \cap C = 0$   
 $B \cap C = B$ ; da  $B_i$  einfach und  $B_i \cap B \oplus C \neq \{0\} \Rightarrow B_i \subseteq B \oplus C$  qed

$I$  Menge einfacher UMod von  $A$   
 $I'$  Untermenge socless  $\bigoplus A_i$  direktes Produkt  
 $I'_k \subseteq I'_l \subseteq \dots$  gerichtete Kette mit Supremum  $\cup I'_k$  hat ebenfalls Eigenschaft dass  $\bigoplus A_i$  direkt. Prod.

$\Rightarrow \exists J$  maximal  
 Beh  $A = \bigoplus_{i \in J} B_i$  sonst  $\bigoplus_{i \in J} B_i \oplus C = A \quad C \neq \{0\}$  in  $C$  existiert einfacher Modul

$$0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_m = A \quad \text{ohne Erweiterung} \\ \Leftrightarrow A_i/A_{i-1} \text{ einfach} \\ \text{Faktoren d. Kette}$$

Beh Primfaktorreihe zerlegt nicht zu existieren:  $A = \sum A_i$  Modul

Die Faktoren einer Kompositionreihe einer Moduls ist bis auf Reihenfolge und Isomorphie eindeutig bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} 0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_m = A \\ 0 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \dots \subseteq B_n = A \end{aligned} \right\} \Rightarrow m=n \text{ und } \exists \pi \in \mathcal{P}(n) \\ A_i/A_{i-1} \cong B_{\pi(i)}/B_{\pi(i)-1}$$

cor  $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i = \bigoplus_{i=1}^n B_i$   
 $\Rightarrow m=n \quad A_i \cong B_{\pi(i)} \quad \exists \pi \in \mathcal{P}(n)$  Hauß Schmidt  
 cor  $\exists \sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \dots \subseteq \sigma_n = A \quad G_i \triangleleft G_{i+1}$   
 Normalreihe  $G_i/B_i$  einfach Kompositionsfaktoren

Jordan-Netze

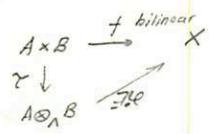
Cyl. Chain Set  
 $G$  primitive Permutationsgruppe auf  $\Omega$   
 $M$  minimale Normalteiler  
 $M = x_1 \times \dots \times x_d \quad x_i \cong \mathbb{F}$  einfach  
 Soclet  $\bigoplus M_i$ ;  $M_i$  Minimalnormalteiler  
 könne Soclet, soclet's hochrechnen und damit Kompositionsfaktoren  $\rightarrow$  Normann  
 Falls Kompositionsfaktoren bekannt, können wir ursprüngliche Gruppe wieder zusammenbasteln (schwierig)  
 semidirektes Produkt zu gegebenem Automorph d. (M).

Lemma  $B' \subseteq B \subseteq A \Rightarrow B' + (B \cap C) / B' + (B \cap C) \cong C' + (B \cap C) / C' + (B \cap C)$

wir schreiben zwischen  $A_i$  und  $A_{i+1}$  folgende Moduln  
 $A_{ij} := A_i + (A_{i+1} \cap B_j)$  entsprechend bei  $B_i$  und  $B_{j+1}$   
 $B_{ij} := B_j + (B_{j+1} \cap A_i)$   
 $A_{i,j+1}/A_{ij} \cong B_{j+1}/B_j$

Tensorprodukt:

$A$   $\Lambda$ -r Modul  
 $B$   $\Lambda$ -l Modul  
 $X$  abelsche Gruppe



$A \otimes_{\Lambda} B := F_{A \times B} / L$   
 $L$  ist abelsche Gruppe!  
 $(a, b) + L =: a \otimes_{\Lambda} b$   
 $\tau(a, b) = a \otimes_{\Lambda} b$  ist bilinear

$$L = \langle (a, b) + (a', b) - (a+a', b), (a, b) + (a, b') - (a, b+b'), (a, b) - (a, ab) \rangle$$

universelle Eigenschaft des Tensorprodukts:

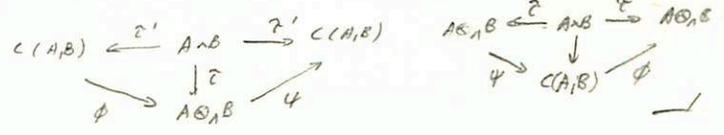
zu jeder abelschen Gruppe  $X$  und jeder bilinearen Abb.  $A \times B \rightarrow X$  existiert genau ein Homomorphismus  $\psi: A \otimes_{\Lambda} B \rightarrow X$   $\psi \circ \tau = \psi$

$\Gamma$  definieren  $\psi(a \otimes b) = f(a, b)$  kann nicht anders repr. werden  
 $A \times B \xrightarrow{f} X$   
 $\tau \downarrow \quad \nearrow \exists \psi$   
 $F/L \xrightarrow{\cong} X$   
 $\exists! f'$  wegen univ. Eigenschaft d. freien Moduls  
 es gilt  $f'(L) = 0$   
 da  $f'(a, b) = f(a, b)$   
 $\psi$  erzeugend

$A \otimes_{\Lambda} B$  und  $\tau$  ist bis auf Isomorphie die einzige so konstruierte Struktur

$C(A, B)$  Konstruktion  
 $\tau': A \times B \rightarrow C(A, B)$  bilinear mit universeller Eigenschaft  
 $\Rightarrow \exists \psi: A \otimes_{\Lambda} B \rightarrow C(A, B)$   
 $\tau' \downarrow \quad \nearrow \psi$   
 $A \otimes_{\Lambda} B \xrightarrow{\cong} C(A, B)$

$\Gamma \quad A \times B \xrightarrow{\tau'} C(A, B) \quad A \times B \xrightarrow{\tau} A \otimes_{\Lambda} B$   
 $\tau \downarrow \quad \nearrow \exists! \psi$  univ. Eig.  $\exists! \phi$   
 $A \otimes_{\Lambda} B \xrightarrow{\cong} C(A, B)$   
 $\psi = \phi^{-1}$



BSP  $A$  kommut. Ring  $\rightarrow$

$A \otimes_{\Lambda} B$  ist  $\Lambda$  Modul  
 $\lambda(a \otimes b) = a \otimes \lambda b = \lambda a \otimes b$

BSP  $\Lambda = \mathbb{K}$  Körper

Darstellungstheorie von Gruppen

$G$  kompakte top. Gruppe  
 $A^{\alpha}, K[G]$  Module K-Algebr. Objekte  
 $A^{\alpha}$  endlichdimens. mit Strukturprodukt  $(, )_{\alpha}$   
 $\mu$  Haar'scher Mass auf  $G$

$$\langle a, b \rangle_{\alpha} = \int_G (x \cdot a, x \cdot b)_{\alpha} d\mu(x)$$

in Endkern  $\langle a, b \rangle_{\alpha} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (T_x a, T_x b)_{\alpha}$

$f, g \in C(G)$   $L^2(G)$  Hilbert-Haaralgebra  $L^2(G)$  Hilbertraum

$$\langle f, g \rangle := \int_G f(x) g(x^{-1}) d\mu(x) \quad f * g(y) := \int_G f(x) g(yx^{-1}) d\mu(x)$$

ist nur im abelschen Fall kommutativ

Peter-Weyl:

$\{ \rho^{\alpha} \}$  Menge der nichttrivialen  
 irred. Darstellungen von  $G$  in  $V_{\rho^{\alpha}}$   
 $\rho^{\alpha}$  bildet Basis in  $L^2(G)$   
 wobei  $\langle \rho_i^{\alpha}, \rho_j^{\beta} \rangle = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}$   
 $e_j^{\alpha}$  Basis in  $A^{\alpha}$

irred.  $\Gamma A^{\alpha}, A^{\beta}$  zwei Darstellungen  $T_x^{\alpha}, T_x^{\beta}$  Wirkung

$h_{\alpha\beta} : A^{\alpha} \rightarrow A^{\beta}$  Modulhomomorphism.

definieren  $f_{\alpha\beta} : A^{\alpha} \rightarrow A^{\beta}$  Modulhomom.

$$f_{\alpha\beta}(a) = \int_G T_x^{\beta} h_{\alpha\beta} T_x^{-1}(a) d\mu(x)$$

Schur:  $f_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$

nehmen speziell:  $h_{\alpha\beta}(e_j^{\alpha}) = e_j^{\beta}$

$$\Rightarrow \int T_x^{\alpha} e_j^{\alpha} \cdot T_x^{-\beta} e_k^{\beta} = 0$$

$$\int T_x^{\alpha} e_j^{\alpha} \cdot T_x^{-\alpha} e_k^{\alpha} = \frac{1}{\dim A^{\alpha}}$$

also  $\langle \rho_i^{\alpha}, \rho_k^{\beta} \rangle = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}$

das so gewonnene orthogonale System ist  
 vollständig

Definieren zu  $f : G \rightarrow \mathbb{C} \quad \langle f \rangle = \int_G f(x) x dF(x)$

Siehe Lemma dass zu  $\mu$  gehört

Charakteren

$$\chi^{\alpha}(x) = \text{Sp}(T_x^{\alpha}) : G \rightarrow \mathbb{C}$$

$\langle \chi^{\alpha}, \chi^{\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta}$  d.h.  $\chi^{\alpha}, \chi^{\beta}$  äquivalent

Charakteren bilden im Raum d. Klassenfkt. ein orthogon. System.

$\chi$  charakter zu  $\bigoplus_{i=1}^n C_i T^{\alpha_i} \Rightarrow \chi = \sum_{i=1}^n C_i \chi^{\alpha_i}$

$$\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^n C_i^2 \langle \chi^{\alpha_i}, \chi^{\alpha_i} \rangle = \sum C_i^2$$

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1 \Leftrightarrow \chi \text{ irred. Charakter}$$

Der Darstellungsring

$A^{\alpha}, A^{\beta}$   $K$ -VR  
 Matrizen  $A^{\alpha} \otimes A^{\beta}$  ist auch  $K$ -VR und ebenfalls  $K[G]$  Modul

mit operation  $T^{\alpha} \otimes T^{\beta} (x \otimes y) = T^{\alpha}(x) \otimes T^{\beta}(y)$

$$\Gamma (A \otimes B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

Darstellung

$$R_K(G)$$

Die Darstellungen einer Gruppe  $G$  bilden einen Ring bezüglich Tensorprodukt und Summe

$\mathbb{Z} \text{ lin}(G, K)$  Darstellungsring  
 $\mathbb{Z} \text{ lin}(G, K)$  Raum der eigentlichen Darstellungen

Charakterring

$$\chi(R_K(G))$$

Die Charaktere  $G \rightarrow K$  bilden einen Ring bezüglich Addition und Multiplikation

$$R_K(G) \cong \chi(R_K(G))$$

$$\Gamma \in R_K(G) \rightarrow \chi(R_K(G))$$

$$T \rightarrow \chi(T)$$

$\chi$  ist Ringhomomorphismus  
 $\chi$  ist injektiv, surjektiv

Die irred. Charakteren sind die mit Norm 1.

Schur

$f : A \rightarrow B$  Modulhomomorphism.  
 $A, B$  einfache Module  
 $\rightarrow f = 0$  oder  $f =$  Isomorphism.

$$\text{End}_{K[G]}(A) \cong K \quad \text{A einfach}$$

$\Gamma$  (brauchen hier abstr. Algebra aus dem Körper  $K$ )

$$f \in \text{End}_{K[G]}(A)$$

$$(f - \lambda \text{Id}) \in \text{End}_{K[G]}(A)$$

$$(f - \lambda \text{Id}) = 0 \text{ für Eigenwert}$$

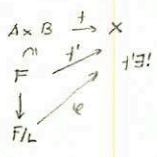
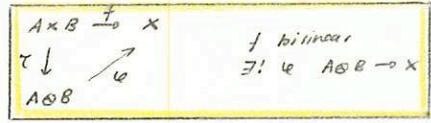
$$\Leftrightarrow f = \lambda \text{Id}$$

Tensorprodukt

Konstruktion:

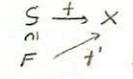
$F$  freie abelsche Gruppe  
mit Basis  $\{(a_i b_j) \mid a \in A, b \in B\}$   
wobei  $A, B$  links resp. rechts  $\Lambda$  Moduln sind.  
 $L$  Untergruppe von  $F$  erzeugt durch  
 $\{(a_i b_j) + (a'_i b_j) - (a_i a'_j b_j)$   
 $(a_i b_j) + (a_i b'_j) - (a_i b_j b'_k)$   
 $(a_i b_j) - (a_i, b_j)\}$   
 $A \otimes B := F/L$   
 $(a_i b_j) + L := a_i \otimes b_j$   
 $\tau: (a_i b_j) \mapsto a_i \otimes b_j$  bilinear

universelle Eigenschaft des Tensorprodukts:



$\Gamma \quad f(a_i b_j) = \varphi \circ \tau(a_i b_j) = \varphi(a_i \otimes b_j)$   
 $\varphi$  eindeutig  
 $\varphi$  ist Homomorphismus

$S := \{(a_i b_j) \mid a \in A, b \in B\}$

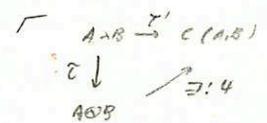


$\exists!$  nach univers. Eigensch. des freien Moduls

$\ker f' \supseteq L \Rightarrow \varphi(a_i \otimes b_j) = f'(a_i b_j) = f(a_i b_j)$

Die Konstruktion ist eindeutig

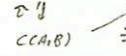
$C(A, B)$  Konstruktion  
 $\tau': A \times B \rightarrow C(A, B)$  bilinear  
universelle Eigensch. d. Tensorprod. o.  $\mathbb{Z}$ -Mod.  
 $A \times B \xrightarrow{f} X$   
 $\tau' \downarrow \quad \exists! \varphi' \quad f = \varphi' \circ \tau'$   
 $C(A, B)$   
 $\Rightarrow \exists$  Isomorphismus  $\varphi$   
 $\varphi: A \otimes B \xrightarrow{\cong} C(A, B)$   
 $\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\tau'} & C(A, B) \\ \tau \downarrow & \searrow \varphi & \\ A \otimes B & \xrightarrow{\varphi} & C(A, B) \end{array}$



univ. Eigensch. d. Tensorprod.

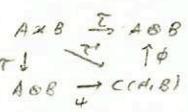
zeigen:  $\varphi$  ist Isomorphismus

$A \times B \xrightarrow{\cong} A \otimes B$



univ. Eigensch. d. Homom.

$\varphi \circ \varphi = 1_{A \otimes B}$   
 $\varphi \circ \varphi = 1_{C(A, B)}$



$\varphi \circ \varphi: A \otimes B \rightarrow A \otimes B$  eindeutig

Eigenschaft

- $A \otimes_{\Lambda} B$  ist  $\Lambda$  Modul für  $\Lambda$  kommut.
- $\Lambda \otimes_{\Lambda} B \cong B$   $\Lambda$  einselem.
- $(A \otimes_{\Lambda} A') \otimes_{\Lambda} B \cong A \otimes_{\Lambda} (A' \otimes_{\Lambda} B)$  distribut.
- $A$  frei  $A \cong \bigoplus_{i \in I} \Lambda_i$   $\Lambda_i \cong \Lambda$   
 $A \otimes B = \bigoplus_{i \in I} \Lambda_i \otimes B = \bigoplus_{i \in I} \Lambda_i \otimes B \cong \bigoplus_{i \in I} B$   
 $B_i \cong B$
- $A$   $\Lambda$  Modul  $B$   $\mathbb{Z}$ -Modul  $\underline{S = \Lambda \otimes B}$  Modul  
 $B$   $\Lambda$  Modul  
 $\Rightarrow A \otimes_{\Lambda} B$  ist  $\mathbb{Z}$ -Modul

$\Gamma \quad a \otimes_{\Lambda} b + c \otimes_{\Lambda} d = (c+d) \otimes_{\Lambda} b + a \otimes_{\Lambda} d$   
 $\lambda a \otimes_{\Lambda} b = a \otimes_{\Lambda} \lambda b = \lambda a \otimes_{\Lambda} b$   
 $0 \otimes_{\Lambda} b + a' \otimes_{\Lambda} b = a' \otimes_{\Lambda} (0 + b) = a' \otimes_{\Lambda} b$

Skalenerweiterung

$A$   $\Lambda$  Algebra  
 $B$   $\Lambda$  Modul  
 $A$  ist  $A$ - $\Lambda$  Bimodul  
 $A \otimes_{\Lambda} B$  ist  $A$ - $A$  Modul  
Skalenerweiterung von  $B$  aus  $\Lambda$  Modul wurde  $A$  Modul

Bsp  $\Lambda = \mathbb{R}$   
 $A = \mathbb{C}$

$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} B$  komplexifizierung

Bsp  $A = \mathbb{Z}$   
 $\mathbb{Q}$   $\mathbb{Z}$ -Algebra  
 $B$   $\mathbb{Q}$ - $\mathbb{Z}$  Modul  
 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B$

Tensorprodukt Rang von  $B$   
 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B$

- $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}$
- $B$  abzählbar unendlich e.o.  
 $B = \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^{\mu} \oplus \mathbb{Z}^{\nu}$   
 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B = n$

Darstellungstheorie

$T$  in  $A$  vollreduzibel  
 $T = T^{(1)}, T^{(2)}, \dots, T^{(n)}$  in  $A$  in  $n$  Blöcken  
 $T$  bis auf Reihenfolge und Äquiv. bestimmt

$\Gamma$   $A$   $\mathbb{C}$  einfach  $\Rightarrow A = \mathbb{C}A^{(1)}$   
 $A^{(1)}$  bis auf Reihenfolge eindeutig!

unitäre  
Darstell.  
vollreduz.

$T$  unitäre Darstell.  
 $\Rightarrow T$  vollreduzibel

folgt aus  $A$   $\mathbb{C}$  einfach  $\Rightarrow \forall B \in A \exists B' \exists B'' \exists B''' = A$   
 $B' = B'' = \{ \alpha \in A \mid C(B) = 0 \} \forall B \in B$

Lemma von  
Schur

$f: A \rightarrow B \in \mathbb{C}(G)$  Modulhomomorph.  
 $A, B$  einfache  $\mathbb{C}(G)$  Modul.  
 $\Rightarrow f = 0$  oder  $f$  Isomorph.

$f: A \rightarrow B$   
 $\ker f = \{0\} \Rightarrow f$  Isomorph.  
 $\text{im } f = B$   
 $\ker f = (B) \Rightarrow f = 0$   
 $\text{im } f = (0)$

Cor

$f: A \rightarrow \mathbb{C} \in \mathbb{C}(G)$  Modulhomomorph.  
 $\Rightarrow f = 0$  oder  $f = \lambda \cdot 1$

Cor

$A$  einfache  $\mathbb{C}(G)$  Modul  
 $\Rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}(G)} A \cong \mathbb{C}$

Cor

Lemma von  
Schur für  
Darstellungen

$T$  irred. Darstellung  
 $f: A \rightarrow A$  lin. Abb. mit  
 $f \cdot T_x = T_x \cdot f$   
 $\Rightarrow f = 0$  oder  $f = \lambda \cdot 1_A$

$\Gamma f: A \rightarrow A$   
 linear  
 $f T_x = T_x f \Rightarrow f(x \cdot a) = x \cdot f(a)$   
 $\in \mathbb{C}(G)$  Modulhomomorph.

Physik  
 $F$  Operatoren  $A \rightarrow A$   
 der mit  $T_x$  vertauscht  
 auf  $H$   
 $\Rightarrow H$  ist keine  
 irreduz. Darstell. für  
 $T_x$

Cor

Jede irred. Darstellung  
 einer abelschen Gruppe  
 ist eindimensional.

$\Gamma G$  abelsche Gruppe  $T$  irred. Darstell. in  $A$   
 $T_x \cdot T_y = T_{xy} = T_y \cdot T_x \quad \forall x, y$   
 $\rightarrow T_y = \lambda \cdot 1 \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} A = 1$

$G$  endlich oder kompakt  
 $\Rightarrow$  jede Darstellung  $T$  von  $G$  ist  
 unitär  
 $\Rightarrow$  jede Darstellung ist  
 vollreduzibel

$\int (a, b) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle T_g(a), T_g(b) \rangle$   
 $\langle \cdot \rangle$  unit. Skalarprod. in  $A$

MSP:  
 $(a, b) = \frac{1}{|G|} \int_{g \in G} \langle T_g(b), T_g(a) \rangle dg$   
 Haarsches Maß

Orthogonalitäts  
bedingungen:

$S, T$  nichtäquiv. irred. Darstellungen  
 $\Rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(h_{ij}(S_{ij}(x^{-1}))) = 0 \quad \begin{matrix} 1 \leq i, j \leq m \\ 1 \leq l, k \leq n \end{matrix}$

$S_x: A \rightarrow A$   $m \times m$  Matrix  
 $T_x: B \rightarrow B$   $n \times n$  Matrix

$\Gamma h: A \rightarrow B \in \text{lin. Abb.}$   
 $f(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x(g x^{-1} a)$  ist Modulhomomorphismus

$S_x: A \rightarrow A \quad S_{ij}$   
 $T_x: B \rightarrow B \quad T_{kl}$   
 $f(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(h_{kl} (S_{ij})^{-1} a_i) = 0$

$S$  irred. Darstellung:  
 $\Rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} S_{kl}(h_{ij}(S_{ij}(x^{-1}))) = \frac{1}{m} \delta_{ij} \delta_{kl}$

$f(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} S_{kl}(h_{ij}(S_{ij}(x^{-1}))) = \delta_{kl} \delta_{ij}$   
 $\lambda = \frac{\text{Sp } h_{ij}}{m}$  durch Spurbildung  
 gewonnen

Zusammen:

$(\text{tr } h_{ij}, \text{tr } h_{kl}) = \frac{1}{m} \delta_{ij} \delta_{kl}$

$V = G^* = \{ f: G \rightarrow \mathbb{C} \}$   
 bilden komplexen VR mit Dim  $|G|$

$\text{tr } h_{ij}$  sind ortho norm. System in  $V$   
 sogar vollständig (LWOT).

$\sum_{i,j} |c_{ij}|^2 = |G| \quad j \neq \text{Darstellung}$

$\chi_1, \dots, \chi_n$  Charakteren der imed. Darstell. von  $G$   
 $\chi_1, \dots, \chi_n$  bilden im Raum d. Klassenfkt.  $G \rightarrow \mathbb{C}$   
 ein vollständiges orthonorm. System  
 $n = \#$  konjug. Klassen von  $G$   
 $T$  imed. Darstell. von  $G$  d. Dim  $n \Rightarrow n = |G|$

$\Gamma f: G \rightarrow \mathbb{C}$  Klassenfkt. mit  $(\chi, f) = 0 \forall \chi$   
 $T(f)$  imed. Darstell.  
 $T(f) = 0$   
 $T(\chi) = 0$  f. belieb. Darstell. nun anwend. auf regul. Darstell.

Lemma 3  $\chi(x)$  ganz algebraische Zahl

$\Gamma \lambda$  EW von  $T\chi$   
 $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda$  ganz algem.  
 $\chi(x) = \sum \lambda_i$  ganz algem.  $\_$

Lemma 5  $T$  Darstell. von  $G$  mit char  $\chi$   $n = |G|$

$\Gamma \lambda = (\chi, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x) \overline{\chi(x)}$   
 $\frac{|G|}{n} = \sum_{x \in G} \overline{\chi(x)} \frac{\chi(x)}{n}$   
 $= \sum_{\text{Klass.}} \overline{\chi(x)} \sum_{\text{Klass.}} \frac{\chi(x)}{n}$   
 ganz algem. (4)  
 ganz algem.  $\Rightarrow \in \mathbb{Z} \_$

Darstell. Theorie von kompakten topol. Gruppen

Su(2)

$M_f = \frac{1}{\text{Vol } S^2} \int_{S^2} f$  Haarsches Integral auf  $S^2$   
 $M_f = \frac{1}{\text{Vol } S^2} \int_{S^2} \overline{f} \sin^2 \theta \text{ Vol } S^2$   $f$  Klassenfkt. von  $f$   
 $= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \overline{f} \sin^2 \theta d\theta$

Liste d. imed. Darstellungen von  $SU(2)$

$T^{(1)}$  imed. Darst. 1 dim  $T\chi^{(1)} = id$   
 $T^{(2)}$  imed. Darst. 2 dim durch sich selbst  
 $T^{(p)}$   $\begin{bmatrix} e^{i(p-1)\varphi} & & & \\ & e^{i(p-3)\varphi} & & \\ & & \dots & \\ & & & e^{-i(p-1)\varphi} \end{bmatrix}$

$\chi_p \left( \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & & \\ & e^{-i\varphi} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right) = \chi_p(e^{i\varphi})$   
 $-\text{Sp } T \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & & \\ & e^{-i\varphi} & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sin p\varphi}{\sin \varphi} = \chi_p(\varphi)$

$\Gamma e^{i(p-1)\varphi} + e^{i(p-3)\varphi} + \dots + e^{-i(p-1)\varphi}$   
 $= e^{+i(p-1)\varphi} \frac{e^{2ip\varphi} - 1}{e^{2i\varphi} - 1} = \frac{\sin p\varphi}{\sin \varphi}$

$f: G \rightarrow \mathbb{C} \rightsquigarrow \sum_{x \in G} f(x) \cdot x = c(f) \in \mathbb{C}[G]$   
Lemma 1  $y f(y)^{-1} = c(f) \forall y \in G \Leftrightarrow f$  Klassenfkt.  
 $\Gamma y c(f) y^{-1} = y \sum_{x \in G} f(x) \cdot x \cdot y^{-1} = \sum_{x \in G} f(x) y x y^{-1}$   
 $= \sum_{x \in G} f(x) \rightarrow$  falls  $f$  Klassenfkt.  
 $\sum_{x \in G} f(x) y x y^{-1} = \sum_{x \in G} f(x) x$   
 $\sum_{x \in G} f(y x y^{-1}) x = \sum_{x \in G} f(x) x$   
 $\Rightarrow f(x) = f(y x y^{-1}) \rightarrow f$  Klassenfkt.  $\_$

Lemma 2  $T$  imed. Darstell. in  $V$  der Dim  $n$  mit Charakter  $\chi$   $f$  Klassenfkt.  
 $\Rightarrow T c(f) = \lambda I_V \quad \lambda = \frac{|G|}{n} (\chi, f)$

$\Gamma y c(f) y^{-1} = c(f)$  Lemma 1  $\Rightarrow T y c(f) y^{-1} = T c(f)$   $\Rightarrow T c(f) = \lambda I_V$   
 $T y c(f) = T c(f) y \Rightarrow T c(f) = \lambda I_V$   
 $n \cdot \lambda = \text{Sp}(T c(f)) = \text{Sp} \sum_{x \in G} f(x) T x = \sum_{x \in G} \text{Sp } T x f(x)$   
 $= \sum_{x \in G} f(x) \chi(x) \_$

Lemma 4  $\frac{1}{n} \sum_{x \in G} \chi(x)$  ganz algebraisch

$R = \{c(f) \in \mathbb{C}[G] \mid f: G \rightarrow \mathbb{Z} \text{ ganz zahl. Klassenfkt.}\}$   
 $\subseteq \mathbb{C}[G]$   
 Unterring  
 $c(f) \in R$   
 $T c(f) = \lambda I_V$   
 $c(f) \mapsto \lambda I_V$  Ringhomom.  $\phi: R \rightarrow \mathbb{C}$   
 Im  $\phi$  UR von  $\mathbb{C}$  mit endl. ord. addit. gezeugt  
 $\Rightarrow$  in im  $\phi$  ist jedes Elem. ganz algebraisch.  $\_$  erzeugt sind ganz algebraisch  
 auch  $\frac{1}{n} \sum_{x \in G} \chi(x) \_$

denn  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & \\ & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$   
 $\varphi = \arccos(\frac{\alpha}{R(\alpha, \beta)})$   
 (reelle Charakteren:  
 $\text{char} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha + i\beta = 2R(\alpha, \beta)$   
 $\text{char} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & \\ & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cdot \cos \varphi$ )

$\Gamma$  homogene Polynome von Grad  $p-1$  mit 2 kwaff. bilden  $\mathbb{C}[z_1, z_2]$  d. Dim  $p$

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha z_1 - \beta z_2 \\ \beta z_1 + \alpha z_2 \end{pmatrix}$  Operat. auf  $\mathbb{C}^2$   
 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^2 & -2\alpha\beta & \beta^2 \\ \alpha\beta & \alpha^2 - \beta^2 & 2\alpha\beta \\ \beta^2 & 2\alpha\beta & \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ z_2^2 \end{pmatrix}$

suchen Charakteren:  
 $\begin{pmatrix} z_1^{p-1} \\ z_1^{p-2} z_2 \\ \vdots \\ z_2^{p-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (e^{i\varphi} z_1)^{p-1} \\ (e^{i\varphi} z_1)^{p-2} (e^{-i\varphi} z_2) \\ \vdots \\ (e^{-i\varphi} z_2)^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(p-1)\varphi} z_1^{p-1} \\ \vdots \\ e^{-i(p-1)\varphi} z_2^{p-1} \end{pmatrix}$   
 also  $T \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & & \\ & e^{-i\varphi} & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i(p-1)\varphi} & & \\ & \dots & \\ & & e^{-i(p-1)\varphi} \end{bmatrix}$

Darstellungen  $T(\rho)$  sind irreduzibel und paarweise nicht äquivalent  
 $T$  sind dim. irred. Darst. von  $SU(2)$   
 $\Rightarrow T$  äquivalent zu einem  $T(\rho)$

$T(\rho) \sim \chi(\rho) \chi(\rho)$  da dimensions versch.  
 $(\chi_\rho, \chi_\rho) = \int_0^\pi \sin^2 \rho \sin \rho d\rho = \frac{2}{\rho} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\rho}{2} d\rho = 1$   
 $T$  irred. Darst. mit char  $\chi$   
 $(\chi, \chi) = 0 \forall \rho \int \chi(\rho) \sin \rho d\rho = 0 \forall \rho$   
 $\Rightarrow \chi(\rho) \sin^2 \rho = 0$

Beziehen in  
 Theor. Physik

$T^{(n)} = D_{\rho-1}$

Darstellungen von  $SO(3)$

Schar  $G$  Gruppe  $T$  irred. Darst. von  $G$   
 $T_2 = \lambda |2\rangle \cdot Id \cong \mathbb{C}^3(0)$

$T_j(SU(2)) = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \}$

da  $T_2^{(2)} = \lambda |2\rangle Id \cong \mathbb{C}^3(0)$   
 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$SU(2) / \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \} \cong SO(3)$

$\Gamma \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - ix_3 \\ ix_3 & -x_1 \end{pmatrix} \in SU(2)$   
 $|\bar{x}|^2 = \det \bar{x} = \bar{x}$

$R_x \rightsquigarrow U_x U_x^{-1}$

$\pi: U \rightarrow R$  surjektiv mit Kern  $\mathbb{Z} \cdot Id = I$

$T: SU(2) \rightarrow G(n, \mathbb{C})$   
 $\pi \downarrow$   
 $SO(3) \xrightarrow{\pi^{-1}}$

$T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = Id \Leftrightarrow \exists T$   
 $\chi_p(\rho) = \frac{\sin p\rho}{\sin \rho} \quad \chi_p(\pi) = (-1)^{p-1} p$   
 $T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Id \Leftrightarrow p$  ungerade

$T^{(1)}, T^{(3)}, T^{(5)} \dots$   
 irreduz. Darstell. von  $SO(3)$

Tensorprodukt von Darstellungen

$S$  Darst. von  $G$  in  $V$  (mit Basis  $b_1 \dots b_m$ )  
 $T$  Darst. von  $G$  in  $W$  (mit Basis  $c_1 \dots c_n$ )  
 $R$  Darst. von  $G$  in  $V \otimes W$

$S_x(b_i) = \sum_k S_{ik} b_k$   
 $T_x(c_j) = \sum_l T_{jl} c_l$   
 $R_x(b_i \otimes c_j) = S_x(b_i) \otimes T_x(c_j)$   
 $= \sum_{k,l} S_{ik} T_{jl} (b_k \otimes c_l)$

$\chi_R^{(n)} = \sum_{(i,j)} S_i T_j = \chi_S \cdot \chi_T(x)$

Clebsch  
 Gordon  
 Reihe  
 $\sum_{m_i} S_{m_i}(l)$

$T(\rho) \otimes T(\rho) = T(\rho, \rho-1) \oplus T(\rho, \rho-3) \oplus \dots \oplus T(\rho, \rho-1)$   
 $D_i \otimes D_0 = D_{i+0} \oplus D_{i+0-1} \oplus \dots \oplus D_{i-0}$

$T \quad T(\rho) \otimes T(\rho) = \sum_{\rho_1, \rho_2} C_{\rho} T(\rho)$

$\chi_{T(\rho) \otimes T(\rho)} = \frac{\sin p \rho \sin q \rho}{\sin^2 \rho}$

$C_{\rho} = (\chi, \chi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \chi(\rho) \bar{\chi} \sin \rho d\rho$   
 $= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin p \rho \sin q \rho}{\sin^2 \rho} \frac{\sin \rho d\rho}{\sin \rho}$   
 $= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin p \rho \sin q \rho \frac{\sin \rho d\rho}{\sin \rho}$

$\frac{\sin p \rho \sin q \rho}{\sin \rho} = \sin(\rho q - \rho) + \sin(\rho q - 3\rho) + \dots + \sin(\rho q - p\rho)$

$C_{\rho} = \begin{cases} 1 & \rho q - p \leq 0 \leq \rho q - p + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Darstellungen einer linearen Gruppe

- G, H Gruppen
- S Darstellung von G in V
- T Darstellung von H in W
- R Darstellung von G x H in V x W

$R_{x,y}(v,w) = (S_x(v), T_y(w))$

$\chi_R(x,y) = \chi_S(x) \cdot \chi_T(y)$   
 S, T irred.  $\Rightarrow$  R irreduz.

$\chi_R(x,y) = \text{sp}(R_{x,y}) = \sum_{i,j} s_{ij} t_{ij}$

$(\chi_R, \chi_R) = \frac{1}{|G \times H|} \sum_{x,y \in G \times H} \chi_R(x,y) \overline{\chi_R(x,y)}$

$= \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{x \in G} \sum_{y \in H} \chi_S(x) \overline{\chi_S(x)} \chi_T(y) \overline{\chi_T(y)} = 1$

S, T irred.  $\Rightarrow$  S  $\otimes$  T nicht irreduzibel

$(S \otimes T)_x (b_j \otimes c_j) = S_x b_j \otimes T_x c_j$  Kroneckerprodukt  
 $(S \otimes T)_{x,y} (b_j \otimes c_j) = (S_x b_j, T_y c_j)$  Produkt d. Darst. Produkte

$G_n$  einfach für  $n \geq 5$

L1  $G_n$  wird durch 300 Zykeln erzeugt

$\Gamma (1,2)(2,3) = (1,2,3)$   
 $(1,2)(3,4) = (1,2,3)(2,3,4)$

L2  $n \geq 5$   $N \triangleleft G_n$   
 $\exists$  Zyklus in  $N \Rightarrow N = G_n$

$\Gamma (i,j,k) \in N$   
 $d = (i,j,k \dots)$  gerade geradz.  
 $d \circ (1,2,3) \circ d^{-1} = (i,j,k)$   
 Lemma 1  $\Rightarrow \dots$

$\Gamma$  zeigen: jede NT  $N$  enth. 300 Zykeln  
 $d \in N$  mit möglichst vielen fixierten Elementen  
 Annahme:  $N$  enth. keinen 300 Zykeln

$d = (1,2,3, \dots) ( ) ( )$  1. Fall  
 $d = (1,2) (..) (..)$  2. Fall  
 4,5 werden min. auch bewegt

$\beta = (3,4,5) \in G_n$   
 1. Fall  $d_1 = \beta \circ d \circ \beta^{-1} = (1,2,4, \dots) ( )$   
 2. Fall  $d_1 = \beta \circ d \circ \beta^{-1} = (1,2)(4,5) \dots$

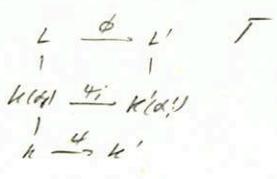
Behauptung  $d_1 \circ d$   
 $d_1 \circ d (1) = 1$

$d_1 \circ d$  hat zusätzlich 1 fix  
 $\hookrightarrow$  zur Minimalität von  $d$

$K \subseteq L$  galoisch  
 $\Rightarrow |Gal(L|K)| = [L:K]$

zeigen:

$\varphi: K \rightarrow K'$   
 $f(x)$  separabel  
 $L$  Zerfällkörper von  $f(x)$  über  $K$   
 $L'$  " " von  $f(x)$  über  $K'$   
 $\varphi$  lässt sich auf genau  $[L:K]$  Arten zu Isom.  $\Phi: L \rightarrow L'$  erweitern



$\Gamma$  induktiv  $n=1$   
 $L$  normale Körpererw.  $L$  zerfäll. von  $f(x)$   
 $g(x) \in K[x] \rightarrow$  irred. Faktor von  $f(x)$   
 $L$  separabel  $\Rightarrow f(x)$  separabel  $\Rightarrow g(x)$  separabel  
d.h.  $\exists$  nur ein NST  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$   $r = \text{grad } g(x)$   
 $\varphi(g(x))$  mit NST  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r$   $\varphi(g(x))$  separabel  
für jedes  $i=1, \dots, r \exists$  Erweit.  $\varphi_i: K(\alpha_i) \xrightarrow{\sim} K'(\alpha'_i)$   
Ind. we  $\varphi_i$  lässt sich auf  $[L:K(\alpha_i)] = [L:K]$  Arten zu  $\Phi$  erweitern  
haben also mind  $[L:K]$  Erweiterungen  
 $\nexists$  andere Erweiterungen  
 $\Phi': L \rightarrow L'$  irgend ein Isom.  $\Phi'|_K = \varphi$   
 $\Phi'|_{K(\alpha_i)} = \varphi_i$  da  $\Phi'(\alpha_i)$  Nullstelle von  $\varphi(g(x))$  ist  
Damit ist  $\alpha_i$  als Erweit. von  $\varphi_i$  erhalten worden

$\mathbb{F}_p \subseteq F$  endl. Erweiterung  $F = GF(p^n)$   
 $Gal(F|\mathbb{F}_p) = \langle \phi \rangle$   
 $\phi: F \rightarrow F \quad \phi(x) = x^p$  Frobeniusabb.

$\Gamma \langle \phi \rangle = n$   
 $\phi^m = \text{id} \quad F \rightarrow F$   
 $\phi^m(\alpha) = \alpha$   
 $\alpha^{p^m} = \alpha \Rightarrow \alpha$  NST  $x^{p^m} - x \quad \forall x \in F$   
 $\Rightarrow F$  hat  $p^m$  Elemente  $\Rightarrow m=n$

Hauptsatz d. Galois-Theorie

$K \subseteq L$  galoisch  
 $G = Gal(L|K)$   
 $X: \{ \text{Subgr von } G \} \rightarrow \{ \text{Zw.körper von } K, L \}$  bij.  
 $\circ: \{ \text{Zw.körper von } K, L \} \rightarrow \{ \text{Subgr von } G \}$

$H^0 := Gal(H|K)$   
 $U^* := \{ \sigma \in L \mid \sigma R = R \quad \forall \sigma \in U \}$   
 $[L:U^*] = |U|$   
 $[G:H^0] = [H:K]$   
 $(H^0)^* = H$   
 $(U^*)^* = U$

$\Gamma. K \subseteq M \subseteq L$   
 $H^0 = Gal(L|M)$   
 $M \subseteq L$  endgaloisch  
 $(H^0)^* = H$  (Satz 1)  
 $U \subseteq G$   
 $U \subseteq (U^*)^*$   
 $|U^*| = |Gal(L|U^*)| = [L:U^*] = |U|$   
 ↑  
 Satz 2

Satz 1  
 $K \subseteq L$  galoisch  
 $Gal(L|K) = G = K^0$   
 $\Rightarrow G^* = K$   
 $(K^0)^* = K$

$\Gamma K \subseteq G^* \text{ klar}$   
 $[L:G^*] = p \leq n$   
 $Gal(L|G^*) = [L:G^*] = p$   
 $Gal(L|K^0) \supseteq G \quad p > n$   
 $\Rightarrow p=n$  und  $G^* = K$

Satz 2  
 $U$  Gruppe von Autom. von  $L$   
 $\Rightarrow [L:U^*] \leq |U|$

$\Gamma [L:U^*] \leq |U| \quad |U| = m \quad H = U^*$   
 $\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in L$  linearunabh. über  $H$   
 $\forall \sigma \in U \quad \gamma_1 \sigma(\alpha_1) + \gamma_2 \sigma(\alpha_2) + \dots + \gamma_{m+1} \sigma(\alpha_{m+1}) = 0$   
 $m$  lineare Gleichungen für  $\gamma_1, \dots, \gamma_{m+1}$  mit  
 einer nichttriv. Lösung wählen nichttriv. Lösung mit  
 maximaler # Nullen und normieren um Schluss  
 $\gamma_1, \dots, \gamma_q \neq 0 \quad \gamma_{q+1}, \dots, \gamma_{m+1} = 0$   
d.h.  $\gamma_1 \sigma(\alpha_1) + \dots + \gamma_q \sigma(\alpha_q) = 0 \quad \forall \sigma \in U$   
 $\exists \alpha \in U \quad \tau(\gamma_1) \tau(\sigma(\alpha_1)) + \dots + \tau(\gamma_q) \tau(\sigma(\alpha_q)) = 0$  sind äquivalente Gleichungen  
 $\gamma_i' = \tau(\gamma_i) \tau(\sigma(\alpha_j)) - \gamma_j \tau(\alpha_j)$  ist Lösung d. Gleichsystems  
 $\gamma_i' = 0$   
 $\Rightarrow \gamma_i' = \gamma_i \tau(\sigma(\alpha_j)) - \gamma_j \tau(\alpha_j) = 0$  da Maximalnoen von  $\gamma_1, \dots, \gamma_q$  erreicht  
 $\gamma_i \tau(\sigma(\alpha_j)) = \gamma_j \tau(\alpha_j) \quad \forall \sigma \in U$   
d.h.  $\tau(\sigma(\alpha_j)) = \tau(\alpha_j) \tau(\sigma(\alpha_j)) = \tau(\alpha_j) \tau(\sigma(\alpha_j))$   
für  $\tau \in U$  gilt  
 $\gamma_1 \tau(\alpha_1) + \gamma_2 \tau(\alpha_2) + \dots + \gamma_q \tau(\alpha_q) = 0$   
d.h.  $\gamma_1 (\tau(\alpha_1) + \tau(\alpha_2) + \dots + \tau(\alpha_q)) = 0$   
 $\gamma_i \neq 0 \Rightarrow \tau(\alpha_1) + \tau(\alpha_2) + \dots + \tau(\alpha_q) = 0$

Endl. Körper

$n$  te Einheitswurzel  $\omega$   $\omega^k$  bilden multipl.  $\omega^k$  Gruppe

char  $k=0$  oder char  $k=p$   $p \nmid n$   
 $\Rightarrow \exists!$   $n$  te Einh. wurzeln

char  $k=0$  oder char  $k=p$   $p \nmid n$   
 $\Rightarrow$  Gruppe d.  $n$  ten EW zyklisch

$\exists \omega(n)$  primit. Einh. wurzeln  
 $\omega(n)$  erzeug. Element

$\Gamma$  nur einj. NST von  $x^{n-1}$   
 $n \times n^{-1} \neq 0$  für  $n \neq p-1$

$\Gamma \cong C_{m_1} \times C_{m_2} \dots \times C_{m_r}$   $m_i | n$   
 $\exists$  nicht zyklisch  $\Rightarrow \exists m_i | n$  mit  $m_i$   
 $\Rightarrow \exists$  höchst.  $m_i$  Einheitswurzel  $\omega$

Zinschr. d. endl. Körper auf  $p^n$

$F$  endl. Körper  $\Rightarrow \exists p$  prim  $|F| = p^n$

Wahr d.  $p | n$  FVK oder Primkörper

Existenz d. endl. Körper mit  $p^n$  Elem.

$F$  Zerfällkörper von  $f(x) = x^{p^n} - x$  über  $\mathbb{F}_p$   
 $\Rightarrow F = \{ \text{NST von } f(x) \}$   $|F| = p^n$

$\Gamma$   $\alpha$  NST von  $x^{p^n} - x$   
 $\Rightarrow \alpha$  NST von  $x^{p^{n-1}} - x$   
 $\exists!$   $p^2$  te Einh. wurzeln bilden zykl. Gruppe d.  $p^2$  ten unter Multipl.  
 zeigen  $\{ \text{NST von } f(x) \}$  abgesehen unter  $\pm, \cdot$   
 $\alpha, \beta$  NST von  $f(x)$   
 $\Rightarrow (\alpha \pm \beta)^{p^n} = (\alpha \pm \beta)^{p^{n-1}})^{p^n} = (\alpha \pm \beta)^{p^{n-1} \cdot p^n} = \alpha \pm \beta$

Eindeut. d. endl. Körper mit  $p^n$  Elem.

$p$  prim  $n \geq 1$   
 $\exists!$  (bis auf Isom.) Körper mit  $p^n$  Elem.

$\Gamma |F'| = p^n$   $F'$  Zerfällkörper von  $x^{p^n} - x$   
 $|F'| = p^{n-1}$   
 $\alpha \in F' \Rightarrow \alpha^{p^{n-1}} = 1$   $\Gamma$  Formel  
 $\Rightarrow \alpha$  NST von  $x^{p^{n-1}} - 1$   
 $\Rightarrow$  jedes Elem. von  $F'$  NST von  $x^{p^n} - x$

Kor

$F$  zyklisch  
 $\mathbb{F}_p(\omega) = F$   $\exists$  erz. Elem. von  $F'$   
 $\forall n \exists$  irred. Polynom  $f(x)$  über  $\mathbb{F}_p$  vom Grad  $n$

Galoisgruppe

$K \subseteq L$   
 $\phi: L \rightarrow L$  Automorphismen über  $K$   
 $\phi|_K = 1_K$   
 $\text{Gal}(L/K) =$  Gruppe d. Automorphismen über  $K$

Galoisgruppe  
 eines Polynoms  
 $g(x)$  ist  
 Galoisgruppe d.  
 Zerfällkörper von  
 $g(x)$  über  $K$

Fixkörper  $U^*$  von  $U \subseteq G$

$U^* := \{ \phi \in L \mid g(\phi) = 0 \ \forall g \in \text{Gal}(L/K) \}$   
 ist ein Zwischenkörper von  $K$  und  $L$

$\Gamma U^* \cong K$   $U^* \subseteq L$  nach  $\Gamma$   
 $U^*$  Körper:  $\exists! \phi \in U^*$   
 $\exists! \phi, \psi \in U^* : g(\phi, \psi) = g(\phi) \cdot g(\psi) = \phi \cdot \psi$

Untergruppe  $M^0$   $M$  zentral

$M^0 := \{ g \in \text{Gal}(L/K) \mid g(m) = m \ \forall m \in M \}$   
 $M^0 = \text{Gal}(M/K)$

$\Gamma U^0$  von  $G$  klar

$\alpha \in L \supseteq K$  algem. mit  $MP f(x) = k(x)$   
 NST von  $f(x)$  heißen die zu  $\alpha$   
 konj. Elemente

$\alpha$  NST von  $f(x)$  MP von  $\alpha$   
 $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$   
 $\sigma(\alpha)$  NST von  $f(x)$   
 d.h.  $\sigma(\alpha)$  ist zu  $\alpha$  konjugiert

$L$  Zerfällkörper von  $g(x) = k(x)$   
 $d_1, \dots, d_r$  NS von  $g(x)$   
 $\text{Gal}(L/K) \subseteq \prod_r \text{Gal}(U_i/K)$

$\Gamma L = k(d_1, \dots, d_r)$   
 $\sigma(d_i) = \alpha \pi_i$   
 $\sigma$  permutiert  $d_i$

Galoische Erweiterung: endlich, normal, separabel Erweiterung

$K \subseteq L$  Galoisch  
 $\Rightarrow |\text{Gal}(L/K)| = [L:K]$

nach zu zeigen:

$$\mathbb{Z}_{p_1}, \mathbb{Z}_{p_2} \text{ NST von } g(x) \\ \Rightarrow [L(\mathbb{Z}_{p_1}) : L] = [L(\mathbb{Z}_{p_2}) : L]$$

$$\sqrt{[L(\mathbb{Z}_{p_1}) : L][L : k]} = [L(\mathbb{Z}_{p_1}) : k] = [L(\mathbb{Z}_{p_2}) : k] \cdot \underbrace{[k(\mathbb{Z}_{p_1}) : k]}_{\text{grad } g(x)}$$

zeigen  $[L(\mathbb{Z}_{p_1}) : k(\mathbb{Z}_{p_1})] = [L(\mathbb{Z}_{p_2}) : k(\mathbb{Z}_{p_2})]$

Lemma 1:  $\exists \psi : k(\mathbb{Z}_{p_1}) \xrightarrow{\sim} k(\mathbb{Z}_{p_2})$   
 $L(\mathbb{Z}_{p_1})$  Zerfällkörper von  $f(x)$  über  $k(\mathbb{Z}_{p_1})$

Lemma 2:  $\exists \phi : L(\mathbb{Z}_{p_1}) \xrightarrow{\sim} L(\mathbb{Z}_{p_2})$  \_1

Charakteristik

$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow k$   
 $1 \mapsto 1_k$   
 $n \mapsto \underbrace{1_k + \dots + 1_k}_n$   
 $\text{Im} \varphi \cong \mathbb{Z}/\text{Kern} \varphi = \mathbb{Z}/(q)$   
 $q$  prim oder  $q=0$   
 $k$  von Charakteristik  $q$

Separable Körpererweiterung

imed.  
 $f(x) \in k[x]$  heißt separabel,  
 wenn  $f(x)$  im Zerfällkörper  
 nur einfache NST hat

$f(x)$  inseparabel  $\Leftrightarrow$   
 $f(x)$  und  $Df(x)$  haben  
 in  $k[x]$  einen gemeinsamen  
 Teiler  $g(x) \in k[x]$   $\text{grad } g(x) \geq 1$

$\Gamma \Rightarrow f(x) = (x-a)^2 h(x)$   
 $Df(x) = 2(x-a)h(x) + (x-a)^2 D(h(x))$   
 $\Leftarrow f(x) = (x-a)h(x)$   
 $Df(x) = h(x) + (x-a)D(h(x))$   
 $f(x)$  separabel  $\Rightarrow$   
 $Df(x) = h(x) \neq 0$   
 $f(x) = 0$   
 d.h.  $f(x)$  und  $Df(x)$  haben  
 keinen gemeinsamen Teiler

$k$  mit  $\text{char } k = 0$   
 $f(x) \in k[x]$  imed.  
 $\Rightarrow f(x)$  ist separabel

$\Gamma$   $f(x)$  und  $Df(x)$   
 besitzen keine gem. Faktoren  
 ausser  $Df(x) = 0$   
 $f(x) = x^n + \dots$   
 $Df(x) = nx^{n-1} + \dots \neq 0$  Da  $\text{char } k = 0$

$k$  mit  $\text{char } k = p$   
 $f(x) \in k[x]$  imed.  
 $f(x)$  separabel  $\Rightarrow$   
 $f(x)$  nicht von Form  
 $g(x^p)$

$\Gamma$  " $\Rightarrow$ "  $f(x)$  separabel  
 $f(x) = g(x^p)$   
 $Df(x) = Dg \cdot p x^{p-1} = 0$   
 $f(x) \rightarrow$  separabel  $\Leftarrow$   
 $f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n x^n$   
 $a_i \neq 0$  mit  $i = mp + l$   
 $Df(x) = \dots + (mp+l) a_l x^{l-1} + \dots$   
 $\neq 0$   
 $\Rightarrow f(x)$  und  $Df(x)$  besitzen keine  
 gem. Faktoren

spez.  $k = \mathbb{F}_p$   $f(x) \in k[x]$  imed.  
 $\Rightarrow f(x)$  separabel

$\Gamma$  sonst  $f(x) = g(x^p)$   
 $f(x) = (g(x))^p$   
 da  $(a+b)^p = a^p + b^p$

belieb. Polynom separabel:  
 Alle imed. Faktoren separabel  
 $x^2 L \geq k$  separabel MP von  $D$   
 separabel  
 $L \geq k$  separabel  $D$  ist separabel

$k \subseteq M \subseteq L$   $k \subseteq L$  separable Körpererweiterung  
 $\Rightarrow k \subseteq M, M \subseteq L$  separable Körpererweiterung

$\Gamma$   $x \in M \Rightarrow x \in L$  MP separabel  
 $x \in L \Rightarrow g(x) \in \mathbb{F}_p[x]$  MP  
 $h(x)$  MP von  $D$  über  $k$   
 $h(x) = g(x) \cdot \tilde{h}(x)$   
 $h(x)$  separabel  
 $\Rightarrow g(x)$  separabel \_1

Körpererweiterungen

$K \subseteq L$   $L$  VR über  $K$ ,  $L$  Körper  
 $\dim_K L = [L:K]$  Körpergrad von  $L$  über  $K$   
 $[M:K] = [M:L][L:K]$   $K \subseteq L \subseteq M$

$K \subseteq L$  relativ prim über  $K$   
 $\Rightarrow \exists! h(x)$  Polynom in  $K[x]$  mit  $h(x) = 0$  minimales Polynom  
 $h(x) = 0 \forall f(x) \in K[x]$  mit  $f(x) = 0$   
 $h(x)$  ist irreduzibel

$\text{grad } h(x)$  grad von  $\alpha$  über  $K$   
 $\varphi: K[x] \rightarrow L$   
 $f(x) \mapsto f(\alpha)$   
 $\ker \varphi = \mathfrak{a}$   
 $\varphi: K[x]/\mathfrak{a} \rightarrow L$   $K[x]/\mathfrak{a} \cong K(\alpha)$   
 $\ker \varphi = \mathfrak{a}$   
 $\text{im } \varphi = K(\alpha)$  kleinster Unterkörper von  $L$  der  $\alpha$  enthält  
 $\text{grad } \alpha = \text{grad } h(x) = [K(\alpha):K]$

Zerfallungskörper

$f(x) \in K[x]$  geg mit  $\text{grad } f(x) = n$

Lemma 1  
 zu  $f(x) \in K[x]$   $\exists$  Körpererweiterung  $K \subseteq Z$  sodass  $f(x)$  vollst. in  $LZ$  zerfällt über  $Z$   
 $[Z:K] \leq n!$

Zerfallungskörper: minimaler Körper mit dieser Eigenschaft

Lemma 2  
 $f(x) \in K[x]$   
 Zerfallkörper ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt

Lemma 3  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 4  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   $\exists \geq 1$  Zerfallkörper von  $f(x)$  über  $K$   
 $L' \supseteq K'$  Körper, indem  $\chi^*(f(x))$  in  $L'$  linearfaktoriell zerfällt  
 $\Rightarrow \exists$  Körperisomorphismus  $\phi: L \rightarrow L'$  mit  $\phi|_K = \text{id}$

Beweis Satz  
 $L$  Zerfallkörper von  $f(x)$  über  $K$   
 $L'$  Zerfallkörper von  $\chi^*(f(x))$  über  $K'$   
 $\phi: L \rightarrow L'$  inj.  $[L:K] \leq [L':K']$   
 umgekehrte Rollen  
 $\phi': L' \rightarrow L$  inj.  $[L':K'] \leq [L:K]$   
 $\phi$  Isomorphismus

Lemma 5  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 6  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 7  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 8  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 9  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 10  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 11  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 12  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 13  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 14  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 15  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 16  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 17  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 18  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 19  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 20  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 21  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 22  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 23  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 24  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 25  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 26  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 27  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 28  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 29  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 30  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 31  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 32  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 33  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 34  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 35  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 36  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 37  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 38  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 39  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 40  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 41  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 42  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 43  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 44  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 45  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 46  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 47  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 48  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 49  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

Lemma 50  
 $K \subseteq L$   $K' \subseteq L'$   
 $\alpha \in L$  mit MP  $h(x)$   
 $\alpha' \in L'$  mit MP  $h'(x)$   
 $\Rightarrow \exists \chi: K(\alpha) \rightarrow K'(\alpha')$   
 $\chi|_K = \text{id}$

normale Körpererweiterung

1 out all out

$K \subseteq L$  endlich!  
 $K \subseteq L$  normal  $\Leftrightarrow \forall f(x) \in K[x]$   $\exists$  irreduzibles  $g(x) \in K[x]$  NSZ von  $f(x)$  in  $L$  mit  $f(x)$  zerfällt über  $L$  in LF

Normalität  
 $K \subseteq L$  normal  $\Rightarrow \exists f(x) \in K[x]$   $L$  Zerfallkörper von  $f(x)$  über  $K$

$\Gamma \Rightarrow$   
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  Basis von  $L$  über  $K$   
 $\Rightarrow L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$   
 $m_i(x)$  MP  $\alpha_i$   
 $L \supseteq K$  normal  $\Rightarrow m_i(x)$  zerfällt in LF  
 $L$  Zerfallkörper von  $m_1(x) \dots m_n(x) = f(x)$   
 $\Rightarrow L$  ist Zerfallkörper von  $f(x)$

$\Leftarrow$   
 $L \subseteq L$  mit MP  $g(x)$   
 zeigen  $g(x)$  zerfällt in LF  
 $\times \alpha_1, \alpha_2$  NS von  $g(x)$   
 $\Rightarrow [L(\alpha_1):L] = [L(\alpha_2):L]$   
 $\times \alpha_1 = \alpha_2$  gegl.  
 $[L(\alpha_1):L] = 1 \Rightarrow \alpha_1 \in L \forall \alpha_2$  NS von  $g(x)$

Diagramm:  
 $M$   
 $\swarrow \quad \searrow$   
 $L(\alpha_1) \quad L(\alpha_2)$   
 $\swarrow \quad \searrow$   
 $K(\alpha_1) \quad K(\alpha_2)$   
 $\swarrow \quad \searrow$   
 $K$

Galoistheorie 3

$\sigma \in \text{Gal}(L/K) \Rightarrow G$   $K \subseteq M \subseteq L$   $M^G := \text{Gal}(L/M) = U \subseteq G$   
 $\sigma M := \{ \sigma m \mid m \in M \}$  zu  $M$  konj. Körper

$\text{Gal}(L/\sigma M) = \sigma U \sigma^{-1}$

$\Gamma \sigma U \sigma^{-1} (\sigma m) = \sigma U m = \sigma m$   
 $\Rightarrow \sigma U \sigma^{-1} \subseteq \text{Gal}(L/\sigma M)$   
 $|\text{Gal}(L/\sigma M)| = |\sigma U \sigma^{-1}| = |\sigma U| = |\text{Gal}(L/M)|$   
 $\Rightarrow \sigma U \sigma^{-1} = \text{Gal}(L/\sigma M)$

$K \subseteq M \subseteq L$

$K \subseteq M$  normal  $\Leftrightarrow U$  Normalteiler von  $G$   
 $\text{Gal}(L/M) \triangleleft \text{Gal}(L/K)$

$\Gamma \Rightarrow K \subseteq M$  normal  
 $K \subseteq M$  normal  $\Leftrightarrow$   $\sigma M$  normal und  $\sigma M \cap M = M$   
 $\sigma M$  normal unter  $\sigma \in \text{Gal}(L/M)$  in anderen Nullst. über d.h.  $\sigma(K) \subseteq M$   
 $\Rightarrow \sigma M = M$  d.h.  $\sigma U \sigma^{-1} = U$   
 $\Rightarrow U \triangleleft G$   $M = U^*$   
 $\sigma M = (\sigma U \sigma^{-1})^* = U^* = M$   
 $K \subseteq M$  d.h. NSB d. Minimalpolyn. von  $\alpha$   
 $\alpha \in L$  da  $K \subseteq L$  normal  
 $\exists \sigma \in \text{Gal}(L/K)$   $\sigma(\alpha) = \alpha'$   
 $\Rightarrow \alpha' \in M$

$K \subseteq M \subseteq L$   
 $K \subseteq M$  normal  
 $\text{Gal}(M/K) \cong \text{Gal}(L/K) / \text{Gal}(L/M)$

$\Gamma \sigma \in \text{Gal}(L/K)$   
 $\sigma M = M$   
 $\sigma M \cong \text{Gal}(M/K)$   
 $\varphi: \sigma \mapsto \sigma|_M$   
 $\varphi: \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(M/K)$   
 $\ker \varphi = \{ \sigma \in \text{Gal}(L/K) \mid \sigma|_M = \text{id} \} = \text{Gal}(L/M)$   
 $\text{Auswertem } |\text{Gal}(M/K)| \cdot |\text{Gal}(L/M)| = |\text{Gal}(L/K)|$

nat und  
 rat

$\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \mathbb{R}$   $\mathbb{Q} \subseteq L$  normal  
 $[\mathbb{L}:\mathbb{Q}] = 2^k \Rightarrow$  jedes  $\alpha \in L$  konstruierbar

$\Gamma |\text{Gal}(L/\mathbb{Q})| = |\mathbb{L}:\mathbb{Q}| = 2^k$   
 $\Rightarrow \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  ist 2-Gruppe  
 $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid x \equiv -2$   
 $\langle x \rangle \triangleleft \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$   
 $\xrightarrow{\text{Galois}} \exists$  Zwischenkörper  $M$  mit  $\text{Gal}(L/M) = \langle x \rangle$   
 $\text{d.h. } |\mathbb{L}:M| = 2$   $\mathbb{Q} \subseteq M$  ist normal  
 $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_{k-1} \subseteq L$   $[L_i:L_{i-1}] = 2$   
 $\mathbb{Q}$   $M$   
 Elemente von  $L_i$  konstr. bar. Sei  $\alpha \in L_i = L_{i-1}(\alpha)$   
 $\text{Gal}(L_i/L_{i-1}) = \{ \text{id}, \sigma \} = C_2$   
 $\alpha - \sigma \alpha \in L_{i-1}$  denn  
 $\sigma(\alpha - \sigma \alpha) = \sigma(\alpha) - \alpha = -(\alpha - \sigma \alpha)$   
 $\alpha - \sigma \alpha \notin L_{i-1}$   
 $\alpha \in \mathbb{Q}$   
 $\sigma(\alpha - \sigma \alpha)^2 = (\alpha - \sigma \alpha)^2$   
 $(\alpha - \sigma \alpha)^2 \in L_{i-1}$  konstruierbar  
 $\Rightarrow \alpha - \sigma \alpha$  konstr. bar  $\Rightarrow \alpha$  konstruierbar  
 $\Rightarrow$  als Elem. von  $L_i$  konstr. bar

regelm.  $n$  Eck  
 konstr. bar  $\Leftrightarrow \frac{2\pi}{n}$  konstr. bar  
 $\Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{n}$  konstr. bar

$\zeta := e^{i \frac{2\pi}{n}}$   $\alpha := \frac{1}{2} (\zeta + \zeta^{-1}) = \cos \frac{2\pi}{n}$   
 $\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta)$   
 $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$  abelsch  
 $\text{d.h. } \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}$  normal

$p$  Eck konstr. bar  $\Leftrightarrow [\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}] = 2^k$   
 $p-1$

da  $x^{p-1} = (x-1)(x^{p-2} + \dots + 1)$   
 irreduzibel

also  $p = 2^k + 1$

regelm.  $p$  Eck konstr. bar  
 $\Leftrightarrow p = 2^k + 1$

$\Leftrightarrow$   $\left[ \begin{array}{l} \text{regelm. } n \text{ Eck konstr. bar} \\ n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k \cdot 2^l \\ p_i \text{ Fermatprimzahlen} \end{array} \right.$

$2^k + 1$  prim  $\Leftrightarrow k = 2^m$

$2^{2^m} + 1$  Fermatprimzahlen

$\lambda = p \cdot q$   $p$  ungerade Primzahl  
 $2^{\lambda} + 1 = 2^{p \cdot q} + 1$  teilbar durch  $2^q - 1$

$x^p + 1$  teilbar durch  $x+1$

Auflösen von  
Gln durch  
Radikale

$G$  auflösbar  $\Leftrightarrow$   
 $\exists$  Untergruppen  
 $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots \supseteq H_n = 1$   
 $H_i \triangleleft H_{i-1}$   $H_{i-1}/H_i$  zyklisch

$G$  auflösbar  $\Rightarrow$  jede Erweiterung  
auflösbar

$S_5$  nicht auflösbar da  
 $A_5$  nicht zyklisch  
 $A_5$  enthält keine Normalteiler

Acht

Gleichung 5ten Grades i.o.  
nicht durch Radikale  
auflösbar

$f(x) = x^5 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$   
irreduzibel

$L'$  zerfällt Körper von  $f(x)$

$\text{gal}(L'/\mathbb{Q}) = S_5$

$f(x)$  hat 3 reelle und 2 konj. kompl.  
Nullstellen

$\text{gal}(L'/\mathbb{Q}) \cong S_5$

$S \mid \text{gal}(L'/\mathbb{Q})$

$\exists$  zykl. Elem. d. Ordnung 5

$(1, 2, 3, 4, 5) \in \text{gal}(L'/\mathbb{Q})$

$(7, 2) \in \text{gal}(L'/\mathbb{Q})$

konj. Komp.

# Algebra II

## Gruppendarstellung

$G$  multipl. Gruppe       $\mathbb{C}[G]$  oder  $L^2(G)$       komplexe Gruppentalgebra  
 $A$   $\mathbb{C}[G]$  Modul       $T: G \xrightarrow{\text{Hom.}} \text{Aut}(A)$       Darstellung in  $\mathbb{C}$  VR  $A$   
 $T_x: a \mapsto x \cdot a$

$T$  unitär  $\Rightarrow T$  vollreduzibel  $\Leftrightarrow$  jeder inv. UR von  $A$  besitzt kompl. inv. UR

### Lemma von Schur

$f: A \rightarrow B$   $\mathbb{C}[G]$  Modulhomomorph.  
 $A, B$  einfache  $\mathbb{C}[G]$  Moduln  
 $\Rightarrow f$  Nullabb.  $\vee$   $f$  Isomorph.

$\Leftrightarrow$

$T$  irred. Darst. in  $A$   
 $f: A \rightarrow A$  lin. Abb.  $f \circ T_x = T_x \circ f$   
 $\Rightarrow f = 0 \vee f = \lambda \cdot 1_A$

jede irred. Darst. einer abelschen Gruppe eindimensional

jede M-Darstellung einer M-Gruppe ist unitär und damit vollreduzibel

$M$ -Gruppe: Gruppe m. Haarsche Mass  
 $M$ -Darstellung Darst. in  $L^2(G)$   
 reguläre unit. Darstellung

### Orthogonalitätsrel. in $L^2(G)$

$T^{(1)}, \dots, T^{(r)}$  sämtl. irred. Darst. von  $G$   
 $\{T_{ke}^{(\mu)}\}$  koord. in orthon. Basis

$$(T_{ke}^{(\mu)}, T_{lj}^{(\nu)}) = \frac{1}{m} \delta_{\mu\nu} \delta_{ki} \delta_{lj}$$

Charakt. d. irred. Darst. bilden im Raum d. klass. Funktionen  $G \rightarrow \mathbb{C}$  ein orthon. System vollst.  
 $S, T$  äquiv  $\Leftrightarrow \varphi(x) = \chi(x) \quad \forall x \in G$   
 $\# \rightarrow$  äquiv irred. Darst.  $\Leftrightarrow \#$  Klassen konj. Klassen.

$$\chi = \sum c_i \chi_i \quad \chi_i \text{ Charakt. d. irred. Darst.} \quad c_i = (\chi, \chi_i)$$

$$(\chi, \chi) = \sum c_i^2 \quad \chi \text{ irred. Darst.} \Leftrightarrow (\chi, \chi) = 1$$

In d. regul. Darstellung kommt jede irred. Darst. so oft vor wie ihre Dim. angibt  
 $|G| = n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_r^2 = \chi_1^2(e) + \chi_2^2(e) + \dots + \chi_r^2(e)$   
 $n_i \mid |G| \quad \# \text{ 1-dim Darstell.} = [G/G']$

Moduln

abelsche Gruppe ist  $\mathbb{Z}$  Modul  
Ringelemente Operatoren

Kommutativ:

Ring als Algebra  
abelsche Gruppe als VR

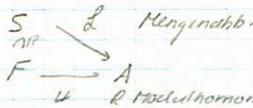
$\mathbb{Q}$ : Matrizenalgebra  
 $V$ : VR

$R = \mathbb{C}[G]$  Gruppenalgebra  
 $A = \mathbb{C}[G]$  Modul Darstellung von  $G$  im VR  $A$   
Modul über Algebra  $\mathbb{C}[G] \equiv$  Darstellung von  $G$  im VR  $A$

$G$   
 $\mathbb{C}[G]$  Gruppenalgebra  
 $A = \mathbb{C}[G]$  Modul

$A \subseteq$  VR  
 $T: G \rightarrow A$  Homomorph.  
Darstellung

$S$  belieb. Menge  $F$   $R$  Modul mit Salt Basis freier Modul  
 $0 = \sum_{s \in S} \lambda_s s$



$\psi$  eindeutig bestimmt durch  $\varphi$  und umgekehrt - universelle Eigenschaft der  $R$  Moduln

$$\psi(\sum_{s \in S} \lambda_s s) = \sum_{s \in S} \lambda_s \psi(s) = \sum_{s \in S} \lambda_s \varphi(s) = \sum_{s \in S} \lambda_s \varphi(s) = \sum_{s \in S} \lambda_s \varphi(s)$$

jeder  $R$  Modul ist frei (lin. Alg)  
jeder  $R$  Modul ist frei  $R$  Selbstmodul

$R/B$  Quotienten  $R$  Modul

$F$  freier  $R$  Modul  $F \cong \bigoplus_{i \in I} B_i$   $B_i \cong R$   $S = \{s_i \mid i \in I\}$   
 $A \subseteq B$   $R$  Moduln  $B/A$  frei auf  $S \Rightarrow B \cong A \oplus B/A$

$A$   $R$  Modul  $F$  sein freier Modul  $A \cong F/\ker \varphi$   $\varphi: F \rightarrow A$   
 $R$  PID  $A$   $R$  Modul von endl. Typ  $A \cong T(A) \oplus F$  Torsionsmod.  $\oplus$  freie Mod.  
 $P$  PID  $A$  torsionsfreier Modul von endl. Typ  $\Rightarrow A$  frei

IV 5 Ann  $0 = \{ \lambda s \in A \mid \lambda s = 0 \}$  ist Ideal in  $A$  Ann  $0 = \langle 0 \rangle$   
 $\varphi$  minim. annihilierendes, vorhanden falls  $A$ -PID  
Ann  $A = \bigcap_{s \in A} \text{Ann } s$

$T$  Torsionsmodul von endl. Typ über  $A$   $A$  PID  
 $\Rightarrow T = d_1 \oplus d_2 \oplus \dots \oplus d_n$  Ann  $(d_i) = \text{Ann } (e_i) = (u_i)$   $u_i \mid u_{i+1}$   
 $i=1, \dots, (n-1)$

70  $A$  PID  $A$   $A$  Modul von endl. Typ  
 $A \cong \underbrace{A \oplus \dots \oplus A}_{\text{frei Modul } F} \oplus \underbrace{A/(u_1) \oplus \dots \oplus A/(u_m)}_{T(A)}$   $u_i \mid u_{i+1}$

Anwend auf Matrix d. Groups:

$V$   $A$  VR  $M$   $n \times n$   $k[A]$  Modul  $V$  PID Modul von endl. Typ (cycl.)  
70  $\Rightarrow V \cong V_1 \oplus \dots \oplus V_m$   $V_i \cong k[A]/(f_i(x))$   $f_i(x) \mid f_{i+1}(x)$   
 $f_i(x)$  Charakt. Polynom

Basiswahl in  $W \subseteq k[A]/(x-r_i)^{k_i}$ :

$B_1 \in 1$   $(x-r)^k$   $T(B_1) = B_2 + r B_1$   
 $B_2 \in x-1$   $(x-r)^{k-1}$   $T(B_2) = B_3 + r B_2$   
 $B_{k_i} \in (x-r)^{k_i-1}$   $(x-r)^1$   $T(B_{k_i}) = B_{k_i+1} + r B_{k_i}$

Satz

$$A \text{ ist einfach} \iff \forall B \subseteq A \quad \exists \text{ Komplex. u. B}$$

Jordan Hölzer

Faktoren einer Kompos. Reihe eines Moduls bis auf Reihenfolge u. Kom. bestimmt

Krull-Schmidt

$$M \text{ endl. halteinfach} \quad M = \bigoplus_{i=1}^m M_i = \bigoplus_{j=1}^n N_j$$

$\rightarrow m=n \rightarrow \exists \pi \text{ Permut. } M_i \cong N_{\pi(i)}$

$A, B$   $R$ -A bzw.  $L$ -A-Modul  $X$  abelsche Gruppe  
 $f: A \times B \rightarrow X$  bilinear

$$A \otimes_A B := F/L$$

$$F = \langle (a, b) \mid a \in A, b \in B \rangle \text{ freie abelsche Gruppe}$$

$$L \text{ erzeugt von } \langle (a, b) + (a', b) - (a+a', b) \dots \rangle$$

$$\gamma: A \otimes B \rightarrow A \otimes_A B$$

univ. eigensch. d. Tensorprodukts:

Zu jeder abelschen Gruppe  
 und jeder bilin. Abb.  
 $f: A \times B \rightarrow X \quad \exists \varphi: A \otimes_A B \rightarrow X$   
 $\varphi \circ \gamma = f$

R komm. Ring mit 1

$S \subseteq R$  multiplikativ  
 $I \triangleleft R \quad I \cap S = \emptyset$   
 $\Rightarrow \exists \max \text{ Ideal } J \subseteq R$   
 $J \subseteq S \quad J \cap S = \emptyset \quad J \text{ prim.}$

Lemma

$\Gamma I = \{ J \triangleleft R \mid J \supseteq I \cap S = \emptyset \}$   
 totalgeordnet  $\Rightarrow$  Supremum  
 $\Rightarrow \exists \max \text{ Elem.}$

$J$  ist primideal:

$x, y \in J \Rightarrow x, y \notin S$   
 $J + xR \cap S = \emptyset$  wegen Maximalit.  
 $J + yR \cap S = \emptyset$   
 $x, y \in R \cap S = \emptyset$  da  $S$  multiplik.  
 $J \cap S = \emptyset \quad \square$

her  $\exists$  Primideale in  $R \quad (S = \{s \in R \mid J = (s)\})$   
 $\Rightarrow$  maximale Ideale in  $R$

$\text{Spec}(R) := \{ P \triangleleft R \mid P \text{ Primideal} \}$   
 $V(S) := \{ P \in \text{Spec}(R) \mid P \supseteq S \}$   
 $\{V(S) \mid S \subseteq R\}$  definieren Basis für abgeschlossene Mengen in  $\text{Spec}(R)$   
 Zariski Topologie auf  $\text{Spec}(R) := X$   
 $U(f) := R - V(f)$   
 $\{U(f)\}_{f \in R}$  Basis d. offenen Mengen von  $X$

$S \subseteq S' \Rightarrow V(S) \subseteq V(S')$   
 $V(\bigcap_{i \in A} I_i) = \bigcap_{i \in A} V(I_i) \quad I_i \triangleleft R$   
 $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J) = V(IJ)$   
 $U_f \cap U_g = U_{fg}$   
 $U_f \cup U_g = \{ P \in \text{Spec}(R) \mid f \notin P \text{ oder } g \notin P \}$   
 $= \{ P \in \text{Spec}(R) \mid fg \notin P \}$   
 $= U_{fg}$

$\Gamma J$   
 $\Gamma P \supseteq I \subseteq I \triangleleft R$   
 $\Rightarrow P \supseteq I \triangleleft R \quad \forall P \in J$   
 $\Gamma P \supseteq I \cap J \subseteq P \supseteq I \vee P \supseteq J$   
 d.h.  $V(I \cap J) \subseteq V(I) \cup V(J)$   
 $I \cap J \subseteq I \cap J \Rightarrow$   
 $V(I \cap J) \subseteq V(I) \cup V(J)$   
 $V(IJ) \subseteq V(I) \cup V(J)$   
 $P \supseteq I \cap J \Rightarrow \exists x \in I - P \quad \exists y \in J - P$   
 $P \supseteq IJ \Rightarrow \exists xy \in P$

$\text{Nil}(R) := \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$   
 $\text{Nil}(R) = \{ f \in R \mid U_f = \emptyset \}$   
 $\text{Nil}(R) = \{ x \in R \mid \exists n, x^n = 0 \}$

$\Gamma U_f = \emptyset \Rightarrow f \in P \quad \forall P \in \text{Spec}(R)$   
 $\Gamma 0 = x^n = x^{n-1} \cdot x \quad \exists p \Rightarrow x \in P \vee x^{n-1} \in P$   
 $\Rightarrow x \in P \quad \text{indukt.}$   
 $\exists x^n \neq 0 \quad \forall n \Rightarrow x \in \text{Nil}(R)$   
 $S = \{1, x, x^2, \dots\} \quad S \cap \text{Nil}(R) = \emptyset$  multipl. Menge  
 $\Rightarrow \exists P \text{ prim. Ideal} \Rightarrow x \notin P$

$U_f = X \Leftrightarrow \forall P \in \text{Spec}(R) \quad f \notin P \Rightarrow f \notin \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P = \text{Nil}(R)$   
 $\Leftrightarrow f$  ist Einheit in  $R$

$\Gamma 1. \Rightarrow$  klar  
 $2. \Rightarrow$  Es gibt  $f, g \in R$   
 $\Rightarrow f \notin P$  klar, weil  $R = P \cup (R - P)$   
 $2. \Rightarrow$  + nicht gen. (f) Ideal  $S = \{1\}$   
 $(f) \cap S = \emptyset \Rightarrow \exists P \Rightarrow$  max. Ideal  
 $(f) \in P \quad f \in P$

Der n-dim affine Raum über  $K$

$A^n := \text{Spec } K[x_1, \dots, x_n]$   
 $D = \mathbb{C}[x] \quad \text{Spec } R = \{ (0) \text{ gener. Punkt} \}$   
 $\{ (x-d) \mid d \in \mathbb{C} \}$   
 $R = \mathbb{C}[x, y] \quad \text{Spec } R = \{ (0) \text{ gen. Punkt} \}$   
 $\{ (x-d, y-r) \mid d, r \in \mathbb{C} \}$   
 $\{ (f(x, y)) \mid f(x, y) \text{ irred. Polynom} \}$   
 $\mathbb{C}[x, y]$  ist nicht HIB: (nur in HIB maximale Primideale)  
 maximale Ideale: geschlossene Punkte  
 z.B.  $f = x^2 + y^2 + 1$  irreduzibel  
 $p = (f) \quad f=0$  gibt Punkte auf Kurve  
 $p = (x-d, y-r) \quad x-d=0, y-r=0$  gibt ein Punkt

$A$  abgeschl. Menge in  $\text{Spec}(\mathbb{C}[x]) \Leftrightarrow A = \{ (x-d_i) \mid i \in I \}$  endlich

$\Gamma Y = V(I) \quad I \text{ Ideal in } \mathbb{C}[x] \quad I = (f)$   
 $I = (f(x))$  da  $\mathbb{C}[x]$  HIB  
 $f(x) = \prod (x-d_i)^{n_i}$   
 $V(f(x)) = V(\bigcap V(x-d_i)^{n_i})$   
 $= \bigcup V(x-d_i) = \bigcup V(x-d_i)$   
 $\times V(x-d_i)^{n_i} = \{ p \in \text{Spec}(\mathbb{C}[x]) \mid (x-d_i)^{n_i} \in p \}$   
 $= \{ p \in \text{Spec}(\mathbb{C}[x]) \mid (x-d_i) \in p \}$   
 $= \{ p \in \text{Spec}(\mathbb{C}[x]) \mid p = (x-d_i) \}$   
 $= V(x-d_i)$

$\{ f_i \}_{i \in I}$  Familie aus  $R$   
 $x = \bigcup U(f_i) \Leftrightarrow (f_i) = R$

$\Gamma x = \bigcup_{i \in I} U(f_i) \Leftrightarrow \forall P \in \text{Spec}(R) \quad \exists i \quad f_i \notin P$   
 $\Leftrightarrow \exists P \in \text{Spec}(R) \quad \forall i \quad f_i \in P$   
 $\Leftrightarrow (f_i) = R$   
 Lemma

Lemma gilt nicht immer für Ideale, nur wenn wir noetherische Ringe haben

$X$  ist quasi-kompakt

$\Gamma x = \bigcup_{i \in I} U(f_i)$   
 $\Rightarrow (f_i) = R$   
 Lemma  
 $\Rightarrow \exists n \quad \sum_{i=1}^n g_i f_i = 1$   
 $\Rightarrow R = (g_1 f_1, \dots, g_n f_n) \Rightarrow x = \bigcup_{i=1}^n U(f_i)$   
 Lemma

$\text{Spec} : \text{h. Ringe m. 1} \rightarrow \text{topol. Räume}$   
 ist ein kontravarianter Funktor von Kategorie d. Ringe in Kategorie d. topol. Räume  
 $f : R \rightarrow R'$  Ringhomomorphismus induziert  
 $f^* : \text{Spec } R' \rightarrow \text{Spec } R$  stetig

$\Gamma q \in \text{Spec } R' \quad f^*(q) := \{ p \in \text{Spec } R \mid f(p) = q \} \in \text{Spec } R$   
 zeigen  $R_{f^*(q)}$  ist Integritätsbereich  
 $R \xrightarrow{f} R' \xrightarrow{\pi} R'/q$  Integritätsbereich  
 $f^* \quad \text{Ker } f^* = f^{-1}(q)$   
 d.h.  $R/\text{Ker } f^* = R/p$  Integritätsbereich  
 $f^*$  ist stetig:  $U(f)$  offen in  $\text{Spec } R$   
 $f^{*(U(S))} = f^*(\{ p \in \text{Spec } R \mid f(p) \in S \}) = \{ q \in \text{Spec } R' \mid f(q) \in S \} = U(f(S))$   
 $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$   
 $R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} T$   
 $\text{Spec } T \xrightarrow{g^*} \text{Spec } S \xrightarrow{f^*} \text{Spec } R$   
 $f_0^* = f_{0'}^*$

$\tilde{f} : \text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } R'$  nicht wohldef.  
 $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$   
 $f : p \rightarrow p \cap \mathbb{Q} = \emptyset$  nicht prim



Kurven

glatte Kurve  $C$   
 $\vec{x}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 $\vec{x}'(t) \in \mathbb{C}^n$   
 $\vec{x}'(t) \neq 0$

Bsp: Helix Parabel  $\vec{x}'(t) = (t^2, t^3)$   
 Schraubenlinie  $\vec{x}(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, pt)$   
 Zykloide  $\vec{x}(t) = (r \cdot (t - \sin t), r(1 - \cos t), 0)$

Parametertrafo  
 $F \rightarrow + (7)$   
 monol. Parametertrafo  $\frac{dt}{dt} \neq 0$   
 $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt}$  zulässige Parameter  
 $\rightarrow$  zulässige Parameter  
 bei monol. Parametertrafo

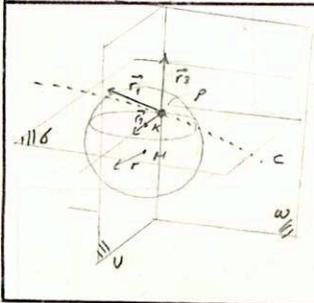
Bogenlängenfunktion  $ds = |\dot{x}| dt$   
 Massstabsfaktor  
 Länge:  $s = \int ds$   
 Parameter  $s$ : natürl. Parameter

Frenetsches Dreiein  
 $\vec{r}_1 = \frac{\vec{x}'(t)}{|\vec{x}'(t)|}$   $\vec{r}_2 = \frac{\vec{x}' \wedge \vec{x}''}{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|}$   $\vec{r}_3 = \vec{r}_2 \wedge \vec{r}_1$   
 $= \frac{(\vec{x}' \wedge \vec{x}'') \wedge \vec{x}'}{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''| |\vec{x}'|}$   
 natürl. Parameter  
 $\vec{r}_1 = \vec{x}'(s)$   $\vec{r}_2 = \frac{\vec{x}''}{|\vec{x}''|}$   $\vec{r}_3 = \frac{\vec{x}' \wedge \vec{x}''}{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|}$

$\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{pmatrix}$   $\vec{F} = A \cdot \vec{r}$   $\vec{r} \in SO(3)$   
 $\vec{F} \cdot \vec{r}^T = 1$   $(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_k) = \delta_{ik}$   
 $\vec{r}^T \vec{r} = \vec{r}^T \vec{r} = 0$   $A^T A^T = 0$   $A \in SO(3)$

Frenetsche Gleichungen  
 $\begin{pmatrix} \dot{\vec{r}}_1 \\ \dot{\vec{r}}_2 \\ \dot{\vec{r}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{pmatrix}$

$\kappa$  Krümmung  $= \frac{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|}{|\vec{x}'|^3} = \frac{\det(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''')}{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|^2}$   
 $\tau$  Torsion



Kurve  $C$  im Punkt  $P$   
 $\vec{r}_1$  Tangente  $\frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|}$   
 $\vec{r}_2$  Hauptnormale  $\frac{(\vec{x}' \wedge \vec{x}'' - (\vec{x}' \cdot \vec{x}'') \vec{x}')}{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|^2 - (\vec{x}' \cdot \vec{x}'')^2}$   
 $\vec{r}_3$  Binormale  $\frac{\vec{x}' \wedge \vec{x}''}{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|}$   
 $\delta = [\vec{r}_1, \vec{r}_2]$  Schmiegeebene  
 $\nu = [\vec{r}_2, \vec{r}_3]$  Normalebene  
 $\omega = [\vec{r}_1, \vec{r}_3]$  relativ Ebene

$M$  Mittelpunkt d. Krümmungskreis  $\vec{m} = \vec{x} + \frac{1}{\kappa} \vec{r}_2$  Radius  $\frac{1}{\kappa} = \rho$   
 $M$  Zentrum d. Schmiegekugel  $\vec{m} = \vec{x} + \frac{1}{\kappa} \vec{r}_2 - \frac{\tau}{\kappa^2} \vec{r}_3$   $\rho = \frac{1}{\kappa}$   
 $r$  Radius d. Schmiegekugel  $r^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{\tau}{\kappa^2}\right)^2 = \rho^2 + \left(\frac{\rho^3 \tau}{\kappa}\right)^2$   
 $\chi = \frac{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|}{|\vec{x}'|^3}$   
 $\tau = \frac{\det(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''')}{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|^2}$

Sphärische Kurve:  $\rho^2 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 = 0$   
 Böschungslinie:  $\frac{\tau}{\kappa} = \text{konst}$  (Tang. schließen mit festem Winkel  $\epsilon$  konst. Winkel ein)  
 Kurve in Ebene  $\tau = 0$

Flächen

glatte Fläche d. Klasse  $r$   
 $\vec{x}: B$  (einf. zush., eben)  $\rightarrow \mathbb{R}^n$   
 $\vec{x}_i(u^1, u^2) \in \mathbb{C}^n$   
 $\left[ \frac{d\vec{x}}{du} \right] = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{du^1} & \frac{dx^1}{du^2} & \frac{dx^1}{du^3} \\ \frac{dx^2}{du^1} & \frac{dx^2}{du^2} & \frac{dx^2}{du^3} \\ \frac{dx^3}{du^1} & \frac{dx^3}{du^2} & \frac{dx^3}{du^3} \end{pmatrix}$  Rang 2  
 Parameterlinien spannen Mg. Netz auf

Bsp  
 $\vec{x}_1 = \frac{d\vec{x}}{du^1}$  lin. unabh. Tangent.  
 $\vec{x}_2 = \frac{d\vec{x}}{du^2}$

wendelfläche  $\vec{x}(u^1, u^2) = (u^1 \sin u^2, -u^1 \cos u^2, u^2)$   
 Katenoid  $\vec{x}(u^1, u^2) = (cosh u^1 \cos u^2, cosh u^1 \sin u^2, u^1)$   
 Kugel  $\vec{x}(u^1, u^2) = (r \cdot \cos u^1 \cos u^2, r \cdot \sin u^1 \cos u^2, r \cdot \sin u^1)$   
 Einsh. Kugel  $\vec{x}(u^1, u^2) = (\cos u^1 \sin u^2, \sin u^1 \sin u^2 \cos u^2, \cos u^2)$   
 Bolzkegel  $\vec{x}(u^1, u^2) = (-u^1 \sin u^2, u^1 \cos u^2, u^2)$

Regelflächen Flächen mit 2 Param.  $\vec{x}(u^1, u^2) = \xi(u^1) + u^2 \cdot \vec{r}(u^1)$   
 Geradencharakter  
 Tangentflächen zu Raumkurve  $c = \xi(u^1)$   
 $\vec{x}(u^1, u^2) = \xi(u^1) + u^2 \cdot \xi'(u^1)$   
 ist Regelfläche  
 Torsion Regelflächen, bei denen Tang. ebene in den Punkten ohne Erzeugend. fest ist.  
 $\det(\vec{y}_1, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$

$d\vec{x} = \frac{d\vec{x}}{du^1} du^1 + \frac{d\vec{x}}{du^2} du^2 = \vec{x}_1 du^1 + \vec{x}_2 du^2$   
 totales Differenz. d. Vektorpunkt  $\vec{x}$   
 $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  lin. unabh.  $\Rightarrow$  Schmiegeaffinität  
 Flächenpunkt  $P$  regulär  $\Leftrightarrow$  Umg.  $P$  welche glatte  $C^r$  Flächenstück

Parametertrafo  
 $v \rightarrow u(v)$   
 zulässige Parametertrafo  
 $\begin{vmatrix} \frac{du^1}{dv^1} & \frac{du^1}{dv^2} \\ \frac{du^2}{dv^1} & \frac{du^2}{dv^2} \end{vmatrix} \neq 0$   
 Schmiegeaffinität  
 $d\vec{u} = \frac{d\vec{u}}{dv^1} dv^1 + \frac{d\vec{u}}{dv^2} dv^2$

1. Fundamentalform  
 $ds^2 = g_{ik} u^i u^k$   
 $s = \int \sqrt{g_{ik} u^i u^k} dt$   
 Länge einer Flächenkurve

$\vec{x}^i = \vec{x}_i - u^j \vec{x}_j$   
 $(\vec{x}^i)^2 = (\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i) (u^j)^2 + 2(\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j) u^j u^i + (\vec{x}_j \cdot \vec{x}_j) (u^i)^2$   
 $g_{ik}(u_1, u_2) = (\vec{x}_i \cdot \vec{x}_k)$   
 $d\vec{x} = \vec{x}_1 du^1 + \vec{x}_2 du^2$   
 $ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = g_{ik} u^i u^k$   
 $g_{ik}$  kovarianter Tensor 2. Stufe  
 $g_{ik} du^i du^k = g_{ik} \frac{du^i}{dv^j} \frac{du^k}{dv^h} dv^j dv^h$   
 $= \frac{du^i}{dv^j} \frac{du^k}{dv^h} d\vec{u}^i d\vec{u}^k$   
 $\vec{g}_{ij}$

$g_{ik}$  kovarianter Tensor 2. Stufe symmetrisch

$ds^2 = g_{ik} du^i du^k = \vec{g}_{ij} d\vec{u}^i d\vec{u}^j$   
 $u = u(\vec{u})$   $du^i = \frac{du^i}{d\vec{u}^j} d\vec{u}^j$

Winkel zwischen zwei Flächentangenten  
 $d\vec{x}(u) = \vec{x}_1 du^1 + \vec{x}_2 du^2$   
 $d\vec{x}(v) = \vec{x}_1 dv^1 + \vec{x}_2 dv^2$   
 $d\vec{x}(u) \cdot d\vec{x}(v) = |d\vec{x}(u)| \cdot |d\vec{x}(v)| \cdot \cos \omega$

Winkel zw. Flächentang.  
 $\cos \omega = \frac{g_{ik} du^i dv^k}{\sqrt{g_{ij} du^i du^j} \sqrt{g_{kl} dv^k dv^l}}$

Flächenmessung  
 $0 = \iint_G |\vec{g}| du^1 du^2$

$d\vec{u} = \vec{e}_1 du^1 + \vec{e}_2 du^2$   $dF = du^1 \wedge du^2$   
 $d\vec{x} = \vec{x}_1 du^1 + \vec{x}_2 du^2$   $dO = |\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2| \cdot du^1 \wedge du^2$   
 $|\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2| = \sqrt{(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1)(\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_2) - (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)^2} = \sqrt{\det g_{ik}} = |\vec{g}|$   
 isom. = konf. flächentreu

Regelflächen  $\vec{x}(u^1, u^2) = \vec{y}(u^1) + u^2 \cdot \vec{r}(u^1)$   
 Torsion  $\det(\vec{y}_1, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$   
 Tangentflächen  $\vec{F} = \vec{y}$

$\delta = [\vec{y}_1, \vec{r}_1, \vec{r}_2]$  Striktion  
 $[\vec{r}_1] \cdot [\vec{r}_1, \vec{r}_2]$   
 $\vec{x}''(u^1) = \vec{y}''(u^1) - \frac{(\vec{y}_1 \cdot \vec{r}_1) \vec{r}_1(u^1)}{|\vec{r}_1|^2}$   
 Striktionlinie von Regelflächen

Abbild.  $u$  von  $F^1$  auf  $F^2$   
 $\lambda^2(u) = \frac{ds^2}{ds^2}$  Linienelement  
 $du^1 = du \cos \epsilon$   $du^2 = du \sin \epsilon$   
 $r(u) = A(u)$  Tissot'sche Indikatritz  
 $g_{ik} = g_{ik}^0 \Rightarrow$  isom. Abbild.  
 $\Rightarrow$  Tissot'sche Indikatritz ist Einheitskreis  
 $\cos \omega, -\cos \omega \Rightarrow$  konf. Abbild.  
 $\Rightarrow$  Tissot'sche Indikatritz ist Kreis  
 $g^1 = g^2 \Rightarrow$  flächentreue Abb.

Regelflächen  
 Torsion  
 Tangentflächen

$\vec{n} = \frac{\vec{x}_i \times \vec{x}_j}{|\vec{x}_i \times \vec{x}_j|}$   $\vec{x}_{ijk} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}$

$L_{jk} = (\vec{x}_{jk} \cdot \vec{n})$

$-(d\vec{x} \cdot d\vec{n}) = L_{jk} du^j du^k$   
2. Fundamentalform

1. Fund. form  $g_{jk} = (\vec{x}_j \cdot \vec{x}_k)$   
 $(dx \cdot dx) = g_{jk} du^j du^k$   
2. Fund. form  $L_{jk} = (\vec{x}_{jk} \cdot \vec{n})$   
 $-(d\vec{x} \cdot d\vec{n}) = L_{jk} du^j du^k$

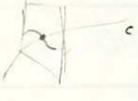
Difgeom  
 $g = \det g_{jk}$   
 $\Delta = \det L_{jk}$

Eigenwerte von  $(L - \lambda g)$

$\chi_n = \frac{L_{jk} du^j du^k}{g_{jk} du^j du^k}$   
Normalkrümmung für Flächenkurven

$\frac{d}{dt} (\vec{x} \cdot \vec{n}) = 0$   
 $(\vec{x} \cdot \vec{n})' = -(\vec{x}' \cdot \vec{n}) = L_{jk} u^j u^k$   
 $\vec{x}' = |\dot{x}| \cdot \vec{e}_1$   
 $\vec{x}'' = \ddot{x} \vec{e}_1 + \dot{x} \kappa \vec{e}_2$   
 $(\vec{x}' \cdot \vec{n}) = |\dot{x}|^2 \kappa (\vec{e}_1 \cdot \vec{n})$

$\chi_n = \frac{L_{11} \cos^2 \varphi + 2L_{12} \cos \varphi \sin \varphi + L_{22} \sin^2 \varphi}{g_{11} \cos^2 \varphi + 2g_{12} \cos \varphi \sin \varphi + g_{22} \sin^2 \varphi}$   
 $d\vec{u} = (du^1 \cos \varphi - du^2 \sin \varphi)$   
Normalkrümmung in Richtung  $\varphi$



P: Nabelpunkt  
Rang  $(L_{jk} \quad L_{jk}) = 1$   
 $g_{11} \quad g_{12} \quad g_{22}$

Hauptkrümm. d. Fläche im Punkt P  
 $\chi_1, \chi_2$ : Extrema von  $\chi_n$

Richtungsunabh. Normalkrümmung: Nabelpunkt  
Nabelpunkt mit  $\chi_n = 0$ : Flachpunkt  
Richtung wo  $\chi_n = 0$ : Asymptotenrichtung

2. Hk. Lösungen von  
 $\chi^2 g - \chi (g_{11} L_{22} - 2g_{12} L_{12} + g_{22} L_{11}) + \Delta = 0$

$\chi = \chi_1, \chi_2 = \frac{\Delta}{g}$  Gaußsche Krümmung  
 $H = \frac{1}{2} (\chi_1 + \chi_2) = \frac{1}{2g} (g_{11} L_{22} - 2g_{12} L_{12} + g_{22} L_{11})$   
mittlere Krümmung

Erweiterte Formel d. Flächeninhalt

$\chi_n(\varphi) = \chi_1 \cos^2 \varphi + \chi_2 \sin^2 \varphi$   
Gleichung d. Dupin'schen Indikatoren

$\chi^2 - g^{jk} L_{jk} \chi + \frac{\Delta}{g} = 0$

Tensoren  
 $\sigma_{i_1 \dots i_r}$   $i_1 \dots i_r$  r-fach kovarianter Tensor  
 $\sigma_{n_1 \dots n_s}$   $n_1 \dots n_s$  s-fach kontravarianter Tensor  
 $\sigma_{i_1 \dots i_r} \sigma_{n_1 \dots n_s} = \sigma_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial u^{j_1}}{\partial u^{n_1}} \dots \frac{\partial u^{j_r}}{\partial u^{n_r}} \frac{\partial u^{n_1}}{\partial u^{i_1}} \dots \frac{\partial u^{n_s}}{\partial u^{i_s}}$

Spez. Tensoren:  
 $g_{ij} = (\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j)$  kov. Tensor 2. Stufe  
 $g^{jk} = (g_{ij})^{-1}$  kontrav. Tensor  
 $\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$   $\epsilon$ -Tensor  
 $L_{jk} = (\vec{x}_{jk} \cdot \vec{n})$  2. Fundam. form

Christoffel-Symbole  
 $\Gamma_{ij}^k = (\vec{x}_{ij} \cdot \vec{x}_k) = \Gamma_{jih}^k$  1. Art  
 $\Gamma_{ij}^k = g^{hk} \Gamma_{ijh} = \Gamma_{ji}^k$  2. Art

Rechenregeln  
Addition:  $\sigma_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} + \sigma_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_s} = \sigma_{i_1 \dots i_r}^{l_1 \dots l_s}$  Komp.weise  
Multiplikation:  $\sigma_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \sigma_{i_{r+1} \dots i_{r+s}}^{j_{s+1} \dots j_{s+s}} = \sigma_{i_1 \dots i_{r+s}}^{j_1 \dots j_{s+s}}$   
Verjüngung:  $\sigma_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \rightarrow \sigma_{i_1 \dots i_{r-1}}^{j_1 \dots j_{s-1}}$   
Überschiebung: Multiplik. und Verj. nach Indexpaar auf versch. Faktoren  
Bsp.  $\sigma_{i,j} \cdot b_k^l \rightarrow c_{ik}^{jl} \rightarrow a_{ij}^k$   
Symmetrie u. schiefe Symmetrie bzgl. gleicher Indizes  
Indizes heraus und herunterziehen  $\rightarrow$  assoz. Tensoren  
Bsp.  $f_{i,j} = g^{jk} f_{ik}$

Flächentheor. Analogon zu Fried'scher Gleichungen

Ableitungsgleich. von Weingarten und Gauss  
 $\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i} = -L_j^i \vec{x}_j$   
 $\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^i} = \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} \vec{n}$

Weingarten: Ansatz:  $\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i} = -L_j^i \vec{x}_j$   
 $(\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i} \cdot \vec{x}_h) = -(\vec{n} \cdot \vec{x}_{jh})$   
 $(-L_j^i \vec{x}_j \cdot \vec{x}_h) = -L_{jh}$   
 $= -L_j^i g_{ih}$

Christoffel Formel  
 $\Gamma_{ijk}^l = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right]$

$\Gamma$  Gauss  $\vec{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} \vec{n}$  Ansatz  
 $(\vec{x}_{ij} \cdot \vec{n}) = L_{ij}$  durch skalare Multipl. mit  $\vec{n}$   
 $L_{ij} = \Gamma_{ij}^k (\vec{x}_k \cdot \vec{x}_n) = \Gamma_{ij}^k g_{kn}$   
 $\Gamma_{ijh}^k$

$\Gamma \frac{dg_{jk}}{du^i} = \vec{x}_j \cdot \vec{x}_{ki} + \vec{x}_j \cdot \vec{x}_{ki}$   
 $\frac{dg_{jk}}{du^i} = \Gamma_{ijk}^l + \Gamma_{jki}^l$   
 $\frac{dg_{ik}}{du^j} = \Gamma_{ijk}^l + \Gamma_{ikj}^l$   
 $\frac{dg_{ij}}{du^k} = \Gamma_{ikj}^l + \Gamma_{ijk}^l$

Transformationsverhalten der Christoffelschen Symbole

$\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{pq}^r \frac{\partial \bar{u}^p}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^q}{\partial u^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^r} + \frac{\partial^2 \bar{u}^r}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^r}$   
 $\Gamma_{ijk}^l = \bar{\Gamma}_{pqr}^s \frac{\partial \bar{u}^p}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^q}{\partial u^j} \frac{\partial \bar{u}^r}{\partial u^k} + \frac{\partial^2 \bar{u}^s}{\partial u^i \partial u^j} g_{rt} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^t}$

Christoffelsymbole 1. Art 2. Art verhalten sich nur unter affinen Transformationen wie Tensoren!

$\Gamma \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^i} = \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} \vec{n}$   
 $\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \bar{u}^p \partial \bar{u}^q} = \bar{\Gamma}_{pq}^r \vec{x}_r + \bar{L}_{pq} \vec{n}$

$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^i} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \bar{u}^p \partial \bar{u}^q} \frac{\partial \bar{u}^p}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^q}{\partial u^i} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \bar{u}^r} \frac{\partial^2 \bar{u}^r}{\partial u^i \partial u^i}$   
 $\Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} \vec{n} = (\bar{\Gamma}_{pq}^r \vec{x}_r + \bar{L}_{pq} \vec{n}) \frac{\partial \bar{u}^p}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^q}{\partial u^i} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \bar{u}^r} \frac{\partial^2 \bar{u}^r}{\partial u^i \partial u^i}$   
 $\Gamma_{ij}^k \vec{x}_k = \bar{\Gamma}_{pq}^r \vec{x}_r \frac{\partial \bar{u}^p}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^q}{\partial u^i} + \vec{x}_r \frac{\partial^2 \bar{u}^r}{\partial u^i \partial u^i}$

weil wegl.

$\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial u^k} = \bar{\Gamma}_{pq}^r \vec{x}_r \frac{\partial \bar{u}^p}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^q}{\partial u^i} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \bar{u}^r} \frac{\partial \bar{u}^r}{\partial u^i} \frac{\partial^2 \bar{u}^r}{\partial u^i \partial u^i}$

lin. unabh.

$\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{pq}^r \frac{\partial \bar{u}^p}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^q}{\partial u^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^r} + \frac{\partial \bar{u}^r}{\partial u^i} \frac{\partial^2 \bar{u}^r}{\partial u^i \partial u^j}$

Riemannscher Krümmungstensor

$$R_{ij}^k := \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^h} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^k}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^p \Gamma_{hp}^k - \Gamma_{ih}^p \Gamma_{jp}^k$$

antisymm. in j und h

Konexion verträglich mit Metrik  $\nabla_k g_{ij} = 0$   
 Konnexion ist dann gegeben durch Christoffel Formel

$$(R_{ij}^k T^i = (\nabla_j \nabla_h - \nabla_h \nabla_j) T^k)$$

Covariante Differentiation Konnexion

$$\nabla_j T^k = \frac{\partial T^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k T^i$$

[A\_j, T^k] A\_j: Eckfeld

Formeln von Gauss, Mainardi-Codazzi

$$R_{ij}^k = L_{ij} L_h^k - L_{ih} L_j^k$$

$$\Gamma_{ij}^k L_{hk} + \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^h} \text{ ist symm. in } j \text{ u } h$$

cor  $R_{hijk} = g_{mh} R_{ijk}^m = g_{mh} (L_{ik} L_j^m - L_{ij} L_k^m)$   
 $= L_{ik} L_{jh} - L_{ij} L_{kh}$

Integrierbarkeitsbedingungen d. Flächentheorie

$$\Gamma \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^i} = \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} \vec{n}$$

$$\frac{d}{du^h} \left( \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^i} \right) = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^h} \vec{x}_k + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^h} + \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^h} \vec{n} + L_{ij} \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^h}$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^h} \vec{x}_k + \Gamma_{ij}^k (\Gamma_{hk}^e \vec{x}_e + L_{hk} \vec{n}) + \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^h} \vec{n} + L_{ij} (-L_h^k \vec{x}_k)$$

$$R_{hijk} = L_{ik} L_{jh} - L_{ij} L_{kh}$$

$$\rightarrow R_{ijkh} = R_{ihkj}$$

$$R_{hijk} = -R_{hkij} = -R_{ihjk}$$

$R_{1212} = \Delta$
$R_{2121} = \Delta$
$R_{2112} = -\Delta$
$R_{1221} = -\Delta$

$$K = \frac{\Delta}{g} = \frac{R_{2121}}{g}$$

Variablen hängen und  $\frac{\partial}{\partial u^h} \left( \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^i} \right) = \frac{d}{du^i} \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^h} \rightarrow \Gamma_{ij}^k L_{hk} + \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^h}$  symmetrisch in j, h

und  $\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^h} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{hk}^e - L_{ij} L_h^k$  ist symmetrisch in j, h  $\rightarrow$  Rch

$K = \frac{R_{2121}}{g}$  Gauss'sche Krümmung ist eine Grösse der inneren Geometrie d. Fläche  
 hängt nur von  $g_{ij}$  und deren 2 Ableitungen ab. In Flächend. bestimmbar Grösse!  
 Theorema egregia von Gauss

Ricci Tensor

$R_{ge} = R^i{}^i{}_{ge}$  Spur vom Krümmungstensor  
 $R := g^{eg} R_{ge} = g^{eg} R^i{}^i{}_{ge}$  Skalar Krümmung

2dim Fall:  $R = 2K$   
 3dim Fall: Ricci Tensor definiert Krümmungstensor allgem. Relativitätstheorie  
 4dim Fall: Einsteins Ansatz:  $R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \Lambda T_{ij}$   
↑ Energie-Momententensor gravitationsfeld

Bsp

Flächen mit lauter Nabelpunkten

Flächen mit lauter Nabelpunkten sind Kugelscheibe oder Kugelschale

Nabelpunkt:  $L_{ik} = \chi_n g_{ik}$

Weyngarten:  $\frac{d\vec{n}}{du^i} = -\chi_n g_j^k \vec{x}_k = -\chi_n g^{kl} g_{ij} \vec{x}_k = -\chi_n \vec{x}_i$

d.h.  $\frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\vec{n}}{du^i} \frac{du^i}{dt} = -\chi_n \vec{x}_k \frac{du^k}{dt} = -\chi_n \dot{\vec{x}} = -\chi_n \frac{d\vec{x}}{dt}$

für jede Kurve c auf d. Fläche.  
 d.h. c ist Krümmungslinie (Formel von Rodrigues)

$$\frac{d}{du^i} \frac{d\vec{n}}{du^i} + \frac{\partial \chi_n}{\partial u^i} \frac{d\vec{x}}{du^i} + \chi_n \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \chi_n}{\partial u^2} \frac{d\vec{x}}{du^2} - \frac{\partial \chi_n}{\partial u^1} \frac{d\vec{x}}{du^1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \chi_n}{\partial u^2} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} - \frac{\partial \chi_n}{\partial u^1} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} = 0 \Rightarrow \chi = \text{konst}$$

1. Fall  $\chi = 0 \Rightarrow \vec{n}$  konstant  $\rightarrow$  Ebene

2. Fall  $\chi \neq 0 \Rightarrow \frac{d(\vec{n} + \chi \vec{x})}{dt} = 0 \rightarrow \vec{n} + \chi \vec{x} = \vec{a}$   
 sft.  $\chi_n = \frac{1}{r} \vec{m} = r \cdot \vec{a}$

$$\vec{n} + \frac{\vec{x}}{r} = \vec{m}$$

$$1 = \frac{1}{r^2} |\vec{x} - \vec{m}|^2 \text{ Kugel}$$

Bsp Flächen mit isolierter parabolischer Punkte

$$K=0 \Rightarrow \Delta = \det L_{ij} = 0$$

Fall:  $L_{11} = 0 \vee L_{22} = 0 \Rightarrow$  Fläche ist eben (folgt aus Weingarten)

Fall: nicht alle  $L_{ij} = 0$

Differentialgleich. für Asymptotenlinien:  $L_{ij} du^i du^j = 0$   
 (da  $x_n = \frac{L_{ij} du^i du^j}{g_{ij} du^i du^j}$ )

wegen  $L_{11} L_{22} = L_{12}^2$  gilt

$$(L_{11} du^1 + L_{22} du^2)^2 = 0 \quad \text{d.h. } |L_{11} du^1 + L_{22} du^2| = 0 \Rightarrow du^1 = c \cdot du^2$$

nur eine Schar von Asymptotenlinien

neu Parameter mit  $du^2 = 0 \Rightarrow L_{11} = 0 \Rightarrow L_{11} = 0$

also  $\frac{d\vec{n}}{du^1} = 0$  Weingarten  $\Rightarrow \vec{n} = \text{konstant}$

$L_{22} \neq 0 \Rightarrow$  Mainardi-Codazzi  $\Gamma_{11}^2 = 0$

gauss  $\bar{x}_{ij} = \bar{\Gamma}_{ij}^k \bar{x}_k + \bar{L}_{ij} \bar{n}$

$$\frac{d^2 \bar{x}}{du^1 du^1} = \bar{\Gamma}_{11}^2 \frac{d\bar{x}}{du^1} = 0 \quad \text{d.h. Asymptotenlinien sind geraden}$$

sphärischer Bild von Flächen

$$L_{ij} = g_{ij} L_{ij}$$

$$L = \frac{\Delta}{g} = k$$

$g = \det g_{ij}$   
 $L = \det L_{ij}$   
 $\Delta = \det L_{ij}$

$$\frac{d\vec{n}}{du^1} \times \frac{d\vec{n}}{du^2} = k \cdot \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 = \sqrt{g} \vec{n} k$$

Weingarten  $\frac{d\vec{n}}{du^1} = -L_1^k \vec{x}_k \quad \frac{d\vec{n}}{du^2} = -L_2^k \vec{x}_k$

$$\frac{d\vec{n}}{du^1} \times \frac{d\vec{n}}{du^2} = L_1^k L_2^l (\vec{x}_k \times \vec{x}_l) = k \cdot (\vec{x}_1 \times \vec{x}_2)$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{d\vec{n}}{du^1} \times \frac{d\vec{n}}{du^2} \cdot \vec{n} \right]$$

$$dS = \left| \frac{d\vec{n}}{du^1} \times \frac{d\vec{n}}{du^2} \right| du^1 du^2 = |k| \cdot \sqrt{g} du^1 du^2 = |k| dO$$

$$dS' = \left( \frac{d\vec{n}}{du^1} \times \frac{d\vec{n}}{du^2} \right) \cdot \vec{n} du^1 du^2 = k \sqrt{g} du^1 du^2 = k \cdot dO$$

$$K = \frac{dS}{dO}$$

$$C_F = \iint k dO = \iint dS'$$

Curvature Integral

Flächengeometrie

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  Frenet-Serret  
 $w_1 = \vec{r}_1$   
 $w_2 = \vec{n}$   
 $w_3 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$   
 an der Fläche orientiert, hergestellt, 3 Bein

$$\begin{pmatrix} \vec{w}_1' \\ \vec{w}_2' \\ \vec{w}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \end{pmatrix}$$

Ableitungsgleichungen für das Flächenelement bei Flächenkurven

$\kappa_g$  geodätische Krümmung  
 $\tau_g$  geodätische Torsion

Formeln von Bonnet

$$\begin{aligned} \gamma &:= \angle(\vec{n}, \vec{r}_2) \\ \kappa_g &= \kappa \cdot \sin \gamma \\ \kappa_n &= \kappa \cdot \cos \gamma \\ \tau_g &= \tau + \frac{d\gamma}{ds} \end{aligned}$$

$$\vec{w}_1' = \vec{r}_1' = \kappa \cdot \vec{r}_2 = \kappa (\vec{r}_2 \cdot \vec{w}_1) \vec{w}_2 + \kappa (\vec{r}_2 \cdot \vec{w}_3) \vec{w}_3 = \kappa \sin \gamma \vec{w}_2 + \kappa \cos \gamma \vec{w}_3$$

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1' \\ \vec{r}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \gamma \cos \gamma \\ -\cos \gamma \sin \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{w}_1' \\ \vec{w}_2' \\ \vec{w}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \gamma \cos \gamma \\ -\cos \gamma \sin \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1' \\ \vec{r}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \sin \gamma \\ -\sin \gamma \cos \gamma \end{pmatrix} \frac{d\gamma}{ds} + \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d\gamma}{ds} + \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix}$$

$\kappa_g$  ist eine isometrische Invariante

geodätische Krümmung der Parameterlinien

$$\kappa_g / du^1 = 0 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{d}{du^1} \ln \sqrt{g_{22}}$$

$$\kappa_g / du^2 = 0 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{d}{du^2} \ln \sqrt{g_{11}}$$

geodätische Linien

kurven, deren geodät. Krümmung verschwindet  
 $\chi_g = (\vec{w}_1' \cdot \vec{w}_2) = \vec{r}_1' \cdot \vec{n} = \vec{x}' \cdot \vec{n} \vec{x} = [\vec{x}', \vec{x}, \vec{n}]$   
 $[\vec{x}', \vec{x}, \vec{n}] = 0$  Dgl-Gleichung d. geodät. Linien  
 $\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0$

In jedem Punkt  $(u^1, u^2)$  auf einer Fläche gibt es in jeder einzig. Tangentialrichtung genau eine geodätische Linie

aus symmetrischer d. Lösung v. Dgl-Gleich. müssen nur noch zeigen d.h.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} &= g_{ij}' \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + 2g_{in} \frac{d^2 u^k}{ds^2} \frac{du^i}{ds} \\ &= (\Gamma_{nij} + \Gamma_{inj} - 2g_{in} \Gamma_{ij}^k) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}' \cdot \vec{x}'' &= \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} \cdot \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \sum \frac{d\vec{x}}{du^k} \frac{du^k}{ds} \right) \cdot \frac{d\vec{x}}{ds} \\ &= \sum_k \sum_l \frac{d^2 \vec{x}}{du^k du^l} \frac{du^k}{ds} \frac{du^l}{ds} + \frac{d\vec{x}}{du^k} \frac{d^2 u^k}{ds^2} \\ &= \left[ \sum_k x_{kk} \frac{du^k}{ds} \frac{du^k}{ds} + \sum_k x_{kl} \frac{d^2 u^k}{ds^2} \right] \\ &= \Gamma_{kk}^m \frac{du^k}{ds} \frac{du^k}{ds} \vec{x}_m + L_{kk} \frac{du^k}{ds} \frac{du^k}{ds} \vec{n} + x_k \frac{d^2 u^k}{ds^2} \\ &= \left[ \Gamma_{kk}^m \frac{du^k}{ds} \frac{du^k}{ds} + \frac{d^2 u^m}{ds^2} \right] \vec{x}_m + L_{kk} \frac{du^k}{ds} \frac{du^k}{ds} \vec{n} = 0 \\ [\vec{x}', \vec{x}'', \vec{n}] &= 0 \Rightarrow \Gamma_{kk}^m \frac{du^k}{ds} \frac{du^k}{ds} + \frac{d^2 u^m}{ds^2} = 0 \end{aligned}$$

Geodäten minimieren das Funktional  
 $S[\gamma] = \int_p \mathcal{L}(u^i, u^i, \frac{du^i}{ds}, \frac{du^i}{ds}) ds$   
 $\mathcal{L} = g_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j \quad \dot{\xi}^i = \frac{du^i}{ds}$

Integralformel von Gauss Bonnet

$$\oint_C \kappa_g ds + \iint_B K dO = 2\pi$$

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left( -\frac{dg_{11}}{du^2} \frac{du^1}{ds} + \frac{dg_{22}}{du^1} \frac{du^2}{ds} \right) + \frac{d\kappa}{ds}$$

natürlicher Parameter

$\Gamma^i_{jk} = g^{il} \dot{u}^j$  schreiben  $u^i$  für  $\frac{du^i}{ds}$

Euler-Lagrange:  $\frac{d}{ds} p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i}$

$$\frac{dp_k}{ds} - \frac{1}{2} \frac{dg_{ij}}{du^k} u^i u^j = u^i g_{ik} + u^j \frac{dg_{jk}}{du^i} u^i$$

$$\ddot{u}^m + u^i u^j g^{km} \left( \frac{dg_{jk}}{du^i} - \frac{1}{2} \frac{dg_{ij}}{du^k} \right) = 0$$

$$\ddot{u}^m + u^i u^j g^{km} \left( \frac{dg_{jk}}{du^i} + \frac{dg_{ik}}{du^j} - \frac{dg_{ij}}{du^k} \right) = 0$$

$\Gamma^m_{ij}$  └

Seien  $v_1, v_2$  sodass  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{n}$   
 mit  $\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 \cdot \vec{a} + \vec{v}_2 \cos \alpha + \vec{v}_1 \sin \alpha$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix} = \vec{a} + \begin{pmatrix} -\sin \alpha \vec{v}_1 + \cos \alpha \vec{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \vec{v}_1 + \sin \alpha \vec{v}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{a} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$$

natürliche Parameter:  $\kappa_g = (v_1 \cdot v_2) + \frac{d\kappa}{ds}$

Seien  $v_1 = \frac{1}{|\vec{x}_1|} \vec{x}_1 \quad \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \vec{x}_1 \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{|\vec{x}_2|} \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \vec{x}_2$

$$\frac{dv_1}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \vec{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \dot{\vec{x}}_1 \quad \vec{v}_1' = \frac{d\vec{v}_1}{ds} \frac{du^1}{ds} + \frac{dv_1}{ds} \frac{du^2}{ds}$$

$$\frac{dv_2}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \vec{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \dot{\vec{x}}_2$$

also  $(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)' = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left( \frac{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2}{ds} \frac{du^1}{ds} + (\vec{x}_1 \cdot \dot{\vec{x}}_2) \frac{du^1}{ds} \right)$   
 da  $g_{11} = 0$   
 natürlich Parameter └

$$\oint \kappa_g ds = I + \oint \frac{d\kappa}{ds}$$

woher  $I = \oint_C \frac{1}{2\sqrt{g}} \left( -\frac{dg_{11}}{du^2} \frac{du^1}{ds} + \frac{dg_{22}}{du^1} \frac{du^2}{ds} \right) ds = \oint \frac{1}{2\sqrt{g}} \left( -\frac{dg_{11}}{du^1} \frac{du^1}{ds} + \frac{dg_{22}}{du^2} \frac{du^2}{ds} \right)$   
 Integration in Parameterebene

$$= \iint_B \frac{1}{\sqrt{g}} \left( -\frac{1}{4} g_{11} \left( \frac{dg_{11}}{du^1} \right)^2 - \frac{1}{4} g_{11} \frac{dg_{11}}{du^2} \frac{dg_{22}}{du^1} + \frac{1}{2} g \frac{d^2 g_{22}}{du^1 du^2} \right) = \iint_B -\sqrt{g} \cdot K dO$$

$$+ \frac{1}{4} g_{22} \left( \frac{dg_{22}}{du^2} \right)^2 - \frac{1}{4} g_{22} \frac{dg_{22}}{du^1} \frac{dg_{11}}{du^2} + \frac{1}{2} g \frac{d^2 g_{11}}{du^2 du^1}$$

$C_p = \iint_B K dO = 4\pi(1-p)$  für p-facher Locher Fläche  
 $C_F = 2\pi \chi_F \quad \chi_F$  Eulerische Charakteristik

Für geod. Kurven gilt  $\iint_B K dO = 2\pi$

geodätische Eierecke:  $\iint K dO = \pi + \omega$   
 geodätisch. Zweiecke:  $\iint K dO = \omega_1 + \omega_2$   
 geodätisch. Dreiecke:  $\iint K dO = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \pi$  sphärischer Exzess



$g_{11} = g_{22} = \left( \frac{1}{u^1} \right)^2 \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad ds^2 = \frac{(du^1)^2 + (du^2)^2}{(u^1)^2}$

Flächen- und Längen geodäten  
 hat konstante Krümmung  $K = -1$   
 Winkelsumme  $< \pi$  im  $\Delta$   
 Längenmessung?

Riemannsche Metrik d. hyperbol. Geometrie

Die kovariante Ableitung

$$\begin{aligned} T^i_{jk} &= \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} T^j \\ &= \nabla_k T^i \end{aligned}$$

Kovariante Ableitung alle Konnexion

betrachten hier nur Konnexionen die vertikal sind mit dem Merkmal  $\nabla_k g_{ij} = 0$

$$\Rightarrow \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Die kovariante Ableitung eines Tensors ist ein Tensor

$$\begin{aligned} \tilde{T}^p &= T^p \delta u^p \\ \frac{d\tilde{T}^p}{d\tilde{u}^q} &= \frac{\partial T^p}{\partial u^q} \frac{du^q}{d\tilde{u}^q} \frac{d\tilde{u}^p}{du^p} + T^p \frac{d^2 \tilde{u}^p}{du^p d\tilde{u}^q} \frac{du^q}{d\tilde{u}^q} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{pq}^r = \tilde{\Gamma}^r_{p'q'} \frac{d\tilde{u}^{p'}}{du^p} \frac{d\tilde{u}^{q'}}{du^q} \frac{du^r}{d\tilde{u}^{r'}} + \frac{du^r}{d\tilde{u}^{r'}} \frac{d^2 \tilde{u}^{r'}}{du^p du^q}$$

$$\tilde{\nabla}_{p'} \tilde{T}^{r'} = \frac{d\tilde{T}^{r'}}{d\tilde{u}^{p'}} + \tilde{\Gamma}^r_{p'q'} \tilde{T}^{q'} = \frac{\partial T^r}{\partial u^p} \frac{du^p}{d\tilde{u}^{p'}} \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^r} + \left( \Gamma_{pq}^r \frac{du^p}{d\tilde{u}^{p'}} \frac{du^q}{d\tilde{u}^{q'}} \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^r} + \frac{du^r}{d\tilde{u}^{r'}} \frac{d^2 \tilde{u}^{r'}}{du^p du^q} \right) T^p \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^p}$$

$$\tilde{\nabla}_{p'} T^r \frac{du^p}{d\tilde{u}^{p'}} \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^r} = \frac{\partial T^r}{\partial u^p} \frac{du^p}{d\tilde{u}^{p'}} \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^r} + \Gamma_{pq}^r T^p \frac{du^p}{d\tilde{u}^{p'}} \frac{du^q}{d\tilde{u}^{q'}} \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^r}$$

müssen zeigen:  $\frac{\partial T^r}{\partial u^p} \frac{du^p}{d\tilde{u}^{p'}} \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^r} + \Gamma_{pq}^r T^p \frac{du^p}{d\tilde{u}^{p'}} \frac{du^q}{d\tilde{u}^{q'}} \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^r} = \frac{\partial T^r}{\partial u^p} \frac{du^p}{d\tilde{u}^{p'}} \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^r}$

$$\frac{d^2 \tilde{u}^{r'}}{du^p du^q} = \Gamma_{pq}^r \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^r} - \tilde{\Gamma}^r_{p'q'} \frac{d\tilde{u}^{p'}}{du^p} \frac{d\tilde{u}^{q'}}{du^q}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{T}^{r'}}{d\tilde{u}^{p'}} &= \frac{\partial T^p}{\partial u^q} \frac{du^q}{d\tilde{u}^{q'}} \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^p} + T^p \left( \Gamma_{pq}^r \frac{d\tilde{u}^{p'}}{du^p} - \tilde{\Gamma}^r_{p'q'} \frac{d\tilde{u}^{p'}}{du^p} \frac{d\tilde{u}^{q'}}{du^q} \right) \frac{du^q}{d\tilde{u}^{q'}} \\ &= \frac{\partial T^p}{\partial u^q} \frac{du^q}{d\tilde{u}^{q'}} \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^p} + T^p \left( \Gamma_{pq}^r \frac{d\tilde{u}^{p'}}{du^p} \frac{du^q}{d\tilde{u}^{q'}} - \tilde{\Gamma}^r_{p'q'} \frac{d\tilde{u}^{p'}}{du^p} \frac{d\tilde{u}^{q'}}{du^q} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{T}^{r'}}{d\tilde{u}^{p'}} + \tilde{\Gamma}^r_{p'q'} \frac{d\tilde{u}^{q'}}{du^q} T^p = \left( \frac{\partial T^p}{\partial u^q} + \Gamma_{pq}^p T^p \right) \frac{du^q}{d\tilde{u}^{q'}} \frac{d\tilde{u}^{r'}}{du^p} \quad \text{qed}$$

Parallelverschiebung von Levi Civita

Vektorfeld  $\vec{v}(t)$  auf Fläche  $F$  gegeben  $\vec{v}(t)$  geodätisch parallel längs Kurve  $c$ , falls  $\dot{\vec{v}}(t) \parallel \vec{n}$  auf  $g_{ij}$

$$\vec{v} = v^i \vec{x}_i \quad \dot{\vec{v}} = \dot{v}^i \vec{x}_i + v^i \frac{d\vec{x}_i}{du^j} \frac{du^j}{dt}$$

ist geodätisch parallel falls:  $(\dot{\vec{v}} \cdot \vec{x}_k) = 0$  d.h.  $\dot{v}^i (x_i \cdot x_k) + v^i (x_{ij} \cdot x_k) \frac{du^j}{dt} = 0$

$$\dot{v}^i g_{ik} + \Gamma_{ij}^k v^i \frac{du^j}{dt} = 0$$

$$\dot{v}^k + \Gamma_{ij}^k v^i \frac{du^j}{dt} = 0 \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv^e}{du^j} \frac{du^j}{dt} + \Gamma_{ij}^e v^i \frac{du^j}{dt} &= 0 \\ \nabla_j v^e \frac{du^j}{dt} &= 0 \\ \text{d.h. } \nabla_{\dot{u}} \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

Setze  $v^e = \frac{du^e}{dt}$  dann geodätisch

es gilt auch:  $g_{ik} v^i v^k$  ist invariant, falls  $\vec{v}_i$  geodätisch parallel verschoben werden

$$\frac{d}{dt} g_{ik} v^i v^k = \frac{dg_{ik}}{du^j} v^j v^i v^k + g_{ik} \tilde{\nabla}^i v^k + g_{ik} v^i \dot{v}^k$$

$$g_{ik} (-\Gamma_{jm}^i v^j v^m - \Gamma_{jm}^k v^j v^m) v^i v^k$$

M Mannigfaltigkeit  
 (i) Hausdorffraum  
 (ii) lokal euklidisch  
 $\{U_\alpha, U_\beta\}$  Atlas  
 $\text{Bod}^{-1} \subset \text{Abb. } C^1 M$   
 $\text{Bod}^{-1}$  analyt. anst. M.

$\varphi: M \rightarrow N \in C^1(M, N)$   
 falls  $\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1} \in C^1$   
 $\varphi$  Diffeom. falls  
 $\varphi$  bij.  $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1$

$T_p M$  Tangentialraum  
 $T_p M = \{ \dot{\gamma} \in C^1(M, M) \mid \gamma(0) = p \} / \sim$   
 $\dot{\gamma}_1 \sim \dot{\gamma}_2 \iff \frac{d}{dt} \alpha \circ \gamma_1(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \alpha \circ \gamma_2(t) \Big|_{t=0}$   
 $TM$  Tangentialbündel  
 $TM = \bigcup_p T_p M$  ist  $C^1$  Mannigf.  
 mit Karten  
 $U_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow d(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$   
 $U_\alpha(\gamma) = (\alpha \circ \gamma(0), \frac{d}{dt} \alpha \circ \gamma \Big|_{t=0}) \quad \forall \gamma \in TM$   
 $\pi: TM \rightarrow M \quad \pi(\gamma) = \gamma(0)$   
 $U_\alpha \circ U_\alpha^{-1}(x, \xi) = (\text{Bod}^{-1}(x), d(\text{Bod}^{-1})(x)\xi)$

$T_p^* M$  Cotangentialraum  
 Dualraum v.  $T_p M$   
 $T^* M$  Cotangentialbündel  
 $\varphi: M \rightarrow N$   
 $T^* \varphi^{-1}: T^* N \rightarrow T^* M = (T_p \varphi)^* \text{ adj. Operator auf Fasern}$   
 $\varphi: M \rightarrow N$  durch  $x = f(t)$  in lok. Koordin. repräsent.  
 $\dot{x} = f'(t) \quad \dot{\xi} = -\xi^* \dot{f}(t)$  ( $T^* \dot{x}$  in lok. Koordin.)  
 $\Gamma \frac{d}{dt} \xi^*(t) \xi(t) = \xi^* \dot{\xi} + \dot{\xi}^* \xi = 0$   
 $\langle T^* \varphi^{-1}(v^*), T^* \varphi(v) \rangle = \langle v^*, v \rangle$

$T^* \varphi^* \alpha = \alpha \circ \varphi^*$   
 in lokalen Koordin.:  $(T^* \varphi^* \alpha)_{(x, \xi)} = (\lambda(t), \xi(t))$   
 $[\alpha \circ \varphi^*]_{(x, \xi)} = (\lambda(t), f(\lambda(t)))$   
 d.h.  $\xi = f(\lambda(t))$  Lösung von  $\dot{\lambda} = f(\lambda)$   
 $\dot{\xi} = d f(\lambda) \dot{\lambda}$

$\varphi: M \rightarrow N$   
 $T\varphi: TM \rightarrow TN$   
 $T\varphi(v) = [\varphi \circ \gamma]'$   
 $U_\beta \circ T\varphi \circ U_\alpha^{-1}(x, \xi) = (\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1}(x), d(\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1})(x)\xi)$   
lokale Basis von  $T_p M$ :  
 $U_\alpha^{-1}(\alpha(p), e_i) \quad \dot{\gamma}_i = \frac{d}{dt} \alpha^{-1} \circ \gamma_i \quad i=1, \dots, m$   
 $v = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{d}{dx_i} = \xi \cdot \nabla$

$X: M \rightarrow TM$  Vektorfeld  
 $X(p) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = f \cdot \nabla$   
 $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 $T F \circ X = F X'(t) = \sum f_i'(x) \frac{\partial F \alpha^{-1}(x)}{\partial x_i} = f \cdot \nabla F \alpha^{-1}$   
 $T\varphi(v) = \sum \xi_i \frac{\partial \beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1}(x)}{\partial x_i} \frac{d}{dy_i} =$   
 $\frac{d}{dy_i} = U_\beta^{-1}(\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1}(x), e_j)$

$\varphi^t: M \rightarrow M$  Strömung d. Vektorfeldes  
 $\alpha(\varphi^t(p)) = x(t) \quad \dot{x} = f(x) \quad x(0) = \alpha(p)$   
 $T\varphi^t: TM \rightarrow TM$  in lokalen Koordin.:  
 $\dot{x} = f(x) \quad \dot{\xi} = d f(x) \xi \quad \Gamma \xi(t) = d(\alpha \circ \varphi^t \circ \alpha^{-1})(x_0) (\xi_0)$   
 $\dot{\xi}(t) = d f(x) d \lambda(t) \xi_0 = d f \xi(t)$   
 Lineares System

Allgemeine Fragestellung:

Gegeben eine Einbettung einer diffeotopen Mannigfaltigkeit  $M$  in eine diffeotopen Mannigfaltigkeit  $N$ . Man beschreibe diese Einbettung.  
 Spezieller: Einbettung in sich selbst, d.h. nur die innere Geometrie wird untersucht. Welche Größen bestimmen die innere Geometrie?  
 Welche Größen bestimmen die Einbettung?  
 Welche Größen bestimmen die innere Geometrie?

Kurventheorie

Einbettung einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit in  $E^n$ .

Die Frenetschen Gleichungen

Sei  $\vec{x}$  ein Punkt der Kurve, wir konstruieren eine Basis des Tangentialraums von  $E^n$  an diesem Punkt, sodass die Basis des Tangentialraums eine natürliche Einbettung ist, d.h.  $\vec{T}_1 = \dot{\vec{x}}$  und die weiteren Basisvektoren induktiv  $\vec{T}_i \in \langle \vec{T}_1, \dots, \vec{T}_{i-1}, \dot{\vec{x}} \rangle$  gewählt werden. Wenn wir das ganze Tangentialraumbündel von  $E^n$  in einen Tangentialraum stecken, wird die Bewegung der Basis  $\vec{T}_i$  durch eine einparametrische Gruppe  $R(t)$  in  $SO(n)$  beschrieben. Diese Bewegung ist bestimmt durch ihre Bahn in  $TSO(n) = \mathfrak{so}(n)$ .

$$\vec{T}_i(t) = R_i^j(t) \vec{T}_j(0)$$

$$\vec{T}_i'(t) = R_i^j \dot{\vec{T}}_j(0) = R_i^j R_k^l T_k^l \vec{T}_l(t) = A_j^k(t) \vec{T}_k(t)$$

$A_j^k = A_j^k + T$  da  $RR^T = I$   
 $\frac{R_i^j R_k^l + R_i^l R_k^j}{A} = 0$

Wegen der speziellen Wahl der Basis hat  $A$  nur in den Nebendiagonalen Elemente

$$\vec{T}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & & & \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & & \\ & -\kappa_2 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \kappa_{n-1} \\ & & & & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \vec{T}$$

wobei  $\kappa_1, \dots, \kappa_{i-2}$  sogar positiv gewählt werden können.  $\kappa_{i-1}$  ist mit einem Vorzeichen behaftet.

Die Bewegung  $A(t)$  im Tangentialraum von  $SO(n)$  beschreibt die Kurve vollständig und eindeutig bis auf gleichsinnige Kongruenzabbildungen.  $\vec{x}(s) = \vec{x}_0 + \int \vec{T}_1(s) ds$

Die innere Geometrie eindimensionaler Mannigfaltigkeiten ist insofern trivial, da wir jede Kurve isometrisch isomorph auf  $\mathbb{R}$  oder  $S^1$  abbilden können. Die Frage nach der relativen Geometrie zu  $E^n$  wird durch die Frenetschen Gleichungen beantwortet. Einbettungen in zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten werden später betrachtet.

Kurven im  $E^3$

$\vec{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  vorgegeben

$x_1 := x_1$   
 $x_2 := x_2$

Basis:  
 $\vec{T}_1 = \dot{\vec{x}}$   
 natürl. Paramet.  $\vec{T}_2 = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}$   
 $\vec{T}_3 = \dot{\vec{x}} \wedge \ddot{\vec{x}}$

$\vec{T}_1 = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$      $\vec{T}_2 = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}$      $\vec{T}_3 = \vec{T}_1 \wedge \vec{T}_2$

Frenet:  $\vec{T}_1' = \kappa \vec{T}_2 \Rightarrow \kappa = |\dot{\vec{x}}''|$

$$\ddot{\vec{x}} = |\dot{\vec{x}}'| \vec{T}_1 + |\dot{\vec{x}}''| \vec{T}_2$$

$$(\ddot{\vec{x}}, \vec{T}_2) = |\dot{\vec{x}}''| (\vec{T}_1, \vec{T}_2) = \kappa \cdot |\dot{\vec{x}}'|$$

$$\dot{\vec{x}} \wedge \ddot{\vec{x}} = |\dot{\vec{x}}'| \cdot \dot{\vec{x}} \wedge \vec{T}_2 = |\dot{\vec{x}}'|^2 \kappa \vec{T}_3 = \kappa \cdot |\dot{\vec{x}}'|^3 \vec{T}_3$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{|\dot{\vec{x}} \wedge \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$$

$$\tau = \frac{|\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}'|}{|\dot{\vec{x}} \wedge \ddot{\vec{x}}'|}$$

Kanonische Entwicklung d. Kurve.

$\vec{x}(s) = \vec{x}(0) + \vec{x}'(0)s + \frac{1}{2} \vec{x}''(0)s^2 + \dots$

$\vec{x}(0) = 0$   
 $\vec{x}'(0) = \vec{T}_1$   
 $\vec{x}''(0) = \kappa \vec{T}_2$   
 $\vec{x}'''(0) = \kappa' \vec{T}_2 + \kappa \vec{T}_2' = \kappa' \vec{T}_2 + \kappa(-\kappa \vec{T}_1 + \tau \vec{T}_3) = -\kappa^2 \vec{T}_1 + \kappa' \vec{T}_2 + \kappa \tau \vec{T}_3$

$x_1 = s - \frac{1}{2} \kappa^2 s^3$	} $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ (Schmieg. Ebene) $\vec{T}_1, \vec{T}_3$ (natürl. Ebene) $\vec{T}_2, \vec{T}_3$ (Normalenebene)	Parallel
$x_2 = \frac{1}{2} \kappa s^2 + \frac{1}{6} \kappa' s^3$		keine Parallel
$x_3 = \frac{1}{6} \kappa \tau s^3$		Natürliche Parallel

Sphärische Kurven:

Kurve ist sphärische Kurve  $\Leftrightarrow \rho r + \left(\frac{\rho'}{r}\right)' = 0 \quad \rho = \frac{1}{\kappa}$

$\Gamma$  Krümmungskreis:  $\vec{m} = \vec{x} + \rho \vec{r}_2$   
Schnittpunkt:  $\vec{m} = \vec{x} + \rho \vec{r}_2 + \frac{\rho'}{r} \vec{r}_3$

$|\vec{x} - \vec{m}| = r^2$       Berührung 0.ter Ordnung

$2(\vec{x} - \vec{m}) \vec{x}' = 2(\vec{x} - \vec{m}) \vec{r}_1 = 0 \Rightarrow (\vec{x} - \vec{m}) \perp \vec{r}_1$       Berührung 1.ter Ordnung

$2\vec{x}' \vec{r}_1 + 2\vec{x} \vec{r}_1' = 2 + 2\vec{x} \cdot \vec{r}_2 = 0 \Rightarrow (\vec{x} \cdot \vec{r}_2) = -\frac{1}{\kappa}$       Berührung 2.ter Ordnung

$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + \vec{x} \cdot \vec{r}_2' + \vec{x} \cdot (-\kappa \vec{r}_1 + \tau \vec{r}_3) = 0 \Rightarrow -\frac{\kappa'}{\kappa} + (\vec{m} \cdot \vec{r}_1) \kappa^2 + \kappa \tau (\vec{x} \cdot \vec{r}_3) = 0$

$\Rightarrow (\vec{x} \cdot \vec{r}_3) = \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}$

$(\vec{x} - \vec{m}) = -\frac{1}{\kappa} \vec{r}_2 + \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \vec{r}_3 = -\rho \vec{r}_2 - \frac{\rho'}{\tau} \vec{r}_3$

Berührung 3.ter Ordnung

Radius d. Schnittkugel:  $\rho^2 + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)^2 = r^2$

$r^2' = 2\rho\rho' + 2\left(\frac{\rho'}{\tau}\right) \cdot \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' = 0$

$\rho\tau + 2\left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' = 0$        $\checkmark$

Böschungslinien:

Raumkurve, deren Tangente mit festem Vektor  $\vec{e}$  einen konst. Winkel  $\alpha$  einschließt

Saint Venant

kurve Böschungslinie  $\Leftrightarrow \rho \cdot \tau$  konstant

$\Gamma$   $(\vec{e} \cdot \vec{r}_1) = \cos \alpha$

$(\vec{e} \cdot \vec{r}_1)' = \tau (\vec{e} \cdot \vec{r}_2) = 0 \Rightarrow \vec{e} \perp \vec{r}_2$

$(\vec{e} \cdot \vec{r}_3)' = \tau \cdot \tau' = 0 \Rightarrow (\vec{e} \cdot \vec{r}_3) = \text{konst.}$

$(\vec{e} \cdot \vec{r}_2)' = \vec{e} \cdot (-\kappa \vec{r}_1 + \tau \vec{r}_3) \Rightarrow -\kappa \cos \alpha + \tau k = 0$

umgekehrt:  $\tau = k \cdot \kappa$       d.h.:  $\text{clg} \alpha := k$   
 $\vec{e} = \cos \alpha \vec{r}_1 + \sin \alpha \vec{r}_3$

$(\vec{x}' \cdot \vec{e}) = (\vec{r}_1 \cdot \vec{e}) = \cos \alpha$

$\vec{e}(s) = \cos \alpha \cdot \tau \vec{r}_2 + \sin \alpha (-\tau \vec{r}_3)$   
 $= \underbrace{(\tau \cos \alpha - \tau \sin \alpha)}_0 \vec{r}_2$        $\checkmark$

Darboux Vektor:

$\vec{D} := \tau \vec{r}_2 + \kappa \vec{r}_3$

es gilt:  $\vec{D} \wedge \vec{x}' = \vec{x}''$

$\vec{x}' = x^i \vec{r}_i$

$\vec{x}'' = x^i \vec{r}_i' = x^i A_i^k \vec{r}_k = \vec{D} \wedge \vec{x}'$

schief/symmetrisch  
 Matrix  $\Rightarrow$  Vektor  
 vgl. Drehung  $R = e^A$   
 $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 - \omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$   
 $A \cdot \vec{e} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}$

Kurven im  $E^2$

Eilinie und Gleichdeute

Eilinie: |Gerade  $n \subset E^2$

einfach geschl.:  $\int \alpha ds = 2\pi$

$\kappa' = \gamma''$

Satz

einfach geschlossene Kurve  $\vec{x}$  mit  $x_j \in C^2$  und  $\alpha(s) > 0$  ist eine Eilinie

Satz von Minkowski

jede Eilinie mit  $\vec{x}_i \in C^3$  hat mind 4 Scheitelpunkte.  $\dot{x}(t) = 0$

$\Gamma$  2 Scheitelpunkte  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  legt Gerade durch die zwei nachgewiesenen Scheitelpunkte



$\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$  Koord. systeme "sogauschli"

$\int_C \alpha'(s) x(s) ds = - \int_C \alpha \ddot{x}(s) ds = - \int_C \alpha \ddot{x}_i ds = - \int_C \ddot{x}_i ds = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \int_C \alpha'(s) x(s) ds = \int_C \alpha'(s) (\vec{a} \cdot \vec{x}) ds = 0$

Annahme: keine weiteren Scheitelpunkte  $\Rightarrow \int_C \alpha'(s) (\vec{a} \cdot \vec{x}) ds = \int_C \alpha'(s) \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{x}}_{\neq 0} ds + \int_C \alpha'(s) \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{x}}_{\neq 0} ds = 0$   
o.B.d.B.  $\int$

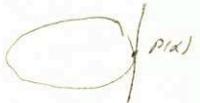
$\alpha' > 0$  or  $\alpha' < 0$  unregelmäßig

Bahier

Satz

Eilinie mit konstanter Breite  $d$  haben Umfang  $b = \pi d$

$\Gamma$   $b = \int_C ds = \int_C \frac{ds}{d\alpha} d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha(\alpha)} d\alpha = \int_0^{2\pi} (p(\alpha) + \frac{d^2 p(\alpha)}{d\alpha^2}) d\alpha$   
 $= \int_0^{\pi} p(\alpha) d\alpha + \int_{\pi}^{2\pi} p(\alpha) d\alpha + \frac{dp}{d\alpha} \Big|_0^{2\pi} = \int_0^{\pi} (p(\alpha) + p(\alpha + \pi)) d\alpha = d\pi$



$p = -(\vec{x} \cdot \vec{r}_i)$   
 $\frac{dp}{d\alpha} = (\vec{x} \cdot \vec{r}_i)$   
 $\frac{d^2 p}{d\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} - p$

Affinitäten:

Bild d. Einh. falls EU als Basis genommen werden:

$$\frac{x_1^2}{\lambda^2} + \frac{x_2^2}{\lambda^2} = 1 \quad x_1^2 + x_2^2 = \lambda^2 \quad \text{Verzerrung}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\frac{\cos^2 u}{\lambda^2} + \frac{\sin^2 u}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Verzerrung in Richtung  $u$  kann so bestimmt werden



Zulässige Parametrisierungen

$\varphi: B_u \rightarrow B_v$   $C^\infty$  bijektiv  $\frac{du^i}{du^j} \neq 0$  zulässige Parametrisierung

"glatte Fläche" Immersion einer zweidim Mannigfaltigkeit in  $E^3$

Immersion von  $M$  in  $N$ :  $\varphi: M \rightarrow N$   $C^\infty$   
 $\varphi_*: TM \rightarrow TN$  injektiv, d.h. maximalen Rang

Einkbettung von  $M$  in  $N$ :  $\varphi$  ist injektiv

Parametrisierung, die zulässige Parametrisierung in spezielles Parameternetz transformiert:

Satz  $x(u^1, u^2)$  zulässig parametrisiert.  
 $h_{ij} du^i du^j = 0$  mit  $\det h_{ij} > 0$   
 $\exists$  zulässige Parametrisierung mit Parameterlinien, die Lösung von  $h_{ij} du^i du^j = 0$  sind

$$\Gamma \quad h_{ij} du^i du^j = (h_{11} du^1 + h_{12} du^2)(h_{12} du^1 + h_{22} du^2) = 0 \quad \text{Linearisierbarkeit der Nullg.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u^1} \frac{\partial F}{\partial u^2} = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = h_{11} h_{22} - h_{12}^2$$

$$\frac{\partial G}{\partial u^1} \frac{\partial G}{\partial u^2} = \begin{vmatrix} h & h \\ h & h_{22} \end{vmatrix} = 2 h_{12} h_{22} + 2 h_{12} h > 0 \quad h^2 - 2 h_{12} h + h_{12} h_{22} = 0$$

Längen, Flächen, Winkel auf  $M$

$M$  Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Tensorfeld  $g_{ij}$

$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$   $dx^i \in TM$  Länge schneiden kurz  $\langle dx^i, dx^j \rangle$

$\cos \omega = \frac{g_{ij} dx^i dx^j}{(g_{ij} dx^i dx^i)^{1/2} (g_{ij} dy^i dy^i)^{1/2}}$  Winkel

$dA = \sqrt{|g|} dx^1 dx^2$  Fläche

(altfärrliche Auffassung:  $U \rightarrow M$   
 nur als Einkbettung verstanden:  $(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2)$   
 $d\vec{x} = \vec{x}_1 du^1 + \vec{x}_2 du^2$   
 $ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 du^1 du^1 + \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_2 du^2 du^2 + 2 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 du^1 du^2$   
 $= g_{ij} du^i du^j$ )

Abbildungen  $M \rightarrow N$

$M \xrightarrow{\omega} N$  zu  $\omega$  gehörig Schmiegungsaffinität  $TM \xrightarrow{\omega_*} TN$

$\lambda^2(\omega) := \frac{ds^2_N}{ds^2_M} = \frac{g_{ij}'' \cos^2 \omega + 2g_{12}'' \cos \omega \sin \omega + g_{22}'' \sin^2 \omega}{g_{11}' \cos^2 \omega + 2g_{12}' \cos \omega \sin \omega + g_{22}' \sin^2 \omega}$  Tissotische Indikatoren

isometrische Abb.  $g_{ik}' = g_{ik}''$

isometrische Abb  $\Leftrightarrow$  Tissotische Indikatoren sind Einheitskreis [  $\Rightarrow$  hier sehr bestimmte  $\omega$  wert  $d\omega$  ]

Torsen: Regelflächen mit jedem Tangentialvektor längs Erzeugenden  
 Bsp Tangentflächen an Raumkurven

Fundamentalfonnen von Torsen:

$$\vec{x}(u^1, u^2) = \vec{\zeta}(u^1) + u^2 \vec{\zeta}'(u^1)$$

$$\vec{x}_1 = \vec{\zeta}'(u^1) + u^2 \vec{\zeta}''(u^1)$$

$$= \vec{r}_1 + u^2 \alpha \vec{r}_2$$

$$\vec{x}_2 = \vec{r}_2$$

Tangentenfläche lassen sich in Ebene  $a+b$  entwickeln

$$ds^2 = (1 + (\alpha u^2)^2) du^1 du^1 + 2 du^1 du^2 + du^2 du^2$$

Konforme Abb:  $\cos \alpha' = \cos \alpha''$

**Abb. Konform  $\Leftrightarrow$  Tissot'sche Indikatriz ist Kreis**

$\Rightarrow g'_{ik} du^i dv^k = 0 \Leftrightarrow g''_{ik} du^i dv^k = 0$

$g'_{11} \cos^2 \alpha + g'_{22} \sin^2 \alpha + 2g'_{12} \cos \alpha \sin \alpha = g''_{11} \cos^2 \alpha + g''_{22} \sin^2 \alpha + 2g''_{12} \cos \alpha \sin \alpha = 0$   
 $g'_{11} \cos^2 \alpha + g'_{22} \sin^2 \alpha + 2g'_{12} \cos \alpha \sin \alpha = 0$   
 $g''_{11} \cos^2 \alpha + g''_{22} \sin^2 \alpha + 2g''_{12} \cos \alpha \sin \alpha = 0$   
 $\dots g''_{ik} = \lambda^2 g'_{ik}$

$\Leftarrow$  Setze in  $\lambda(u, v)$ ,  $\lambda(\frac{\pi}{2})$ ,  $\lambda(\frac{\pi}{4})$  ein.

Flächentreu  
Abb:

$dO' = dO'' \Leftrightarrow g' = g''$

**Abb. Flächentreu  $\Leftrightarrow$  relative Halbbachsen bei der Tissot'schen Indikatriz**

$T (g''_{11} - \lambda^2 g'_{11}) \cos^2 \alpha + 2 (g''_{12} - \lambda^2 g'_{12}) \cos \alpha \sin \alpha + (g''_{22} - \lambda^2 g'_{22}) \sin^2 \alpha = 0$

Hauptverzerrungen: nur eine Lösung für  $\alpha$

$\cos^2 \alpha \neq 0 \Rightarrow (g''_{11} - \lambda^2 g'_{11}) + 2 (g''_{12} - \lambda^2 g'_{12}) \cdot \tan \alpha + (g''_{22} - \lambda^2 g'_{22}) \tan^2 \alpha = 0$   
 quadr. Gl. für  $\tan \alpha$  hat genau eine Lösung, falls Diskriminante verschwindet.

$\cos^2 \alpha = 0 \Rightarrow g''_{22} - \lambda^2 g'_{22} = 0$  und  $g''_{12} - \lambda^2 g'_{12} = 0$

notwendig für Lösung:  $\lambda^4 (g'_{11} g'_{22} - g'^2_{12}) - \lambda^2 (g''_{11} g'_{22} - 2g''_{12} g'_{12}) + (g''_{11} g''_{22} - g''^2_{12}) = 0$   
 $\lambda^4 - \lambda^2 \frac{(g''_{11} g'_{22} - 2g''_{12} g'_{12})}{g'} + 1 = 0 \quad \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = 1$

$\vec{x}(u, v) = \vec{y}(u) + v^2 \vec{r}(u)$

$\vec{x}_1 = \vec{y}'_u(u) + v^2 \vec{r}'_u =: \vec{y}^2(u) + v^2 \vec{r}^2$   
 $\vec{y}_2 = \vec{r}(u) =: \vec{r}(u)$

- Ableit. nach  $u_1$

$\vec{n} = \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 = \vec{y}^2 \wedge \vec{r} + v^2 \vec{r}^2 \wedge \vec{r}$

**Regelfläche Torse  $\Leftrightarrow \det(\vec{y}^2, \vec{r}^2, \vec{r}) = 0$**

$\Gamma$  Torse  $\Leftrightarrow \vec{r}^2 \wedge \vec{r} \parallel \vec{y}^2 \wedge \vec{r}$   
 $\Leftrightarrow (\vec{r}^2 \wedge \vec{r}) \wedge (\vec{y}^2 \wedge \vec{r}) = \vec{r}^2 \wedge (\vec{y}^2 \wedge \vec{r}) \wedge \vec{r} = \det(\vec{y}^2, \vec{r}^2, \vec{r}) \cdot \vec{r} = 0$

**Klassifizierung der Torsen: Tangentflächen, Kegelflächen, Zylinderflächen**

(d.h. alle einseitigen Flächen)

[...]

Striktionslinie:

$\sigma = \frac{[\vec{y}^2, \vec{r}^2, \vec{r}]}{|\vec{r}^2| \cdot |\vec{r}^2 \wedge \vec{r}|}$

Striktion

$= 0 \Leftrightarrow$  Torse

$\Rightarrow$  benachbarte Erzeugnisse schneiden sich

$$\kappa_n = \frac{L_{ij} du^i du^j}{g_{ik} du^i du^k} \quad \text{Normalkrümmung}$$

$$(L_{ij} - \kappa_n g_{ij}) du^i du^j = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2$  sind die Eigenwerte d. Paars von quadratischen Formen:

$$\det(L - \lambda g) = \det g \cdot \det(g^{-1}L - \lambda I)$$

d.h.  $\lambda_1, \lambda_2$  EW von  $g^{-1}L$  und  $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\det L}{\det g} = \kappa$  Gauss'sche Krümmung  
 $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = H$  Mittlere Krümmung

Richtung mit  $\kappa_n = 0$   
Richtungsumkehr  
jede Richt. / Symptricht  
Extremwerte d. Normalkrümmung

Symploidenrichtung  
Nabelpunkt  
Flachpunkt  
Hauptkrümmungen  $\lambda_1, \lambda_2$

$$(L_{ij} - \lambda_n g_{ij}) du^i du^j = 0$$

$$(g^{ij} L_{jk} - \lambda_n \delta_k^i) du^i du^k = 0$$

$$(L_k^i - \lambda_n \delta_k^i) du^i du^k = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2$  EW der Matrix  $L_k^i$

$$\lambda_n = \frac{L_k^i du^i du^k}{d_k^i du^i du^k} = \frac{L_k^i du^i du^k}{du^i du^i} = \frac{L_k^i du^i du^k}{2}$$

( $\lambda_n$  ist maximal, falls Bilinearform  $L_k^i du^i du^k$  maximal ist, und dies ist für Eigenwerte von  $L_k^i$  der Fall.)

Differentialgleichn. d. Krümmungslinien:

$$(L_{ij} - \lambda_i g_{ij}) du^i du^j = 0 \quad \lambda_i \text{ maximal}$$

$$u^i u^k := du^i du^k$$

$$\det(L_{ij} - \lambda_i g_{ij}) = 0$$
  
$$\det(L_j^i - \lambda_i \delta_j^i) = 0$$

$du^i du^j = 0$  Parameterkurve

wollen zeigen: die Krümmungslinien erfüllen die Beding.

$$\begin{vmatrix} u^{11} & u^{22} & u^{33} \\ g^{11} & g^{22} & g^{33} \\ L_{11} & L_{22} & L_{33} \end{vmatrix} = 0$$

d.h.  $u, g, L$  sind linear abhängig als Vektoren betrachtet

$$\text{haben: } (\vec{L} - \lambda_i \vec{g}) \cdot \vec{u} = 0$$

also:  $\vec{u}_1 \perp (\vec{L} - \lambda_1 \vec{g})$   
oder  $\vec{u}_2 \perp (\vec{L} - \lambda_2 \vec{g})$   
 $\vec{u}_1 \perp (\vec{L} - \lambda_1 \vec{g}) \quad \lambda + \lambda_1 \lambda_2$

d.h.  $\vec{L}, \vec{g}, \vec{u}$  koplanar



quadr. Gleich für Hauptkrümmungen

$$\lambda^2 - g^{ik} L_{ik} \lambda + \frac{L}{g} = 0$$

$$\lambda = \frac{g^{ik} L_{ik} \pm \sqrt{(g^{ik} L_{ik})^2 - 4 \frac{L}{g}}}{2}$$

Differentialgleich für Krümmungslinien

$$\epsilon^{ijh} L_{jh} du^i du^k = 0$$

Die Eulerischen Formeln d. Flächeninhalte

$$\lambda_n(u) = \lambda_1 \cos^2 \epsilon + \lambda_2 \sin^2 \epsilon$$

$$\lambda_1(\xi^1)^2 + \lambda_2(\xi^2)^2 = \pm 1 \quad \text{Dupin'sche Indikatritz}$$

Klassifizierung d. Krümmungslinien

Regelfläche gebildet aus Flächennormalen längs Kurve c ist Poise  $\Leftrightarrow c$  ist Krümmungslinie

Dupin

Schnittkurve von zwei Flächen eines 3-fachen Orthogonal-systems ist Krümmungslinie auf beiden Flächen

Erfüllung des von Darboux

jede Fläche des kleinsten  $r_1, r_2$  lässt sich in 3-fach. Orthog. Syst. einbetten

Asymptotenriem:  $L_{ij} du^i du^k = 0$

da  $x_i = (\vec{x}^i, n)$  gilt für Geraden, dass sie Asympt. Linien sind

Schmiegeparabelnkurven:  $\subset$  Asymptotenkurve mit  $\mathcal{R}(c) = 0$   
 $\rightarrow$  Schmiegeparabeln = Tangentenkurven

Regelflächen hat niemals elliptische Punkte!

Ableitungsgl. n. der Flächenstübe

$$\begin{aligned} \vec{n}_j &= -L_j^i \vec{x}_i \\ \vec{x}_{ij} &= \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} \vec{n} \end{aligned}$$

Ketten definiert:  $L_{jk} = (\vec{x}_{jk} \cdot \vec{n}) = -(\vec{x}_j \cdot \vec{n}_k)$   
 $\Gamma_{ijk} = (\vec{x}_{ij} \cdot \vec{n}_k)$

$\Gamma$   $\left( \frac{d\vec{n}_i}{dx^j}, \vec{x}_k \right) = -(\vec{n}_i, \vec{x}_{jk}) = -L_{jk}$

"  $\left( L_j^i \vec{x}_i, \vec{x}_k \right) = -g_{in} L_j^i = -L_{jk}$  also  $\frac{d\vec{n}_i}{dx^j} = -L_j^i \vec{x}_i$

$(\vec{x}_{ij}, \vec{x}_k) = \Gamma_{ijk} = g_{ek} \Gamma_{ij}^e = x_e x_k \Gamma_{ij}^e = (\Gamma_{ij}^e x_e \cdot x_k) \Rightarrow \vec{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^e \vec{x}_e$   
 $(\vec{x}_{ij}, \vec{n}) = L_{ij}$

statisch:  $(\vec{n}_i, x_k) = -L_{ik} = -g_{ie} L_k^e$   
 $\Rightarrow \vec{n}_i = -L_j^e \vec{x}_e$

$(\vec{x}_{ij}, \vec{x}_k) = \Gamma_{ijk} = g_{ke} \Gamma_{ij}^e$   $(\vec{x}_{ij}, \vec{n}) = L_{ij}$   
 $\Rightarrow \vec{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^e \vec{x}_e + L_{ij} \vec{n}$

Zusammenhang

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} \\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki} \\ -\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} &= -\Gamma_{ikj} - \Gamma_{jki} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right)$$

kann auch unrichtig durch die Metrik eingeführt werden:  
 definiert durch Trafoverhalten

Transformationsverhalten:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{ii} &= \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} \vec{n} \\ \vec{x}_{ij} &= \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} \vec{n} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \bar{u}^k} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^i}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \bar{u}^k} \frac{\partial \bar{u}^e}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \bar{u}^k} \frac{\partial^2 \bar{u}^k}{\partial u^i \partial u^j}$$

$$= \bar{\Gamma}_{ek}^s \bar{x}_s \frac{\partial \bar{u}^e}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \bar{u}^k} \frac{\partial^2 \bar{u}^k}{\partial u^i \partial u^j} + L_{ek} \vec{n} \frac{\partial \bar{u}^e}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j}$$

$$= \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} \vec{n}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{ij}^s \frac{\partial \vec{x}}{\partial \bar{u}^e} \frac{\partial \bar{u}^e}{\partial u^i} = \left( \bar{\Gamma}_{ek}^s \frac{\partial \bar{u}^e}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 \bar{u}^s}{\partial u^i \partial u^j} \right) \frac{\partial \vec{x}}{\partial \bar{u}^s}$$

$$\left( \Gamma_{ij}^s \frac{\partial \bar{u}^e}{\partial u^s} \right) \frac{\partial \vec{x}}{\partial \bar{u}^e} = \left( \bar{\Gamma}_{sk}^e \frac{\partial \bar{u}^e}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 \bar{u}^e}{\partial u^i \partial u^j} \right) \frac{\partial \vec{x}}{\partial \bar{u}^e}$$

$$\Rightarrow \left[ \Gamma_{ij}^s \frac{\partial \bar{u}^e}{\partial u^s} = \bar{\Gamma}_{sk}^e \frac{\partial \bar{u}^e}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 \bar{u}^e}{\partial u^i \partial u^j} \right]$$

$$\left[ \Gamma_{pq}^r = \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^s} \left( \bar{\Gamma}_{p'q'}^s \frac{\partial \bar{u}^{p'}}{\partial u^p} \frac{\partial \bar{u}^{q'}}{\partial u^q} + \frac{\partial^2 \bar{u}^s}{\partial u^p \partial u^q} \right) \right]$$

$$\left[ \Gamma_{pqr} = \Gamma_{p'q'r'} \frac{\partial \bar{u}^{p'}}{\partial u^p} \frac{\partial \bar{u}^{q'}}{\partial u^q} + \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^{s'}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{s'}}{\partial u^p \partial u^q} g_{r s'} \right]$$

Ableitungsregeln von Gauss und Weingarten

$$\frac{d\vec{n}}{du^i} = -L_j^i \vec{x}_j$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{du^i du^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} \vec{n}$$

$\vec{n} =: \vec{x}_3$  ← Connection

$$\frac{d\vec{x}_i}{du^j} = F_{ij}^k \vec{x}_k$$

wobei  $F_{3j}^k = -L_j^k$

$$F_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k \quad \begin{matrix} k=1,2 \\ i=1,2 \end{matrix}$$

$$F_{ij}^3 = L_{ij}$$

$i, k = 1, \dots, 3$   
 $j = 1, 2$

Gleichungen von Mainardi und Codazzi

$$R^k{}_{ihj} = L_{ij} L_h^k - L_{ih} L_j^k$$

$$\Gamma_{ij}^k L_{hk} + \frac{dL_{ij}}{du^h} \text{ symmetrisch in } j \text{ und } h$$

$$R^k{}_{ihj} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^h} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^k}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^p \Gamma_{hp}^k - \Gamma_{ih}^p \Gamma_{jp}^k$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^h} + \Gamma_{ij}^p \Gamma_{hp}^k - (h, j)$$

Riemannscher Krümmungstensor

Γ geprüfte Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{d}{du^h} \left( \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} \right) = \frac{d}{du^i} \left( \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^j \partial u^h} \right)$$

$$\frac{d}{du^h} \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \right) = \frac{d}{du^i} \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^h} \right)$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^h} \vec{x}_k + \Gamma_{ij}^k (\Gamma_{kh}^l \vec{x}_l + L_{kh} \vec{n}) + \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^h} \vec{n}$$

$$+ L_{ij} (-L_h^l \vec{x}_l)$$

$$= \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^h} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{hh}^l - L_{ij} L_h^l \right) \vec{x}_k$$

$$+ \left( \Gamma_{ij}^k L_{kh} + \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^h} \right) \vec{n}$$

Riemannsche Krümmungstensor

$$R^k{}_{ijk} = L_{ik} L_j^h - L_{ij} L_k^h$$

$$R_{hijk} = g_{mh} R^m{}_{ijk} = L_{ik} L_j^h - L_{ij} L_k^h$$

$R_{1212} = \det L$  symmetrische Endersymmetrie

$$\Rightarrow R_{hijk} = \epsilon_{hi} \epsilon_{jk} \frac{\Delta}{g} = \epsilon_{hi} \epsilon_{jk} \cdot k$$

Theorema egregia von Gauss

weitere Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{d}{du^k} \left( \frac{d\vec{n}}{du^i} \right) = \frac{d}{du^i} \left( \frac{d\vec{n}}{du^k} \right) \text{ ergibt}$$

$$\frac{d}{du^k} (-L_i^l \vec{x}_l) = -\frac{\partial L_i^l}{\partial u^k} \vec{x}_l - L_i^l (\Gamma_{kl}^m \vec{x}_m + L_{kl} \vec{n})$$

$$= \left( -\frac{\partial L_i^l}{\partial u^k} - L_i^m \Gamma_{km}^l \right) \vec{x}_l - L_i^l L_{kl} \vec{n}$$

ergibt nichts neues ) symmetrisch in i, k

Zu den Weingarten- und Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{d\vec{x}_i}{du^j} = F_{ij}^k \vec{x}_k$$

Integr. bed.  $\frac{d^2 \vec{x}_i}{du^j du^m} = \frac{d^2 \vec{x}_i}{du^m du^j}$

heisst:  $\frac{\partial F_{ij}^k}{\partial u^m} \vec{x}_k + F_{ij}^k \frac{d\vec{x}_k}{du^m}$

$$S_{ijm}^l := \left( \frac{\partial F_{ij}^l}{\partial u^m} + F_{ij}^k F_{km}^l \right) : \text{ ist symmetrisch in } j, k, m$$

$j, m = 1, 2$

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^m} + L_{ij} L_m^l + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{km}^l \text{ symmetrisch in } j, m$$

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^m} + \Gamma_{ij}^k L_{km} \text{ symmetrisch in } j, m$$

Flächen mit  
laute  
Nabelpunkten

$$L_{ij} = \lambda_n g_{ij}$$

umformen:  $\frac{d\vec{n}}{du^i} = -L_{ij}^i \vec{x}_i = -g^{ik} L_{ij} \vec{x}_k = -g^{ik} \lambda_n g_{ij} \vec{x}_k = -\lambda_n \vec{x}_i^j$

d.h.  $\frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\vec{n}}{du^i} \frac{du^i}{dt} = -\lambda_n \frac{d\vec{x}}{du^i} \frac{du^i}{dt} = -\lambda_n \frac{d\vec{x}}{dt}$

Gleichung von Rodrigues

jede Kurve ist  
also Krümmungslinie

(vgl. mit Rodrigues:

Krümmungslinie:

$$(L_{ij} - \lambda_n g_{ij}) \frac{du^i}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{n}}{dt} &= \frac{d\vec{n}}{du^i} \frac{du^i}{dt} = -L_{ij}^i \frac{d\vec{x}_i}{du^i} \frac{du^i}{dt} \\ &= -\lambda_n \frac{d\vec{x}}{dt} \vec{x}_i \\ &= -\lambda_n \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{d\vec{n}}{du^i} = -\lambda_n \vec{x}_i^j \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{n}}{du^i du^j} &= -\lambda_n \vec{x}_{ij} - \frac{d\lambda_n}{du^i} \vec{x}_i^j \\ \frac{d^2\vec{n}}{du^j du^i} &= -\lambda_n \vec{x}_{ji} - \frac{d\lambda_n}{du^j} \vec{x}_j^i \end{aligned}$$

$$\frac{d\lambda_n}{du^i} \vec{x}_i^j = \frac{d\lambda_n}{du^j} \vec{x}_j^i$$

$$\Rightarrow \frac{d\lambda_n}{du^i} = \frac{d\lambda_n}{du^j} = 0 \Rightarrow \lambda_n \text{ konstant}$$

1. Fall  $\lambda_n = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{n}}{du^i} = 0 \Rightarrow \vec{n} = \text{konstant}$  Ebene

2. Fall  $\lambda_n \neq 0 \Rightarrow \frac{d\vec{n}}{dt} + \lambda_n \frac{d\vec{x}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{n} + \lambda_n \vec{x} = \vec{a}$  konstant

Setze  $\lambda_n = \frac{1}{r}$  und  $\vec{m} = \frac{1}{r} \vec{a}$

$$\vec{n} = -\frac{1}{r} \vec{x} + r \cdot \vec{m}$$

$$1 = \frac{1}{r^2} (\vec{x} - r\vec{m}) \cdot (\vec{x} - r\vec{m})$$

$$\text{d.h. } (\vec{x} - r\vec{m})^2 = r^2 \text{ Kugel}$$

laute Nabelpunkte  
 $\Rightarrow$  Kugel oder Ebene

Flächen mit  
laute  
parabolische  
Punkten

parabol. Punkte :  $k=0$

$$\Rightarrow \det L = 0$$

1. Fall  $L_{ij} \equiv 0 \Rightarrow \frac{d\vec{n}}{du^i} = 0 \Rightarrow \vec{n} = \text{konstant}$  Ebene

2. Fall  $\det L = 0$   $L_{ij} \neq 0$

Differentialgleich. für Asymptotenlinien:  $L_{11} du^1 du^1 + 2L_{12} du^1 du^2 + L_{22} du^2 du^2 = 0$   
 $= (\sqrt{L_{11}} du^1 + \sqrt{L_{22}} du^2)^2 = 0$

d.h. haben nur eine Schar  
von Asymptotenlinien

neue Parameter mit  $d\vec{u}^2 = 0 \Rightarrow L_{11} = 0 \Rightarrow L_{12} = 0$

also  $\frac{d\vec{n}}{du^1} = 0$  --  $\vec{n}$  ist konstant (tang.) Asymptotenlinie

$$\vec{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} \vec{n}$$

$$\vec{x}_{11} = \Gamma_{11}^2 \frac{d\vec{x}}{du^1}$$

$$\vec{x} = \gamma \dot{\vec{x}}$$

$$\dot{\vec{x}} = \gamma$$

$$\frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{2} = 0 \Rightarrow \text{gerade}$$

Fläche mit laute parabolische  
Punkten ist Torse

nur Torsen lassen sich  
in Ebene abbilden

Sphärisches Bild einer Fläche

regulären Punkt falls  $\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^2}$  linear unabhängig

d.h.  $\det L'_{ij} = k \neq 0$

$\frac{\partial \vec{n}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^2} = k \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} = k \cdot \sqrt{g} \cdot \vec{n}$

$\Rightarrow \sqrt{|g|} k = \left[ \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^2}, \vec{n} \right]$

$dS = \left| \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^2} \right| du^1 du^2$

$= \sqrt{|g|} |k| \cdot du^1 du^2$

$= |k| dO$

$\sqrt{|g|} = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right|$

Oberflächenelement des sphärischen Bildes:

$ds' = k dO$  (mit Orientierung)

$\rightarrow \boxed{k = \frac{ds'}{dO}}$

$C_F := \iint_F k dO = \iint ds'$  "Kurvatur integral" des Flächenstücks

Kurvatur integral

3te Fundamentalsform:

$N_{ij} = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^j}$

es gilt:  $\boxed{k g_{ij} - 2H L_{ij} + N_{ij} = 0}$

$x_1 x_2 g_{ij} - (x_1 + x_2) L_{ij} + N_{ij} = 0$

$g_{ij} du^i du^j = d\vec{x} \cdot d\vec{x}$   
 $L_{ij} du^i du^j = d\vec{x} \cdot d\vec{n}$   
 $N_{ij} du^i du^j = d\vec{n} \cdot d\vec{n}$

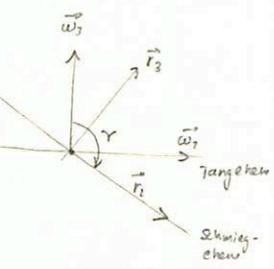
$(L_{ij} - x_i g_{jk}) du^i du^j = 0$

$(d\vec{x} - d\vec{n})^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} - 2d\vec{x} \cdot d\vec{n} + d\vec{n} \cdot d\vec{n}$   
 $= (g_{ij} - 2L_{ij} + N_{ij}) du^i du^j$

$(x_1 d\vec{x} - d\vec{n})(x_2 d\vec{x} - d\vec{n}) = (k g_{ij} - 2H L_{ij} + N_{ij}) du^i du^j$

da dies eine Bilinearform ist die für zwei linear unabh. Vektoren verschwindet

Normalkrümmung  
geodätische Krümmung  
geodätische Torsion



$c$  Kurve auf Fläche  
 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  Frenetdreiein  
 $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$  begleitendes Dreiein auf Fläche

$\vec{w}_1 = \vec{r}_1'$   
 $\vec{w}_2 = \vec{n}$   
 $\vec{w}_3 = \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2$

Betrachten Bewegung dieses Dreieins:

$\vec{w}'(s) = R \omega(s)$   
 $\vec{w}'(s) = \hat{P} R^T \omega(s) = A \omega(s)$

$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_g & \alpha_n \\ -\alpha_g & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_n & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_g & \alpha_n \\ -\alpha_g & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_n & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$

Frenetformel in anderer Basis

$\omega_1' = \vec{r}_1' = \alpha \vec{r}_2 = \alpha (\vec{r}_2 \cdot \vec{w}_3) \vec{w}_3 + \alpha (\vec{r}_2 \cdot \vec{w}_2) \vec{w}_2$   
 $= \alpha (\vec{r}_2 \cdot \vec{n}) \vec{w}_3 + \alpha (\vec{r}_2 \cdot (\vec{n} \wedge \vec{r}_1)) \vec{w}_2$

$\alpha_n$   
 $= \alpha \cdot \cos \gamma$   
normalenkrümmung

$\alpha_g$   
 $= \alpha \cdot \sin \gamma$   
geodätische Krümmung

$= \sqrt{\vec{x}'_1 \cdot \vec{x}'_1, \vec{n}} = \frac{|\vec{x}'_1 \cdot \vec{x}'_1, \vec{n}|}{|\vec{x}'_1|^3}$

$\omega_2' = (\vec{n} \wedge \vec{r}_1)' = -\alpha_g \cdot \vec{r}_1 + \alpha_n \vec{n}$   
 $= (\vec{n}' \wedge \vec{r}_1)$

$\alpha_g = [\vec{n}, \vec{n}', \vec{r}_1] = [\vec{n}, \vec{n}'] = \frac{d\alpha}{ds}$

Drehgeschwindigkeit von  $\vec{n}$  um  $\vec{r}_2$

geodätische Torsion

Berechnung der geodätischen Krümmung:

$\alpha_g = [\vec{x}', \vec{x}'', \vec{n}]$

$\vec{x}' = \vec{x}'_i \frac{du^i}{ds}$

$\vec{x}'' = \vec{x}''_{ij} \frac{du^i du^j}{ds^2} + \vec{x}'_i \frac{d^2 u^i}{ds^2}$

$= (\Gamma_{ij}^k \vec{x}'^k + L_{ij} \vec{n}) \frac{du^i du^j}{ds^2} + \vec{x}'_k \frac{d^2 u^k}{ds^2}$

$= (\Gamma_{ij}^k \frac{du^i du^j}{ds^2} + \frac{d^2 u^k}{ds^2}) \vec{x}'_k + L_{ij} \frac{du^i du^j}{ds^2} \vec{n}$

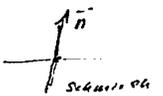
$\alpha_g = \sqrt{g} \left( \Gamma_{ij}^k \frac{du^i du^j}{ds^2} + \frac{d^2 u^k}{ds^2} - \Gamma_{ij}^k \frac{du^i du^j}{ds^2} + \frac{d^2 u^k}{ds^2} \right)$  nur von ...

Geodätische Linien

$\vec{x}' \perp \vec{c}$  Geodäten, falls  $\alpha_g(c) \equiv 0$

d.h.  $[\vec{x}', \vec{x}'', \vec{n}] = 0$

$\Rightarrow \vec{x}'' \parallel \vec{n} \Leftrightarrow$  Schmiegeebene geht durch Flächennormale



haben  $\vec{x}'' = \left( \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial s^2} \right) \vec{x}_k + L_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \vec{n}$

$\vec{x}' \perp \vec{n}$  heißt:  $\left[ \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial s^2} \right] = 0$   $u^k + \Gamma_{ij}^k u^i u^j$

In jeder Tangentenrichtung  $\exists!$  eine Geodäte

Difgl. System hat genau eine Lösung

und  $\frac{d}{ds} (g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{du^k}{ds} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + 2g_{ij} \frac{\partial^2 u^i}{\partial s^2} \frac{du^j}{ds}$   
 $= (\Gamma_{hij} + \Gamma_{nji} - 2g_{kh} \Gamma_{ij}^k) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \frac{du^h}{ds} = 0$

Geodäten als Lösungen von Felder!

$F := g_{ik} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds}$

$\frac{d}{ds} \frac{dF}{du^i} - \frac{\partial F}{\partial u^i} = 0$  heißt:  $\frac{d}{ds} 2g_{ik} \frac{du^k}{ds} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^i} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$

$2 \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^i} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} + 2g_{ik} \frac{\partial^2 u^k}{\partial s^2} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^i} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$

$2g_{ik} \frac{\partial^2 u^k}{\partial s^2} + (2 \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^i}) u^i = 2g_{ik} \frac{\partial^2 u^k}{\partial s^2} + 2 \cdot \frac{1}{2} (\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^i}) \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds}$

$g_{ik} \frac{d^2 u^k}{ds^2} = \Gamma_{jki} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds}$   $\frac{d^2 u^i}{ds^2} = g^{ij} \Gamma_{jki} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = \Gamma_{ik}^j \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds}$

als Lösung+ des Variationsproblems!

$s := \int \sqrt{F} ds = l$  Länge geodät.

Geodätischer Felder auf F

durch jeden Punkt geht genau eine Geodäte  
 lokal leicht konstruierbar: geodätisch Punkte

Integralformel von Gauss Bonnet

$\int_{\partial B} \alpha_g ds + \int_B k dO + \sum \alpha_i = 2\pi$



$\alpha_g, k$  spezifiziert für orthogonale Parameter messen und Stokes!

Fläche homöomorph Kugel:  $\int k dO = 4\pi$   
 Torus:  $\int k dO = 0$   
 p-flächige Fläche:  $\int k dO = 4\pi - p \cdot 4\pi = 4\pi(1-p)$

$\int_F k dO = \int_F ds - \int_F \left( \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^2} \right) du^1 du^2$

$\alpha_g = \vec{e}_1' \cdot \vec{n} \wedge \vec{e}_2' \quad (\vec{x}', \vec{x}'', \vec{n})$

(wollen irgendwas  $\alpha_g ds = v_1 du^1 + v_2 du^2 + d\alpha$   
 $k dO = \left( \frac{\partial v_1}{\partial u^1} - \frac{\partial v_2}{\partial u^2} \right) du^1 du^2 = \left( \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^2} \right) du^1 du^2$ )

Zusammenhang mit Eulerscher Charakteristik

$\int_F k dO = 2\pi \chi_F$

$\chi_F = e - k + f$  von Polygonnetz auf Fläche geschlossen

$\int k dO + \sum \alpha_i = 2\pi$   
 $\int k dO + \sum \pi - \omega_i = 2\pi$  für einzelnes Polygon  
 $\int k dO + \frac{2k\pi}{\text{Winkel}} - \frac{2\pi e}{\sum \omega_i} = 2\pi f$

Geodätische Polygon

$\int k dO = 2\pi$  Nullstelle  
 $\int k dO + (\pi - \omega) = 2\pi$  1 Ecke  $\int k dO = \pi + \omega$   
 $\int k dO = 2\pi + \omega_2$  2 Ecken  
 $\int k dO = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \pi = \sum$  Exzesse

Zum Riemannsche Krümmungstensor

$$\begin{aligned} \nabla_k T^i &= \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i T^j \\ \nabla_l \nabla_k T^i &= \frac{\partial}{\partial x^l} \left( \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i T^j \right) + \Gamma_{me}^i \left( \frac{\partial T^m}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^m T^j \right) - \Gamma_{ke}^m \left( \frac{\partial T^i}{\partial x^m} + \Gamma_{jm}^i T^j \right) \\ &= \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^l \partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{jk}^i T^j + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^l} T^j + \Gamma_{me}^i \frac{\partial T^m}{\partial x^k} + \Gamma_{me}^i \Gamma_{jk}^m T^j \\ &\quad - \Gamma_{ke}^m \frac{\partial T^i}{\partial x^m} - \Gamma_{ke}^m \Gamma_{jm}^i T^j \\ (\nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l) T^i &= \left( \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{jk}^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{jl}^i + \Gamma_{me}^i \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{mk}^i \Gamma_{je}^m \right) T^j \\ &= \underline{R_{jke}^i T^j} \end{aligned}$$

Ricci tensor

$R_{ge} := R^i_{gie}$   
 $R := g^{eg} R_{ge}$       Skalare Krümmung      bestimmt im 2dim Fall den Krümmungstensor

$$\begin{aligned} R^i_{jke} &= \frac{\partial}{\partial x^e} \Gamma_{jk}^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{je}^i + \Gamma_{me}^i \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{mk}^i \Gamma_{je}^m \\ R^i_{jie} &= \frac{\partial}{\partial x^e} \Gamma_{ji}^i - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{je}^i + \Gamma_{me}^i \Gamma_{ji}^m - \Gamma_{mi}^i \Gamma_{je}^m - R_{je} \end{aligned}$$

Einsteingleich für Gravitationsfeld:

$S_m = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{g} d^4x$       Wirkung d. Teilchen und Felder  
 $S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{g} d^4x$       Wirkung d. Gravitationsfelder      Hilbertwirkung

$\frac{\delta S_g}{\delta g_{ij}} = (R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}) \sqrt{|g|}$

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{g} &= \sqrt{g} g^{ik} \delta g_{ik} = \sqrt{g} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ie}^e - \frac{\partial}{\partial x^e} \Gamma_{ik}^e + \Gamma_{mi}^e \Gamma_{ek}^m - \Gamma_{me}^e \Gamma_{ik}^m \right) g^{ik} \\ \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ie}^e &= \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{g} g^{ik} \Gamma_{ie}^e - \Gamma_{ie}^e \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} g^{ik}) \\ \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^e} \Gamma_{ik}^e &= \frac{\partial}{\partial x^e} \sqrt{g} g^{ik} \Gamma_{ik}^e - \Gamma_{ik}^e \frac{\partial}{\partial x^e} (\sqrt{g} g^{ik}) \end{aligned}$$

Terme verschwinden bei Variation in geeigneter Kugel

haben also

$$\begin{aligned} \delta \int R \sqrt{g} d^4x &= \delta \int G \sqrt{g} d^4x \quad \text{wobei } G = \Gamma_{ik}^e \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} g^{ik}) - \Gamma_{ie}^e \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{g} g^{ik} \\ &\quad + (\Gamma_{mi}^e \Gamma_{ek}^m - \Gamma_{me}^e \Gamma_{ik}^m) g^{ik} \\ &\quad \dots \quad G - g^{ik} (\Gamma_{ie}^m \Gamma_{mk}^e - \Gamma_{ik}^e \Gamma_{em}^m) \end{aligned}$$

$$\left( R_{ik} - \frac{1}{2} R \delta_{ik} - \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \right) \rightarrow R_{ik} = 0 \text{ falls } T_{ik} = 0$$

denn  $R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha}^{\alpha}$

Klassische Mechanik

QFT  
 $c \rightarrow \infty$   
 $\hbar \rightarrow 0$

$X = \mathbb{R}^{6n}$  Phasenraum  
 $B(q,p)$  klassische Observable  
 $(q,p) \in \Omega, \Omega \subset X$  konfig. raum  
 $\Omega$  konfig. raum  
 $P$  Momentenraum

$H(q,p) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q)$  Hamiltonpunkt,  $\dot{\gamma} = (q,p)$   
 $\dot{q}_i = \nabla_{p_i} H = \frac{p_i}{m_i}$   $\dot{p}_i = -\nabla_{q_i} H = -\nabla_{q_i} V = F_i(q)$   $\dot{\gamma} = J \nabla H(\gamma)$   
 $q(t_0) = q_0$   $p(t_0) = p_0$   $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B_t(q,p) = B(q(t), p(t))$  allgem. Observable  
 $B_0(q,p) = B(q,t)$   
 $\frac{dB_t}{dt} = D_H B_t(q,p)$   $D_H = \sum_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{m_i} \nabla_{q_i} + F_i(q) \nabla_{p_i} \right)$   
 $B_t(q,p) = e^{(t-t_0) D_H} B_0(q,p)$   
 $d\mu = \prod_{i=1}^n dp_i dq_i$  Liouville Mass:  $D_H$  s.o.  $e^{D_H}$  unitär in  $L_2(X, d\mu)$

$\{B, C\} = \sum_{i=1}^n (\nabla_{q_i} B \cdot \nabla_{p_i} C - \nabla_{p_i} B \cdot \nabla_{q_i} C)$  Poisson Klammer  
 $\{H, B\} = -D_H B = (\nabla B, J \nabla C)$   
 nutzen also  $\frac{dB_t}{dt} = -\{H, B_t\}$   
 $B_t = e^{(t-t_0) D_H} B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \{H, \{H, \dots \{H, B\} \dots\}\}$  form. Lösung

Quantenmechanik

Postulate

P1 Keine Zustände  $\psi \in B_0(X)$  Projektionsoperat. allg. Zustand: Dichteged.  $\rho$   
 Observable s.o. Operatoren auf  $\mathcal{H}$   $\|B\| = \sup_{\psi \in \mathcal{H}} \langle \psi, B\psi \rangle$   
 mit Erwartung  $E_\rho(B) = \langle \rho, B \rangle$   $Z \in \mathbb{R}, 0$

P2  $H$  infinit. generator von  $\{U(t) = e^{-itH/\hbar}\}$  unit. Gruppe d. Zeittransf.  
 P  $\{q, p\}$  infinit. generator von  $\{e^{\frac{i}{\hbar} x \cdot p}\}$  unit. Gruppe d. Raumtransf.  
 J infinit. generator von unit. Gruppe d. Raumrotationen

$U(t)$  determiniert die Dynamik

Schrödinger Bild  $\psi(t) = e^{-itH/\hbar} \psi$   
 $i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = H \psi(t)$

Heisenberg Bild  $B(t) = e^{itH/\hbar} B e^{-itH/\hbar} = U(t)^\dagger B U(t)$   
 $\hbar \frac{dB(t)}{dt} = [H, B(t)]$  mit kommut.  $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it/\hbar)^n}{n!} [H, [H, \dots [H, B] \dots]]$

$E_\rho(t) = E_\rho(B(t))$

Lemma: jede symmetrie auf  $\mathcal{H}$  kann durch einen unitären oder antiunitären Operator implementiert werden

$X = L_2(Q)$   $Q = \mathbb{R}^{3n}$  konfig. raum  
 Schrödingerdarstellung für  $n$  Teilchensystem  $p_i = \frac{\hbar}{i} \nabla_{q_i}$  ist infinit. Erzeug. d. Verschieb.  
 $[q_i, q_j] = 0 = [p_i, p_j]$   $[p_i, q_j] = \frac{\hbar}{i} \nabla_{q_j} q_i - q_i \frac{\hbar}{i} \nabla_{q_j} = -i\hbar \delta_{ij} I$  vertauschbar.  
 $[p_i, q_j] \psi = \frac{\hbar}{i} \psi + \frac{\hbar}{i} q_j \nabla_{q_j} \psi - q_j \frac{\hbar}{i} \nabla_{q_j} \psi = -i\hbar \delta_{ij} \psi$

Lemma  $A, B$  symmetr.  $\langle A\psi, B\psi \rangle = \langle B\psi, A\psi \rangle$   $\|A\psi\| = \|A^\dagger \psi\|$   
 $\|A\psi\| \|B\psi\| \geq \frac{\hbar}{4\pi}$   $\langle AB, BA \rangle = \frac{\hbar}{2i} \langle \psi, \psi \rangle$   
 $\langle Au, Bu \rangle = \frac{\hbar}{2i} \langle u, u \rangle$   
 $\langle Bu, Au \rangle = \frac{\hbar}{2i} \langle u, u \rangle$   
 $2i \langle Au, Bu \rangle - \langle Bu, Au \rangle = \frac{\hbar}{2i} \langle u, u \rangle = \frac{\hbar}{2i} \|u\|^2$   
 $1 = \frac{4\pi}{\hbar} = \frac{4\pi}{\hbar} \text{Im} \langle Au, Bu \rangle \leq \frac{4\pi}{\hbar} |\langle Au, Bu \rangle| \leq \frac{4\pi}{\hbar} \|Au\| \|Bu\|$

$D_{\text{op}}(A) = E_0(A - dJ)^2$  Dispersion  
 $D_{\text{cl}}(A) = \|(A - dJ)\psi\|^2$   
 $D_{\text{op}}(A) = 0 \iff d$  EW von  $A$   
 $D_{\text{cl}}(A) := E_0(A - E_0(A)J)^2$  Varianz von  $A$  im Zustand  $\psi$

Heisenberg-  
 s.o.  
 Unschärfe-  
 Relation

$D_{\text{cl}}(A) \cdot D_{\text{cl}}(B) \geq \frac{\hbar^2}{4\pi^2}$   
 $\langle A, B \rangle = \frac{\hbar}{2i}$

folgt direkt aus  
 Lemma  $A^\dagger = A - dE$   
 $B^\dagger = B - \beta E$

Schrödinger  
 Operatoren

$A = D_n + q(x)$

Der einfache harmonische Oszillator

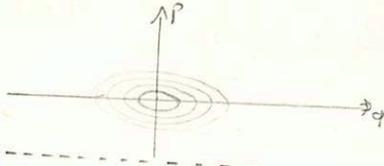
Klassisch:  $H_{osc} = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k q^2$   $\dot{q} = \frac{p}{m}$   $\dot{p} = -kq$   $\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$

EW:  $\pm \sqrt{\frac{k}{m}} = i\omega_1, \omega_2$

$q(t) = c \cdot \sin \frac{\omega_1 t}{i} + d \cdot \sin \frac{\omega_2 t}{i}$   
 $p(t) = c \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \frac{\omega_1 t}{i} + d \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \frac{\omega_2 t}{i}$

$q(t) = c_1 \sin \omega t$   $\dot{q} = c_1 \omega \cos \omega t$   $\dot{q} = c_1 \omega \cos \omega t$   $\dot{q} = c_1 \omega \cos \omega t$   
 $p(t) = c_2 \cos \omega t$   $\dot{p} = -c_2 \omega \sin \omega t$   $\dot{p} = -c_2 \omega \sin \omega t$

$\frac{1}{m} c_2 = c_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{m}{k}}$   
 $-k \cdot c_1 = -c_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{m}{k}}$



$\mu := \sqrt{\frac{k}{m}}$

$Q := \left(\frac{m\mu}{\hbar}\right)^{1/2} q$   $P := \left(\frac{m\mu}{\hbar}\right)^{-1/2} p$   $H := -(h\mu)^{-1} H_{osc}$  Koordinatentransfo

$H = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2)$   
 $[P, Q] = \hbar^{-1} [p, q] = -i$   $P = -i \frac{d}{dy}$   $Q = y$   
 $D(H) = \mathcal{L}$  Schwartzraum

Hosc wesentlich s.g. mit Spektrum  $\hbar\mu(n + \frac{1}{2})$ .  
 Resolvente von Hosc ist kompakt

wesentlich s.g.:  $A^* = A^* x$   
 linearer Begriff

$A^* := \frac{1}{\sqrt{2}} (Q - iP)$  Erzeugungoperator  
 $A := \frac{1}{\sqrt{2}} (Q + iP)$  Vernichtungoperator

$[A, A^*] = i[P, Q] = I$   
 $H = A^* A + \frac{1}{2}$   
 $[H, A] = A^* A A - A (A^* A + \frac{1}{2}) = -A$   
 $[H, A^*] = A^* A A^* + \frac{1}{2} A^* - (A^* A + \frac{1}{2}) A^* = A^*$

$[A, A^*] = I$   
 $H = A^* A + \frac{1}{2}$   
 $[H, A] = -A$   
 $[H, A^*] = A^*$

Ein Vektor  $\rho_0$  mit  $A\rho_0 = 0$   
 ist auch EW zu  $H$ :  $H\rho_0 = \frac{1}{2}\rho_0$   
 $A\rho_0 = 0$  :  $\frac{d\rho_0}{dy} = -\gamma\rho_0$   $\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\gamma^2}{2} y^2}$  Gaussfunktion

$\rho_0$  EW von  $H \Rightarrow A^{*n}\rho_0$  EW von  $H$   
 $H A^{*n}\rho_0 = (\frac{1}{2} + n) A^{*n}\rho_0$   $[H, A^*] A^{*n}\rho_0 = A^* H A^{*n}\rho_0 + [H, A^*] A^{*n}\rho_0$   
 $= (n + \frac{1}{2}) A^{*n}\rho_0 + A^{*n}\rho_0$

Die Eigenvektoren  $\{A^{*n}\rho_0\}$  bilden  
 eine kollid. Menge in  $\mathbb{R}^2$

Bohrsches Korrespondenzprinzip

Klassische Mechanik

$\frac{dF}{dt} = \{H, F\}$   
 $\{H, F\} = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial p}$   
 Speziell  
 $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$   $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$

Quantenmechanik

$\frac{dF}{dt} = \{H, F\}$   
 $\{H, F\} = \frac{i}{\hbar} [H, F]$   
 $\dot{p} = \{H, p\}$   $\dot{q} = \{H, q\}$

A Operator für eine Observable

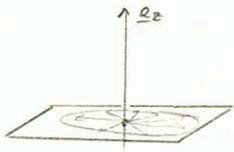
$\dot{A} = \{A, H\}$   
 $\dot{A} := \dot{A} = \int \frac{d}{dt} \langle 4 | A | 4 \rangle dq + \int \langle 4 | \frac{\partial A}{\partial t} | 4 \rangle dq + \int \langle 4 | A | \frac{d}{dt} | 4 \rangle dq$   
 $= -\int \frac{1}{i\hbar} \langle 4 | H^* A | 4 \rangle dq + \int \langle 4 | \frac{\partial A}{\partial t} | 4 \rangle dq + \int \langle 4 | A H | 4 \rangle dq$

$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [H, A]$   $\leftarrow$  vgl. klass. Mechan.  $\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{H, A\}$  Die Observable  $\dot{A}$   $\leftarrow$   $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}$   
 $= \frac{\partial A}{\partial t} + \{H, A\}$

Schrödinger bild:  $\frac{dA}{dt} = [i\hbar, A]$  Zeitentwicklung des operators A als Observable

Ziel: komplette quantenmechan. Beschreib. der 1-Photonenzustände

monochromatische ebene Welle



$$\underline{E}(r,t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^0 \cos(kz - \omega t + \alpha_x) \\ E_y^0 \cos(kz - \omega t + \alpha_y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega = 2\pi \nu$$

$$\underline{B}(r,t) = \underline{e}_z \wedge \underline{E}(r,t)$$

komplex:  $\underline{E} = R_0 \underline{\epsilon} e^{ikz} \quad \epsilon_{nt} = E_n^0 e^{i(kz - \omega t)}$

$\underline{\epsilon}$  beschreibt Polarisationszustand

- x Polarisiert:  $E_y = 0$
- y Polarisiert:  $E_x = 0$
- linkszirkularpolar:  $E_y = +i E_x$
- rechtszirkularpolar:  $E_y = -i E_x$

$\underline{E}, \underline{B}$  Lösungen d. Maxwellgleich  $\nabla \cdot \underline{E} = \nabla \cdot \underline{B} = \nabla \wedge \underline{B} - \nabla \wedge \underline{E} = \underline{j} = \nabla \wedge \underline{E} + \underline{\dot{D}} = 0$   
 $\Rightarrow$  Die Menge d. Polarisationszustände bilden einen 2 dim komplexen VR

Basis

$$\begin{aligned} E_x &= e_x e^{i(kz - \omega t)} & \text{ow} & \quad E_y = e_y e^{i(kz - \omega t)} \\ E_y &= e_y e^{i(kz - \omega t)} & \text{ow} & \quad E_x = e_x e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned}$$

$$\underline{\epsilon} = E_x \underline{e}_x + E_y \underline{e}_y = \underline{\epsilon}_+ \underline{e}_+ + \underline{\epsilon}_- \underline{e}_-$$

Die Energie  $H$  der Welle beträgt  $\frac{1}{8\pi} \int d^3r (\underline{E}^2 + \underline{B}^2) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \sum_{i,j,x,y} (\text{Re } \epsilon_i e^{ikz})^2 = \frac{V}{8\pi} (|E_x|^2 + |E_y|^2) = \frac{V}{8\pi} |\underline{\epsilon}|^2$

Der Drehimpuls  $J$  der Welle beträgt  $\frac{1}{4\pi c} \int d^3r r \wedge (\underline{E}(r,t) \wedge \underline{B}(r,t)) = (0, 0, \frac{V}{8\pi \omega} (|E_x|^2 - |E_y|^2))$

$$\frac{J_z}{H} = \frac{1}{\omega} \frac{|E_x|^2 - |E_y|^2}{|E_x|^2 + |E_y|^2} = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{bei + Polarisiert.} \\ -\frac{1}{\omega} & \text{bei - Polarisiert.} \end{cases}$$

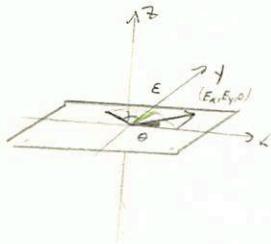
$$H = h\omega \rightarrow J_z = \pm \hbar \quad \text{je nachdem ob + oder - polarisiert}$$

glasmechanische ebene Welle

$$\underline{E}(t) = R_0 \underline{\epsilon}(t) \quad \underline{\epsilon}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) e^{i(k_x(t) - \omega t)} \\ a_y(t) e^{i(k_y(t) - \omega t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

schwach veränderliche  $a_i$ , d.h. mittlere Frequenz  $\omega \gg 0$

Kompensationsplättchen: y Komponente erhält Retardation  $\epsilon$  gegen x Komponente  
 Parallel: lässt nur elektrische Vektorkomponente  $\underline{E}(t, \theta, \epsilon) = E_x \cos \theta + E_y e^{i\epsilon} \sin \theta$   
 in der  $\theta$  Richtung relativ zur x-Achse



Die zeitlich gemittelte Intensität  $J(\theta, \epsilon)$  beträgt

$$J(\theta, \epsilon) = \overline{E(t, \theta, \epsilon) \cdot E^*(t, \theta, \epsilon)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T E(t, \theta, \epsilon) E^*(t, \theta, \epsilon) dt \\ = J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta + (J_{xy} e^{-i\epsilon} + J_{yx} e^{i\epsilon}) \sin \theta \cos \theta$$

$$J = \begin{pmatrix} \overline{E_x E_x^*} & \overline{E_x E_y^*} \\ \overline{E_y E_x^*} & \overline{E_y E_y^*} \end{pmatrix} \quad \text{Kohärenzmatrix der Lichtwelle}$$

$\text{Sp } J = J$  mittlere Intensität des Lichtes

$J$  ist positiv, hermitisch  $\overline{E_i E_j} = \overline{E_j E_i}$

Licht polarisiert:  $\text{Det } J = 0$

$J_1 = J_2$  unpolarisiert

Darstellung mit Paulimatrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \frac{J}{2} (\underline{1} + \underline{\xi} \cdot \underline{\sigma}) \quad \underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad \text{Stokesche Parameter}$$

$$= \frac{J}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix} \quad \text{polarisiert: } |\underline{\xi}|^2 = 1 \quad \lambda^2 = 2\lambda + |\underline{\xi}|^2 = 0$$

$$\text{unpolarisiert: } \underline{\xi} = 0 \quad \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{1 - |\underline{\xi}|^2}$$

Kohärenzmatrix kann gemessen werden, durch Änderung d. Parameter  $\theta, \epsilon$

Energie des Lichtes d. Frequenz  $\omega$  ist geradzahlig. Vielfaches von  $\hbar \omega$ .  
 klassische Elektrodynamik liefert Wahrscheinlichkeiten für Transmission von Lichtquanten:

$\underline{\epsilon}$  komplexe Amplitude einer monochromatischen Lichtwelle

$$\omega_x(\underline{\epsilon}) = \frac{|E_x|^2}{|\underline{\epsilon}|^2} \quad \text{Wahrscheinlichkeit, dass Photon im Polarisationszustand } \underline{\epsilon} \text{ einen x Polarisator durchläuft.}$$

$$J^{-1}(\cos \theta, \sin \theta) J(\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{Wahrscheinlichkeit, dass eine teilweise polarisierte Welle mit Kohärenzmatrix } J \text{ einen } \theta \text{ Polarisator durchläuft}$$

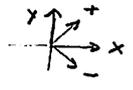


Anwend. auf linear polaris. Photonen

Photonen d. Frequenz  $\omega$  mit Ausbreit. in z-Richtung  
 Den linear polarisierten Zuständen, die klassisch durch Vektoren  $E_x, E_y$  beschrieben werden, sind orthogon. Vektoren  $|x\rangle, |y\rangle$  in  $\mathbb{C}^2$  zugeordnet  $|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{E} = E_x \underline{e}_x + E_y \underline{e}_y$  wird zugeordnet  $|\psi\rangle = \psi_x |x\rangle + \psi_y |y\rangle \quad \psi_x = \frac{E_x}{|E_x|} \quad \psi_y = \frac{E_y}{|E_y|}$   
 $|\psi\rangle$  sind Repräsentanten von reinen Photonenzuständen  $P_\psi$

speziell:  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle + i|y\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$   
 $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle - i|y\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$



Jedem Polarisationsfilter, der  $\perp$  polarisierte Photonen durchlässt und die dazu orthogon. Komponente absorbiert, ist der Idem Projektor  $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$  zugeordnet

Wahrscheinlichkeit für Transmission eines  $\psi$  Photons durch  $\perp$  Filter:  $\omega_\psi(\psi) = |\langle\psi|\psi\rangle|^2 = \text{Sp } P_\psi P_\psi = |P_\psi \psi|^2$   
 $\omega_1, \dots, \omega_k$  Interferenzgeschalt. Filter:

$$|\langle\omega_1|\psi\rangle\langle\omega_2|\psi\rangle \dots \langle\omega_k|\psi\rangle|^2 = \|P_{\omega_1} \dots P_{\omega_k} \psi\|^2$$

Anwend. auf reinell polar. Licht

Bei Kohärenzmatrix  $J$  ist der Zustand  $P = \frac{1}{2} (1 + \sum \sigma_i)$  zugeordnet  
 der eindeutig durch Stokes'schen Parameter bestimmt ist.  $|\xi| = 1 \quad |\eta| = 1$ : rein polarisiert

Wahrscheinlichkeit für Transmission ...

$$\omega_\psi(\psi) = \text{Sp}(P_\psi P)$$

Spektraldarstellung:  $P = p_1 |4_1\rangle\langle 4_1| + p_2 |4_2\rangle\langle 4_2|$   
 Experimentelle Anordnung von Licht im Zustand  $P$

Einem  $\perp$ -Filter wird die Observable  $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$  zugeordnet, die  $S_z$  ist und EW  $\pm$  zu EV  $|D\rangle, |E\rangle$  zu EV  $|U\rangle$  hat und Messwert 0 für ein absorbiertes Photon, Messwert  $\pm$  für ein durchgelassenes Photon liefert. Ein Photon wird durch Messung abgebildet in  $P_\psi |4\rangle$  dem d. Zustand  $\frac{P_\psi |4\rangle}{|P_\psi |4\rangle}$  zugeordnet wird.

Energie  $H = \hbar\omega \hat{J} = \begin{pmatrix} \hbar\omega & 0 \\ 0 & \hbar\omega \end{pmatrix}$  als Observable. Jeder Photonenzustand ist Eigenzustand von  $H$  mit EW  $\hbar\omega$ .  
 Das Photon zum Zeitpunkt  $t$  wird beschrieben durch Zustand  $|\psi_t\rangle = e^{-iHt/\hbar} |4_0\rangle = e^{-i\omega t} |4_0\rangle$

$|4_t\rangle\langle 4_t| = |4_0\rangle\langle 4_0|$ : d.h. Polarisationszust. ändert sich nicht mit der Zeit

$|4_t\rangle$  ist die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung  $i\hbar \frac{d}{dt} |4_t\rangle = H |4_t\rangle$

Formal kann man einem Photon im Polarisationszust.  $|4\rangle = \psi_x |x\rangle + \psi_y |y\rangle$   
 $|\psi_x|^2 + |\psi_y|^2 = 1$

die Elektromagn. werte  $\underline{E} = \frac{\sqrt{80\hbar\omega}}{r} \begin{pmatrix} 4_x \\ 4_y \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}$  zuordnen

dann folgt  $H(\underline{E}) = \hbar\omega$ .

Drehimpuls

Rotation um z-Achse: Symmetrieoperation die monochrom. zwellen in sich überführt

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ unitär mit Spektralzerlegung } \cos\theta \pm i\sin\theta \sigma_z = e^{-i\theta\sigma_z}$$

$$\sigma_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle \quad \Gamma \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$J_z = \hbar\sigma_z \equiv$  Komponente d. Drehimpulses

$$J_z |\pm\rangle = \pm \hbar |\pm\rangle \quad \text{vgl. mit } \frac{L_z}{\hbar} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{allgemeine gilt: } J_z \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle + i|y\rangle) \right) = \hbar (|x\rangle\langle x| - |y\rangle\langle y|) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle + i|y\rangle) \right) = \hbar (|x\rangle\langle x| - |y\rangle\langle y|) \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle + i|y\rangle)$$

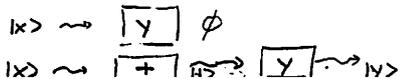
Beachtung! Beide Messung von  $J_z$  kommen EW  $\pm\hbar$  mit relat. Häufigk.  $|\langle\pm|4\rangle|^2 = p_\pm$  vor  
 daraus darf nicht geschlossen werden, dass das Photon mit d. wahrsch.  $p_\pm$  im Zust.  $|\pm\rangle$  ist!

$$P_x = |x\rangle\langle x| = \frac{1}{2} \{ |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| + |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| \}$$

$$\frac{1}{2} \{ |x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y| \} = \frac{1}{2} \{ |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| \}$$

Superpositionsgef. gilt für Wahrscheinlichkeitsamplituden und nicht für Wahrscheinlichkeiten!

Wahrschkeitsamplitude für Weg von  $\perp$  nach  $\perp$  über  $x$ :  $\langle 4|x\rangle\langle x|4\rangle$   
 Wahrschkeit für Weg von  $\perp$  nach  $\perp$  über  $x$ :  $|\langle 4|x\rangle\langle x|4\rangle|^2$



Wenn wir wissen, dass ein  $\mu$ -Photon einen  $\mu$ -Filter passiert hat, können wir nicht schliessen, ob er den Filter als  $x_1$  oder  $x_2$  Photon passiert hat

$$|e\rangle = \langle x_1 | e \rangle |x_1\rangle + \langle x_2 | e \rangle |x_2\rangle \quad \text{kohärente Superposition}$$

zeigen: Nach der Messung muss man mit der Mischung

$$|\langle x_1 | e \rangle|^2 |x_1\rangle + |\langle x_2 | e \rangle|^2 |x_2\rangle \quad \text{gemischter Zustand ohne Interferenzterme}$$

Durch die Messung wird nämlich der Anfangszustand  $|e\rangle = |+\rangle \langle +|e\rangle + |-\rangle \langle -|e\rangle$  in den Zustand  $|e'\rangle = |+\rangle \langle +|e\rangle e^{i\phi} + |-\rangle \langle -|e\rangle e^{-i\phi}$  mit der Transmissionswahrsch. durch  $\mu$ -Filter

$$|\langle e' | \mu \rangle|^2 = |\langle e_1 | \mu \rangle|^2 + |\langle e_2 | \mu \rangle|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle e_1 | \mu \rangle \langle e_2 | \mu \rangle e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

gibt also gleiche Transmissionswahrsch. wie wenn  $\mu$  gemischter Zustand vorliegen würde

wird durch wiederholte Messung herausgemittelt  
 $\int_0^{2\pi} e^{i\phi} d\phi = 0$  gemischter Zustand

Spin 1/2 Systeme

(Spin von Elementarteilchen ist kein Quantenmechan. Phänomen. Im Gegensatz zu Photonen gibt es zu Spin 1/2 Systemen keine klassische Feldtheorie.)

Fermionen: ganzzahlige Spin: Fermi Dirac Statistik  
 halbzahlig Spin: Bose-Einstein Statistik

Stark Gerlach Experimente

Ag Atome mit Leuchtelektron im S Zustand mit Eigen Drehimpuls  $S$  Spin mit magnetischem Moment  $M = \frac{e}{2mc} g S = \gamma S$   $\gamma$  negativ für Elektronen

klassisch:  $M$  in Magnetfeld  $B$  ergibt Drehmoment  $M \times B$  mit Bewegungsgleichung  $\dot{S} = M \times B = \gamma S \times B$   $B = (0, 0, B)$   
 $\Rightarrow S_z$  konstant mit Larmorfrequenz  $\omega = -\gamma B$

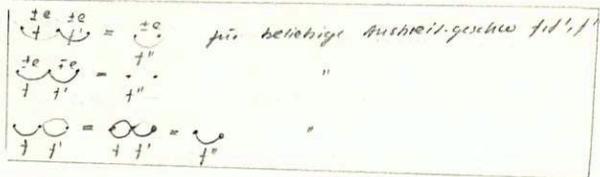
$$\begin{cases} \dot{S}_x = -\omega S_y \\ \dot{S}_y = \omega S_x \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} S_x(t) \\ S_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x(0) \\ S_y(0) \end{pmatrix}$$

Präzession von  $M$  u.  $S$  um  $B$  mit Frequenz  $\omega$

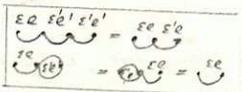
Potential Energie  $U = -M \cdot B$   
 Kraft  $F = -\nabla U \approx M_z \frac{dB_z}{dz} e_z$   
 Erwartet Quantenwert/werte von  $M_z$  Experimentell: zwei Werte von  $M_z$  und  $S_z$   $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$

Stark Gerlach Experimente:

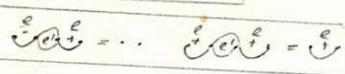
$$\pm e : |e^+\rangle \langle e^\pm|$$



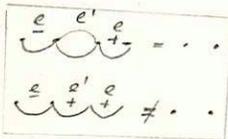
$$|e^+ e^+\rangle = \langle e^+ | e^+ \rangle |e^+ e^+\rangle + \langle e^- | e^+ \rangle |e^- e^+\rangle$$



vorgeschichte unwichtig



nur Messung zwingt kohärenten Zustand in gemischten Zustand zu gehen



$$|\langle e^- | e^+ \rangle|^2 = |\langle e^- | e^+ \rangle \langle e^- | e^+ \rangle + \langle e^- | e^+ \rangle \langle e^+ | e^+ \rangle|^2$$

$$|\langle e^- | e^+ \rangle|^2 |\langle e^+ | e^+ \rangle|^2 + |\langle e^- | e^+ \rangle|^2 |\langle e^- | e^+ \rangle|^2 \neq 0$$

Messung d. Übergangswahrsch.:  $|\langle e^+ | e^+ e^+ \rangle|^2$

Misst magn. Moment  $M_z$  d. Ag Atome in Zuständen  $|e^+ e^+ \rangle \langle e^+ e^+|$  findet man immer für  $e = \pm$  d. w.  $\mu = \frac{\hbar e}{2mc} g$

In d. Quantentheorie sind die Komponenten  $M_i$  d. magnetische Moments Observablen

$$\text{Experiment: } M_z |e^+ e^+ \rangle = \mu |e^+ e^+ \rangle$$

$$M_z |e^- e^- \rangle = -\mu |e^- e^- \rangle$$

also  $M_z$  in Basis  $|e^+ e^+ \rangle, |e^- e^- \rangle$  diagonal:  $M_z = \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{Symmetrie: } \langle e^+ e^+ | M_z | e^+ e^+ \rangle = \mu$$

$$\text{Experiment: } \langle e^+ e^+ | M_z | e^+ e^+ \rangle = \mu$$

in der Standardbasis gilt

$$|e_{\pm}\rangle \langle e_{\pm}| = P(\pm e) = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_x)$$

$$\langle e_{\pm} | S | e_{\pm} \rangle = \pm \frac{\hbar}{2} e \quad \Gamma \langle e_{\pm} | S | e_{\pm} \rangle = \frac{\hbar}{4} \text{Sp}(PS) = \frac{\hbar}{4} \text{Sp}(1 \pm \sigma_x) = \pm \frac{\hbar}{2} e$$

ein beliebige Zustand  $P = p_+ |e_+\rangle \langle e_+| + p_- |e_-\rangle \langle e_-|$   
 $p_+ + p_- = 1$

in diesem Zustand hat  $S$  den Erwartungswert  $\text{Sp}(PS) = \frac{\hbar}{4}(p_+ - p_-) e$   
 d.h. jedes Zustand ist durch Zufallsgenerator präparierbar?

und eine Mischung, so dass wir im Mittel Wert  $\frac{\hbar}{2}(p_+ - p_-)$  erhalten  
 $\Rightarrow$  Zustand ist dann  $P = p_+ |e_+\rangle \langle e_+| + p_- |e_-\rangle \langle e_-|$

Dynamik von Spin-1/2 Systemen in äusseren Magnetfeldern

äusseres Magnetfeld  $\underline{B} = (0, 0, B)$ , klassisch

$$\underline{f}(t) \text{ Lösung von } \dot{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \underline{f} \quad \underline{f}(0) = \frac{\hbar}{2} \underline{e} \cdot (0, 0, 1) = \langle 0, 0, 1 | S | 0, 0, 1 \rangle \quad \langle 0, 0, 1 | = \langle e_+ |$$

es gilt (!)  $\underline{f}(t) = \frac{\hbar}{2} \underline{e} \cdot (0, 0, \cos \omega t) = \langle 0, 0, \cos \omega t | S | 0, 0, \cos \omega t \rangle = \begin{pmatrix} f_x(t) \cos \omega t - f_y(t) \sin \omega t \\ f_x(t) \sin \omega t + f_y(t) \cos \omega t \\ f_z(t) \end{pmatrix}$

$| \psi_t \rangle = | 0, 0, \cos \omega t \rangle$  erfüllt Schrödingergleichung

$$| \psi_t \rangle = | 0, 0, \cos \omega t \rangle \quad 14_t \rangle = e^{-i(\frac{\omega t + \omega t}{2})} \cos \frac{\theta}{2} | e_+ \rangle + e^{i(\frac{\omega t + \omega t}{2})} \sin \frac{\theta}{2} | e_- \rangle$$

$$\text{Zust.vekt.} \quad = e^{-i\omega t} S_1 / \hbar | 4_t \rangle = e^{-iHt/\hbar} | 4_t \rangle \quad | 4_t \rangle = | 4_0 \rangle \quad H = \omega S_z = -\mu \cdot \underline{B}$$

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = U(t)^* \text{ unitär} \quad | 4_t \rangle = U(t) | 4_0 \rangle \quad \text{Schrödingerbild}$$

$$H^M(t) = U(t)^* H U(t) \text{ Heisenbergbild} \quad \langle 4_t | A | 4_t \rangle = \langle 4_0 | A^M(t) | 4_0 \rangle$$

$$S^H(t) = R(e_2, \omega t) S = U(t)^* S U(t)$$

$$\frac{d}{dt} S^H(t) \cdot \underline{n} = \frac{i}{\hbar} [H, S^H(t) \cdot \underline{n}] = \frac{1}{\hbar} \frac{e}{2mc} g U(t)^* [B S, S \cdot \underline{n}] U(t) = \frac{e g}{2mc} S^H(t) \cdot \underline{B} \wedge \underline{n}$$

$$= \frac{e g}{2mc} (S^H(t) \wedge \underline{B}) \cdot \underline{n}$$

$$\frac{H}{2mc} = \frac{g}{2mc} \frac{\hbar}{2} \sigma$$

letzt 2mc Bohrscher Magneton

$$\text{in Vektordarstellung} \quad A = 1 + \sigma \cdot \underline{a} \leftrightarrow \underline{a}$$

Vergleiche:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} S^H(t) = [H, S^H(t)]$$

$$\frac{d}{dt} S^H(t) = \gamma S^H(t) \wedge \underline{B} \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \underline{f}(t) = \gamma \underline{f}(t) \wedge \underline{B}$$

quantenmechanische Formulierung

klassische Formulierung

$$\underline{f}(t) = \langle 4_t | S | 4_t \rangle$$

Spezialfall d. Ehrenfest'schen Satzes

Dynamik in zeitabhängigen Magnetfeld

$$\frac{d}{dt} \underline{f}(t) = \gamma \underline{f}(t) \wedge \underline{B}(t) \quad \underline{f}(0) = \langle 4_0 | S | 4_0 \rangle$$

$| 4_0 \rangle$  ist Lösung d. Schrödingergleichung

$$\text{ist } \frac{d}{dt} | 4_t \rangle = H(t) | 4_t \rangle \quad H(t) = -\gamma S \cdot \underline{B}(t)$$

$$\text{so gilt: } \underline{f}(t) = \langle 4_t | S | 4_t \rangle = \langle 4_0 | S^H(t) | 4_0 \rangle$$

wobei  $S^H(t)$  Lösung d. Heisenberggleichung

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} S^H(t) = [H(t), S^H(t)] \text{ ist}$$

$$U(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t, s) \quad U_0(t, s) = 1$$

$$U_n(t, s) = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \dots \int_s^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) \dots H(t_n)$$

$$U(t, s)^* = U(s, t) \quad \text{da } U_n(t, s)^* = U_n(s, t)$$

$$U(t, s) U(s, r) = U(t, r) \quad \text{da } U_n(t, r) = \sum_{m=0}^n U_m(t, s) U_{n-m}(s, r)$$

$$S^H(t) = U(t, 0)^* S^H(0) U(t, 0)$$

ist Lösung d. Heisenberggleichung

gehen wie oben vor

$\Gamma U(t, t_0)$  Evolutionsoperator

$$| 4_{t_1} \rangle = U(t_1, t_0) | 4_{t_0} \rangle$$

$U(t, s)$  Lösung von

$$\text{ist } \frac{d}{dt} U(t, s) = H(t) U(t, s)$$

oder

$$U(t, s) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_s^t dt H(t) U(t, s)$$

Lösung durch Dysonreihe

$$\Gamma U_m(t, s) U_{n-m}(s, r) = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^{m+n} \int_s^t dt_1 \dots \int_s^{t_{m-1}} dt_m H(t_1) \dots H(t_m) \int_s^{t_m} dt_{m+1} \dots \int_s^{t_{n-1}} dt_n H(t_{m+1}) \dots H(t_n)$$

$P(e) = |e+\rangle\langle e+| = |e-\rangle\langle e-|$   
mit Matrixdarstellung

$P(e) = \frac{1}{2} (1 + \underline{e} \cdot \underline{\sigma})$

$|\langle e+|f+\rangle|^2 = \text{Sp}(P(e)P(f))$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$\text{Sp}(P(e)P(f)) = \text{Sp}\left(\frac{1}{4} (1 + \underline{e} \cdot \underline{\sigma})(1 + \underline{f} \cdot \underline{\sigma})\right) = \text{Sp}\left(\frac{1}{4} (1 + \underline{e} \cdot \underline{\sigma} + \underline{f} \cdot \underline{\sigma} + i(\underline{e} \times \underline{f}) \cdot \underline{\sigma})\right)$   
 $= \frac{1}{4} (1 + \underline{e} \cdot \underline{f}) = |\langle e+|f+\rangle|^2$

$\langle \underline{v} \cdot \underline{e} \cdot \underline{f} = \langle e+|M|f+\rangle$  (da  $\underline{v} \cdot \underline{e} = \langle e+|M|e+\rangle$ )  
 $= \sum_{\delta, \delta'} \langle e+|f+\rangle \langle f\delta|M|f\delta'\rangle \langle f\delta'|e+\rangle$   
 $= \mu \{ |\langle e+|f+\rangle|^2 - |\langle e+|f-\rangle|^2 \} = \mu \{ 2|\langle e+|f+\rangle|^2 - 1 \}$

Matrixdarstell. des Zustands  $P(e)$

Darstellung von  $Su(2)$  in  $SO(3)$

$R \in SO(3)$  Suchen dazugehörige Drehung  $R_P$  der Zustände von  $e$  für  $P(e)$

Es gilt  $\text{Sp}(P(e)P(f)) = \frac{1}{2} (1 + \underline{e} \cdot \underline{f}) = \frac{1}{2} (1 + R_P \underline{e} \cdot R_P \underline{f}) = \text{Sp}(R_P P(e) R_P^{-1} P(f))$   
 $R_P (R_P^{-1} P(e)) = R_P P(e)$  Darstellung ist ("Standarddarstellung")

konstruieren  $U(R) \in Su(2)$   $R_P(P(e)) = U(R)P(e)U(R)^*$   
wobei  $U(R_1)U(R_2) = U(R_1 R_2)$  nur auf Faktor  $\pm 1$  erfüllbar ist

$R \in SO(3)$   $R(\underline{e}, \theta)(\underline{m}) = (\underline{e} \cdot \underline{m}) \underline{e} + \sin \theta \underline{e} \times \underline{m} - \cos \theta \underline{e} \wedge (\underline{e} \times \underline{m})$   
mit  $\underline{e} \wedge \underline{m} = \underline{E}(\underline{e}) \underline{m}$  gilt  
 $R(\underline{e}, \theta)(\underline{m}) = e^{i \theta \underline{E}(\underline{e})} \underline{m} = e^{-i \underline{k} \cdot \underline{e} \theta} \underline{m}$

$k_x = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$   
 $k_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$   
 $k_z = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   
 $[k_x, k_y] = i k_z + \text{zahl}$

$U(\underline{e}, \theta) = e^{-i \underline{S} \cdot \underline{e} \theta / \hbar}$   $\underline{S} = \frac{\hbar}{2} \underline{\sigma}$   
 $R_P(P(e)) = U(R)P(e)U(R)^* \quad \forall \underline{e}$   
 $R_P(P(f)) = U(R)P(f)U(R)^* = P(R(\underline{e}, \theta) \underline{f})$

$[S_x, S_y] = i \hbar S_z$  (Dygl.)  
 $\Rightarrow [S \cdot \underline{m}, S \cdot \underline{n}] = i \hbar (S \cdot \underline{m} \wedge \underline{n})$  \* Liealgebra isomorphism  
aus  $R(\underline{e}, \theta)(\underline{m}) = e^{i \theta \underline{E}(\underline{e})} \underline{m}$  folgt  
 $\frac{d}{d\theta} R(\underline{e}, \theta)(\underline{m}) = R(\underline{e}, \theta)(\underline{e} \times \underline{m})$   
Für  $\underline{S}(\theta) = \underline{S} \cdot R(\underline{e}, \theta)$  gilt  
 $\frac{d}{d\theta} \underline{S}(\theta) \underline{m} = \underline{S}(\theta) \underline{e} \times \underline{m} = -(\underline{e} \wedge \underline{S}(\theta)) \cdot \underline{m}$   
also  $\frac{d}{d\theta} \underline{S}(\theta) = -\underline{e} \wedge \underline{S}(\theta)$   $\underline{S}(0) = \underline{S}$   
die gleiche Dgl. und gleicher Anfangswert hat  
 $\underline{T}(\theta) = U(\underline{e}, \theta) \underline{S} U(\underline{e}, \theta)^* \quad \underline{T}(0) = \underline{S}$   
 $\frac{d}{d\theta} \underline{T}(\theta) \underline{m} = U(\underline{e}, \theta) \frac{d}{d\theta} [S \cdot \underline{e}, S \cdot \underline{m}] U(\underline{e}, \theta)^* = -\underline{e} \wedge \underline{T}(\theta) \cdot \underline{m}$   
 $\Rightarrow \underline{S}(\theta) = \underline{T}(\theta)$  sind d. Dgl.

speziell gilt:  
 $R(\underline{e}, \theta) \underline{\sigma} = e^{-i \theta \underline{\sigma} \cdot \underline{e} / 2} \underline{\sigma} e^{i \theta \underline{\sigma} \cdot \underline{e} / 2} \neq$   
und damit  
 $R(\underline{e}, \theta) P(f) = U(\underline{e}, \theta) P(f) U(\underline{e}, \theta)^* = P(R(\underline{e}, \theta) \underline{f})$

$U(2) = \{ A = (a_0 \mathbb{1} + \underline{a} \cdot \underline{\sigma}) \mid \det A = a_0^2 - |\underline{a}|^2 \neq 0 \}$   
 $A^{-1} = (a_0 \mathbb{1} + \underline{a}^* \cdot \underline{\sigma}) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (a_0 \mathbb{1} - \underline{a} \cdot \underline{\sigma})$

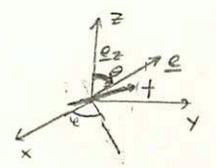
$Su(2) = \{ A = (a_0 \mathbb{1} + i \underline{a} \cdot \underline{\sigma}) \mid a_0^2 + |\underline{a}|^2 = 1 \} \cong 3$  sphären mit Darstellung in  $SO(3)$

Berechnung der  $R(\underline{e}, \theta)_{kj}$   
 $R_{ij} = \text{Sp}(\sigma_k U \sigma_j U^*) \cdot \frac{1}{2}$   
 $R_{ij} \delta_k = U \sigma_j U^* \neq$

$R_{11} \delta_1 + R_{22} \delta_2 + R_{33} \delta_3 = \text{Tr}$   
 $\Rightarrow R_{11} = \text{Sp} \sigma_1 \cdot \text{Tr}$   
 $R_{22} = \text{Sp} \sigma_2 \cdot \text{Tr}$   
 $R_{33} = \text{Sp} \sigma_3 \cdot \text{Tr}$

jeder Zustandsvektor  $|e\rangle$  lässt sich nun aus  $|e_2\rangle$  durch geeignete Rotation aus  $Su(2)$  erzeugen:

$\begin{pmatrix} |e_+\rangle \\ |e_-\rangle \end{pmatrix} = U(\underline{e}, \theta) \begin{pmatrix} |e_2+\rangle \\ |e_2-\rangle \end{pmatrix}$   
 $U(\underline{e}, \theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_2 & -i \sin \frac{\theta}{2} (\sigma_1 - i \sigma_3) \\ -i \sin \frac{\theta}{2} (\sigma_1 + i \sigma_3) & \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_2 \end{pmatrix}$



$\underline{S} \cdot \underline{e} = \frac{\hbar}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{e} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & \cos \theta \end{pmatrix} \underline{e} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \underline{e} = R(\underline{f}, \theta) \underline{e}_z$   
 $\underline{f} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$

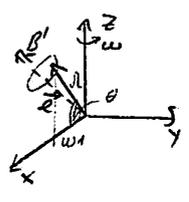
$U(\underline{f}, \theta) = e^{-i \underline{S} \cdot \underline{f} \theta / \hbar} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$  Phasenänderungswahl

nutzen also  $\begin{pmatrix} |e_+\rangle \\ |e_-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} & \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |e_2+\rangle \\ |e_2-\rangle \end{pmatrix}$

hier  $a_0 = e^{-i \underline{S} \cdot \underline{e} \theta / \hbar}$

Anwendung des Formalismus magnetische Resonanz: drehend. Magnetfeld

$B(t) = B_0 + B_1(t) = B_0 e_z + B_1 (\cos \omega t e_x + \sin \omega t e_y)$   
 Suchen für Evolutionsoperator geschlossenen Ausdruck



$\frac{\omega_1}{\Omega} = \cos \theta$

Klassisches Vorgehen:  $B_1(t) = R_2(\omega t) B_0$   $B_0 = B_1 e_x$  (gehen in rotierendes KS)  
 $B(t)$  wird zeitunabhängig  
 d.h.  $f(t) = R_2(\omega t) f'(t)$  mit

$$-\gamma B' = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_0 - \omega \end{pmatrix} = \Omega \underline{e}$$

$$\Omega = (\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega)^2)^{1/2}$$

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} \omega_1 / \Omega \\ 0 \\ (\omega_0 - \omega) / \Omega \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = -\gamma B_1$$

$$\omega_0 = -\gamma B_0$$

$$\frac{d}{dt} f'(t) = \gamma f'(t) \wedge B'$$

$$B' = R_0 + B_1 - \omega e_z$$

$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} R_2(\omega t) f'(t) = R_2(\omega t) \left\{ \frac{d}{dt} f'(t) + \omega e_z \wedge f'(t) \right\}$

$\frac{d}{dt} f(t) = R_2(\omega t) \gamma f'(t) \wedge (B_0 + B_1)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} f'(t) = \gamma f'(t) \wedge (B_0 + B_1) - \omega e_z \wedge f'(t)$

$B'$

Resonanzfall  $\omega_0 = \omega$   $\omega_0 = \gamma B_0$   
 $\Omega$  Präzessionsgeschwindigkeit  $\omega_1 = -\gamma B_1$   
 im Resonanzfall:  $\Omega = \omega_1$

quantenmechanischer Vorgehen:

Das Wechselwirkungsbild:  $H(t) = H_0 + H_1(t)$   $U_0(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}$   
 $A^{\omega(t)} = U_0(t)^\dagger A U_0(t)$   $\frac{dA^{\omega(t)}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_0, A^{\omega(t)}]$   
 $| \psi^{\omega(t)} \rangle = U_0(t_0) | \psi^S(t_0) \rangle$   
 $U_{\omega}(t, s) = U_0(t)^\dagger U(t, s) U_0(s)$   
 $i\hbar \frac{d}{dt} U_{\omega}(t, s) = H_{\omega}(t) U_{\omega}(t, s)$   
 $H_{\omega}(t) = U_0(t)^\dagger H_1(t) U_0(t)$

$U_{\omega}(t, s) = \mathcal{T} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_s^t H_{\omega}(t_1) dt_1 \right]$

$U(t, s) = U_0(t) U_{\omega}(t, s) U_0(s)^\dagger = U_0(t) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \dots \int_s^{t_{n-1}} dt_n U_0(t-t_1)^\dagger H_1(t_1) U_0(t-t_1) \dots U_0(t-t_n)^\dagger H_1(t_n) U_0(t-t_n) \right] U_0(s)^\dagger$

Störungsreihe

magn. Resonanz:  $H_0 = \omega S_z$   $H_1(t) = (\omega_0 - \omega) S_z - \gamma B_1(t) \cdot S$   
 $H_{\omega}(t) = (\omega_0 - \omega) S_z - \gamma B_1(t) \cdot R_2(\omega t) S$   
 $= (\omega_0 - \omega) S_z - \gamma B_1 S_x$   
 $= \Omega \cdot S \cdot e$

$U_{\omega}(t, s) = e^{-i\Omega(t-s)S \cdot e}$

$U(t, s) = e^{-\frac{i}{\hbar} \omega S_z t} e^{-i\Omega(t-s)S \cdot e} e^{\frac{i}{\hbar} \omega S_z s}$

$R_2(\omega t) B_1(t) \cdot S = R_2(\omega t) \cdot \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot S$

Rabi-Formel: Übergangswahrscheinlichkeit von  $| \psi(t) \rangle$  nach  $| e_z \rangle$   
 $| \psi(t) \rangle = | e_z \rangle$

$P(t) = | \langle e_z | \psi(t) \rangle |^2 = | \langle e_z | e^{-\frac{i}{\hbar} \omega S_z t} e^{-i\Omega(t-s)S \cdot e} e^{\frac{i}{\hbar} \omega S_z s} | e_z \rangle |^2$

$= | \langle e_z | 1 e^{-i\Omega(t-s)S \cdot e} | e_z \rangle |^2$

$= | \langle e_z | 1 e^{-i((\omega_0 - \omega) S_z - \omega S_x) t / \hbar} | e_z \rangle |^2$

$= \left( \sin \frac{\Omega t}{2} \frac{(\omega_0 - \omega)}{\Omega} - \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right)^2$

Anwendung d. Formalismus g. Faktor des  $\mu$ -Mesons

$\underline{H} = g \frac{e}{2mc} S$

Neutronenmagnetomeker

$H = g \frac{e}{2mc} S$   $i\hbar \frac{d}{dt} U(t, s) = H U(t, s)$   
 $H(t) = -\gamma S_z B(x(t))$   $B = (B_0, B_1(t))$   
 $[H(t_1), H(t_2)] = 0$   
 $U(t, s) = -\frac{i}{\hbar} \int_s^t dt H(t) = e^{\left( \frac{ig}{2mc} S_z \int dt B(x(t)) \right)}$



Mehrpuls und Kreisel

$[k_1, k_2] = ik_3$  zykl. Lie Algebra  $L$   
 - in/ mit Erzeugende d. Quantenwech. Operationen  
 - Rotationsimpulsoperatoren  $L = \underline{x} \wedge \underline{p}$  } bilden Darstellung der chiralen Liealgebra  
 $\Gamma [L_i, k_j] = [x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_1 - x_1 p_3] = \frac{\hbar}{i} [x_2 p_1 - x_1 p_2]$

Produktzustände

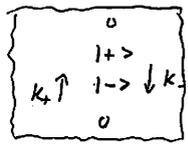
$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$  Zustandsraum zweier ununterscheidbarer Spind $\frac{1}{2}$  Systemen  
 $\langle j_1, j_2 | e^i e^j \rangle = \langle j_1, e^i \rangle \cdot \langle j_2, e^j \rangle$  Übergangswahrsch. ist Produkt d. Einzelwahrsch. d.h. wir haben statistische Unabhängigkeit im Zustand  $\rho(e^i, e^j) = \rho(e^i, e^j) \rho(e^i, e^j)$

(Im Singletzustand  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle)$  besteht statistische Korrelation zwischen den beiden Systemen (EPR Paradoxon  $\text{cov}(XY) = E[XY] - E[X]E[Y]$ )  
 Observable des Gesamtsystems erhält man durch Linearkombination von Produktobservablen  $A^1 \otimes A^2$   
 Bsp Spinnoperator  $S_x^1 |+-\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |+-\rangle$   $S_x^2 |+-\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |+-\rangle$   
 $S_x^1 |+-\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |+-\rangle$   $S_x^2 |+-\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |+-\rangle$   
 Gesamtspin  $S = S^1 + S^2$  erfüllt wieder  $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$

Darstellung von  $L$  durch Spind $\frac{1}{2}$  System  $D_{1/2}$   
 Darstellung von  $L$  durch (Spind $\frac{1}{2}$  System) $^2$   $D_{1/2} \otimes D_{1/2}$

$D_{1/2}$  ist irreduzibel für die Lie Algebra der  $SO(3)$   $\neq$  nichttriviale, irreduzible Teilraum unwillk. Polynomfunktionen  $3$  dim.  $\rightarrow$  irreduz. Darstellung  
 $D_{1/2} \otimes D_{1/2}$  ist reduzibel:  $S_z \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) = 0$  d.h.  $D_{1/2} \otimes D_{1/2} = D_0 \oplus D_1$  (d.h. irreduz. d.h.)

$D_{1/2} \otimes D_{1/2} = D_0 \oplus D_1$

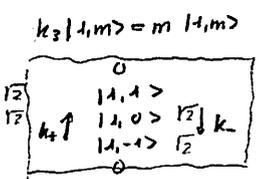


$\Gamma$   $k_{\pm}^i = k_1^i \pm ik_2^i$  Auf- und Absteigeoperatoren  
 $k_{\pm} = k_1^2 + k_2^2 = k_0 \pm ik_3$   $\Gamma k_{\pm}^2 + k_{\pm}^2 = k_1^2 + ik_2^2 + ik_1^2 + ik_2^2 = k_3 \pm ik_0$   
 $[k_1, k_-] = 2k_3$   $\Gamma [k_1, k_-] = [k_1, k_1 - ik_2] = 2k_3$   
 $[k_2, k_+] = \pm k_3$   $\Gamma [k_2, k_+] = k_3 (k_1 \pm ik_2) - (k_1 \pm ik_2) k_3 = ik_3 \mp ik_1 = \pm k_2$   
 $k_{\pm}^i | \pm \rangle^i = 0$   
 $k_{\pm}^i | \mp \rangle^i = | \pm \rangle^i$   $k_{\pm}$  haben Matrixdarstellungen wie Fockraum erzeugung u. Vernichtungsoperatoren.

$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$   
 $k^0 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$   
 $[k^2, k_e] = 0$   $\Gamma [k^2, k_1] = [k_1^2, k_1] + [k_2^2, k_1] = k_2 (-ik_2) - (ik_2) k_2 + k_3 (ik_1) + ik_3 k_1 = 0$

Singlet  $|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle)$   $H_0$   
 Triple  $\begin{cases} |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) \\ |1,+ \rangle = |+-\rangle \\ |1,- \rangle = |-+\rangle \end{cases}$   $H_1$

Daher vertauschen  $k^2, k_3, (k^1)^2 = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = \frac{3}{4} (k^1)^2 = \frac{3}{4} I$   
 ebenfalls  $k_3^2, k_3^2, (k^1)^2 = \frac{3}{4}$   $(k^1)^2 = \frac{3}{4} I$



$I$  hat simultane Eigenbasis  $\{ | \pm \pm \rangle \}$ , nicht Eigenbasis von  $I$  denn  $(k^1)^2$  vertauscht nicht mit  $k_3^2$   
 $\Gamma k^2 = (k^1)^2 + (k^1)^2 + 2 k^1 k^2 = \frac{3}{4} + 2 k^1 k^2 + k_3^2 k^2 + k_3^2 k^2$   
 $\rightarrow [k^2, k_3^2] = k_1^2 k^2 - k_2^2 k^2 \neq 0$

$k_3 |0,0\rangle = 0$   
 $(k^1)^2$  Spinoperator

$I$  hat gemeinsame Eigenbasis  $|+-\rangle, |-+\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle)$   
 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle)$

In der neuen Basis  $\{ k_3, k_1, k_- \}$  anstelle der Basis  $\{ k_1, k_2, k_3 \}$  sieht man, dass  $D_1$  irreduzibel ist auf  $H_1$ .

Projekt. auf  $H_0$  &  $H_1$

$P_0$  Projektion von  $\mathcal{H}$  auf  $H_0$   
 $P_1$  Projektion von  $\mathcal{H}$  auf  $H_1$   
 $P_0 = \frac{1}{4} - k^1 k^2$   
 $P_1 = \frac{3}{4} + k^1 k^2$

$\Gamma k^1 k^2 = \frac{1}{2} \{ (k^1 + k^2)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 \} = \frac{1}{2} (k^2)^2 - \frac{3}{4}$   
 $\Rightarrow k^1 k^2 |1,m\rangle = \frac{1}{2} |1,m\rangle$   
 $k^1 k^2 |0,0\rangle = -\frac{3}{4}$

Satz von Weyl

Für jedes  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  gibt es genau eine irreduzible Darstellung  $D_j$  von  $SU(2)$ . Jede Darstellung von  $SU(2)$  kann in eine direkte Summe dieser  $D_j$  zerlegt werden.

Zu jedem  $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  gibt es genau eine irreduzible Darstellung  $D_l$  der Drehimpulsalgebra  $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{K}_l \oplus \mathfrak{K}_m = i \sum_{n=1}^m \mathbb{R} e_n \otimes \mathfrak{K}_n$ . Diese hat Dimension  $2l+1$  und im Zustandsraum  $\mathcal{H}_l$  existiert eine Standardbasis  $\{ |l, m\rangle \mid m = -l, -l+1, \dots, +l \}$  mit

$$\begin{aligned} (L_j)^2 |l, m\rangle &= l(l+1) |l, m\rangle \\ K_3 |l, m\rangle &= m |l, m\rangle \\ K_+ |l, m\rangle &= (l+m+1)^{1/2} (l-m)^{1/2} |l, m+1\rangle \\ K_- |l, m\rangle &= (l-m+1)^{1/2} (l+m)^{1/2} |l, m-1\rangle \end{aligned}$$

Jede Darstellung der Drehimpulsalgebra zerfällt in eindeutig bestimmter Multiplizität in irreduzible Komponenten

$$D = \bigoplus_{l=0}^n \bigoplus_{m=-l}^l D_l \quad \mathcal{H} = \bigoplus_{l=0}^n \bigoplus_{m=-l}^l \mathcal{H}_l^n$$

Bem

$D_j \otimes D_k = D^{j+k} \oplus D^{j+k-1} \oplus \dots \oplus D^{|j-k|}$   
Clebsch-Gordan Koeffizienten

$\Gamma \quad k^2 \geq 0 \rightarrow$  Für zwei  $k^2$  hat man Form  $l(l+1) \quad l \geq 0$   
Da  $[k_1, k_2] = 0 \exists$  gemeinsame Eigenvektoren  $|l, m\rangle$   
mit  $k_3 |l, m\rangle = m |l, m\rangle \quad m \in \mathbb{R}$

$$k_1 k_2 = (k_1)^2 - k_2^2 + k_3 \quad k_2 = K_3 i k_1 \quad [k_1 k_2 - k_1 k_2] = i k_3$$

$$\|k_2\| \ll \|k_1\|^2 = 4 k_1 k_2 k_3 \geq 0 \rightarrow \text{für } |k_1\rangle = |l, m\rangle$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle l, m | k_1 k_2 | l, m \rangle &= \langle l, m | (k_1)^2 - k_2^2 + k_3 | l, m \rangle \\ 0 \leq \langle l, m | k_1 k_2 | l, m \rangle &= \langle l, m | (l+m+1) - m(l-m) | l, m \rangle \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} (l+\frac{1}{2})^2 &\geq (m+\frac{1}{2})^2 \Rightarrow -l \leq m \leq l \end{aligned} \right.$$

$$[k_1, k_2] = i k_3 \Rightarrow [k_1, k_2^n] = i n k_3^{n-1} \quad \Gamma [A, B^n] = AB^n - B^n A + n B^{n-1} [A, B] = [A, B^n] + n B^{n-1} [A, B]$$

$$k_1 k_2^n |l, m\rangle = (i n k_2^{n-1} + k_3^n k_1) |l, m\rangle = (m \pm n) k_3^n |l, m\rangle$$

$$k_2^n k_1 |l, m\rangle = l(l+1) k_3^n |l, m\rangle$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \|k_1 k_2^n |l, m\rangle\|^2 &= \langle l, m | k_1^n \{ k_2^2 - k_3^2 - k_3 \} k_1^n |l, m\rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [(l+\frac{1}{2})^2 - (m+n+\frac{1}{2})^2] \|k_3^n |l, m\rangle\|^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [(l+\frac{1}{2}) - (m+n+\frac{1}{2})]^2 \langle l, m | l, m \rangle \end{aligned} \quad \Rightarrow m = l - k \quad k \geq 0 \text{ gan}$$

analog:

$$0 \leq \|k_2 k_1^n |l, m\rangle\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [(l+\frac{1}{2})^2 - (m-n+\frac{1}{2})^2] \langle l, m | l, m \rangle$$

$$\begin{aligned} \Gamma m = l - k - s \quad k \geq 0 \text{ gan} \\ (l+\frac{1}{2})^2 < (l-k+s+\frac{1}{2})^2 \\ (l+\frac{1}{2})^2 > (l-k-s+\frac{1}{2})^2 \text{ oder } k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m = -l + k' \quad k' \text{ gan}$$

$$\text{zusammen: } l - k = -l + k' \text{ gan} \Rightarrow 2l = k'' \text{ gan}$$

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \quad m = -l, -l+1, \dots, l$$

$$\mathcal{H}_l = \langle |l, m\rangle \mid m = -l, \dots, l \rangle$$

$$\begin{aligned} k_3 k_2^n |l, m\rangle &= (m \pm n) k_3^n |l, m\rangle \\ (k_1)^n k_2 |l, m\rangle &= l(l+1) k_3^n |l, m\rangle \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &\{ k_3^n |l, m\rangle \mid n = 0, \dots, l-m \} \cup \\ &\{ k_3^n |l, m\rangle \mid n = 1, \dots, l+m \} \end{aligned} \right. \text{ ist Basis von } \mathcal{H}_l$$

nennen  $k_3^n |l, m\rangle = |l, m, n\rangle$   
 $k_3^n |l, m\rangle = |l, m, -n\rangle$

$$\|k_3 |l, m\rangle\|^2 = \frac{(l(l+1) - m^2 \pm m) \| |l, m\rangle \|^2}{(l+m+1)(l-m)}$$

$\mathcal{H}_l$  ist invariant unter  $k_3, k_1, k_2$ , also auch unter  $k_1 k_2, k_2 k_1$   
Darstellung  $D_l$  ist irreduzibel  $\Leftrightarrow [A, k_i] = 0 \Rightarrow A = \lambda \mathbb{1}$

$$[A, k_2] = 0 \Rightarrow 0 = \langle l, m | [A, k_2] | l, m \rangle = (m-m') \langle l, m | A | l, m' \rangle \rightarrow A \text{ diagonal mit EW } a_1, \dots, a_l$$

$$[A, k_1] = 0 \Rightarrow 0 = \langle l, m | [A, k_1] | l, m \rangle = (l+m+1)^{1/2} (l-m)^{1/2} (a_{m+1} - a_m) \Rightarrow A = a_0 \mathbb{1}$$

$k_i$  hat Wert  $l(l+1)$  Spalte der Darstellung  $D_l$

Restskalar von SO(3)

Teilchen mit ganzzahligem Spin : Bosonen  
 Teilchen mit halbzahligem Spin : Fermionen

Drehung / Rotation Laplace

$U(\underline{e}, \theta) = e^{-i\theta \cdot \underline{k} \cdot \underline{S}} = e^{-i\theta S \cos \theta / \hbar}$  sind  
 1) hermitisch, unitar mit  
 infinitesimal, sukzessiv.  $\underline{e} = \underline{S}$   
 [Wirkung] ]

$R(\underline{e}, \theta) \underline{S} = U(\underline{e}, \theta)^* \underline{S} U(\underline{e}, \theta)$   
 für  $\underline{e} = \underline{e}_z$  folgt  $U(\underline{e}, \pi) = (-1)^{2S}$  da  $e^{-i\pi S} |e, m\rangle = e^{-i\pi m} |e, m\rangle = e^{-i\pi 2S} |e, m\rangle = e^{-i\pi m} |e, m\rangle$

wegen  $R(\underline{e}, \theta) \underline{S} = U(\underline{e}, \theta)^* \underline{S} U(\underline{e}, \theta)$  gilt  $U(\underline{e}, \pi) = \pm 1 \forall e$

z.B. Darstellungen von SO(3) sind  $D_\ell$   $\ell = 0, 1, 2, \dots$

Der kugelfreie Kreis

Klassisch

$H = T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 J_i J_j \omega_i \omega_j$   $\underline{L} = \underline{J} \omega$  Drehimpuls  
 $\underline{I}$  Trägheitstensor

im körperfesten System:  
 $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i (\omega_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{(L_i)^2}{J_i}$

In der Quantenmechanik. Beschreib. vom Kreis  
 kommen nur Darstellungen  $D_\ell$  von  $\underline{L} \cdot \underline{L} = \hbar^2 \ell(\ell+1)$  vor mit ganzzahl.  $\ell$   
 wollen EW von  $H$  in invariantem Teilraum  $\mathcal{H}_\ell$  diskutieren

$H = \sum a_i k_i^2$   $\underline{k} \cdot \underline{k} = ik$   $a_i = \hbar^2 / 2J_i > 0$

Symmetrischer Kreis:  $a_1 = a_2 = 0$   $a_3 = \hbar^2$

$\{ |e, m\rangle \}$  Eigenbasis von  $H$   $H = \hbar^2 (k_1^2 + k_2^2) - k_3^2 \cdot \hbar^2$

$H |e, m\rangle = \hbar^2 [ \ell(\ell+1) - m^2 ] |e, m\rangle$

gleiche EW für  $|e, m\rangle$  und  $|e, -m\rangle$

$U = e^{-i\pi k_3}$   $U H U^{-1} = H$  ( $\dots$ )  $U$  hat gleiche EW wie  $H$

asymmetrischer Kreis:  $H$  ist hermitisch  $(2\ell+1) \times (2\ell+1)$  Matrix

$\langle e, m | H | e, m \rangle = \frac{a_1 + a_2}{2} \{ \ell(\ell+1) - m^2 \} + a_3 m^2$   
 $\langle e, m | H | e, m+2 \rangle = \frac{a_1 - a_2}{2} (e, m)^{1/2} (e, m-1)^{1/2} (e, m+1)^{1/2} (e, m+2)^{1/2} \hbar^2$

$\langle e, m | k_x | e, m-1 \rangle = \langle e, m | k_x + k_i | e, m \rangle$   $k_x = k_x + i k_y$   
 $= \frac{1}{2} (e, m)^{1/2} (e, m+1)^{1/2}$   $l. = k_x - i k_y$   $k_y = \frac{k_x + k_l}{2}$

$\rightarrow \langle e, m | k_x^2 | e, m \rangle = \langle e, m | k_x | e, m-1 \rangle \langle e, m-1 | k_x | e, m \rangle + \langle e, m | k_x | e, m+1 \rangle \langle e, m+1 | k_x | e, m \rangle$   
 $= \frac{1}{2} \{ \ell(\ell+1) - m^2 \} \hbar^2 = \langle e, m | k_x^2 | e, m \rangle$

$\langle e, m | k_y^2 | e, m \rangle = \frac{1}{4} (e, m+1)^{1/2} (e, m)^{1/2} (e, m+2)^{1/2} (e, m-1)^{1/2} = -\langle e, m | k_x^2 | e, m \rangle$

$\mathcal{X}^1 = \langle |e, m\rangle \quad m = \ell, \ell-2, \dots, -\ell \rangle$   $\mathcal{X}^2 = \mathcal{H}^{\ell+1}$   
 $\mathcal{H} \mathcal{X}^1 \subset \mathcal{X}^1 \quad \mathcal{H} \mathcal{X}^2 \subset \mathcal{X}^2 \quad U = e^{-i\pi k_3} \quad U^2 = 1 \quad U \mathcal{X}^1 \subset \mathcal{X}^1 \quad U \mathcal{X}^2 \subset \mathcal{X}^2$

$\mathcal{X}_\pm^1, \mathcal{X}_\pm^2$  Eigenräume von  $U$  mit EW  $\pm 1$

$\mathcal{X}_+ = \mathcal{X}_+^1 \oplus \mathcal{X}_+^2 \oplus \mathcal{X}_-^1 \oplus \mathcal{X}_-^2$   $\mathcal{X}_+ = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} |e, m\rangle + |e, -m\rangle =: |e, m+\rangle \rangle$   
 $\mathcal{X}_- = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} |e, m\rangle - |e, -m\rangle =: |e, m-\rangle \rangle$

In dieser Basis zerfällt  $H$  in 4 Blöcke  $H_+, H_+', H_-, H_-'$

2. Hilbertraum

Observation: so. Operat.  $A = \sum a_i |a_i\rangle\langle a_i|$

Zustände: Nichtnegativen  $P \geq 0$  s.d.  $\text{Sp}(P) = 1$   
 $P = \sum p_i |a_i\rangle\langle a_i|$   $\sum p_i = 1$   $p_i \geq 0$

keine Zustände:  $P_A = 14 > 1$

Erwartungswerte von A:  $\text{Sp}(AP) = \sum a_i \langle a_i | P | a_i \rangle = \langle A \rangle_P$

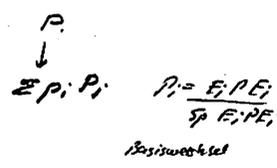
Wirkten von Zuständen:  $\sum \langle a_i | P | a_i \rangle = 1$  Entropieerwartung

Kohärente Superposition:  $4 \cdot 1/4 = 1$   $P_4, P_{1/4} \sim P_4$  Entropie bleibt

Zusammengesetzte Systeme:  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2$  mit Zuständen  $P_1 \otimes P_2$   
 $A_1 \otimes A_2$

Messwerte von A:  $A = \sum a_i |a_i\rangle\langle a_i|$   $\langle A \rangle_P = \sum a_i p_i$   $p_i = \text{Sp}(P E_i)$   
 $a_i$ : mögliche Messwerte  
 falls P Eigenzustand von A ist  $P = P E_i$   
 dann hat A in P den Wert  $a_i$   
 Ist P eine Mischung von Eigenzuständen  $|a_i\rangle$  von A zum Eigenwert  $a_i$ :  $P = \sum w_j |a_j\rangle\langle a_j|$   
 $\sum w_j = 1$  dann hat A in P den Wert  $a_j$  mit Wahrscheinlichkeit  $w_j$

A hat in P keine objektive Realität unabhängig von einem Messprozess, falls P nicht Mischung von Eigenzuständen ist. Durch Zusetzen Eingriff (Messung) zwingt man das System eine Eigenschaft anzunehmen, obwohl es eine Entropieerwartung hat.



Messprozess: Postulat: Für jedes A gibt es einen Messprozess

Bsp:  $|e\rangle\langle e| = P$  Spin  $\frac{1}{2}$  System  
 $A = S_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|)$   
 $|e\rangle\langle e| \xrightarrow{\text{Messung von A}} (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) = 1$   
 $|e\rangle\langle e| \xrightarrow{\text{Messung von A}} |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|$  Entropie sinkt

Dynamik

wird durch 2-parametrischer Familie von unitären Operatoren  $U(t,s)$  beschrieben wobei die infinitesimale Erzeugende  $H(t)$  der Hamiltonoperator ist

$$U(t,s)U(s,r) = U(t,r) \quad U(s,s) = I$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t,s) = H(t)U(t,s) \quad H(t)^\dagger = H(t)$$

autonome Systeme  $H(t)$  konstant  $U(t,s) = e^{-iH \frac{(t-s)}{\hbar}}$   
 $U(t,s)$  verwandelt einen Zustand  $|a_i\rangle$  auf reversible Weise in den Zustand  $U(t,s)|a_i\rangle$   
 Zustandseigenen operieren auf Schrödingergleichung  
 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a_i\rangle = H(t)|a_i\rangle$

Problematisch: Messprozess kann nicht innerhalb des Systems implementiert werden.

Von Neumann Interpretation:  $\mathcal{X}_S$  Zustandsraum des Systems  
 $\mathcal{X}_A$  Zustandsraum der Apparatur

$$|z\rangle^S \otimes |a_0\rangle^A \rightsquigarrow |z\rangle^S \otimes |a_z\rangle^A$$

$$|z\rangle^S \otimes |a_0\rangle^A \rightsquigarrow \sum |z\rangle^S \otimes |a_z\rangle^A \langle z|z\rangle$$

EPR Paradoxon

Motiv:  $|00\rangle$  mögliche Spinzustände des Neutron-Positron Paares  
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle)$   
 Messung  $S_z^e = -\hbar/2 \Rightarrow S_z^p = +\hbar/2$

Lösung:  $|00\rangle$  ist kein Produktzustand:  
 $\langle 00 | \langle e, e | 0, 0 \rangle = \langle e, e | \langle 0, 0 \rangle = 0$   
 $\langle e, e | 0, 0 \rangle = \langle e, e | 0, 0 \rangle = \frac{1}{2}$

partielle Spur: P allgem. Zustand eines Systems im  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^1 \otimes \mathcal{X}^2$   
 $A^2$  observable in  $\mathcal{X}^2$   
 $\text{Sp}(P A^2) = \text{Sp}_2(P^2 A^2)$   $P^2 = \text{Sp}_1(P)$

Messungen der Observablen des Spin  $\frac{1}{2}$  Systems 2 vor einer Messung am 1. System werden durch die Restriktion  $P^2 = \text{Sp}_1(|00\rangle\langle 00|)$  korrigiert  
 $= \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1|$  kein reiner Zustand in  $\mathcal{X}^2$

Messung von  $S_z^e$ :  
 $P = |00\rangle\langle 00|$  wird transformiert in  $\tilde{P} = \frac{1}{2} |e, -e\rangle\langle e, -e| + \frac{1}{2} |e, e\rangle\langle e, e|$   
 $\tilde{P}^2 = \text{Sp}_1 \tilde{P} = \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1|$   
 Messung von  $S_z^e$  ändert nichts an System 2

$H$  Hilbertraum  
 $P$  Zustand in  $H$  Nichtnegativ  
 $A$  Observable  $A = \sum \alpha_i E_i$  so. Operator  
 $P \xrightarrow{\text{Messung von } A} \sum p_i \frac{E_i A E_i}{\text{Sp}(E_i A E_i)}$   $\sum p_i = 1$   $p_i = \text{Sp}(P E_i)$   
Mischung von Eigenzuständen  
 Die Observable  $A$  nimmt den Wert  $\alpha_i$  mit Wahrscheinlichkeit  $p_i$  an.  $A$  hat in  $P$  keine objektive Realität, falls  $P$  nicht Mischung von Eigenzuständen von  $A$  ist.  
 $S(P) = \text{Sp}(A \ln P)$  Entropie des Zustands  $P$   $S(P) = \sum p_i \ln p_i$   
 $\text{Sp}(A \cdot P)$  Erwartungswert der Observablen  $A$   
 $= \langle \psi | A | \psi \rangle$  falls  $P = |\psi\rangle\langle\psi|$  keine Zustand ist

Spin System

Basisunabhängig  
 $H$ :  
 $P(\uparrow) = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = P_{\text{Ist}}$   
 $A = \frac{\hbar}{2} \sigma_z = \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$   
 $\text{Sp}(A \cdot P) = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$   
 $P \xrightarrow{\text{Messung von } A} \sum \frac{\text{Sp}(P E_i)}{p_i} E_i P E_i = \sum E_i P E_i$   
 $= \langle \uparrow | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \uparrow \rangle |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \langle \uparrow | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \downarrow \rangle |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$   
 $= \langle \uparrow | \uparrow \rangle |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \langle \uparrow | \downarrow \rangle |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$   
 $= \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$

in Standardbasis  
 $\mathbb{C}^2$   
 $= \frac{1}{2} (1 + \sigma_z)$   
 $= \frac{1}{2} (1 + \sigma_z) \cdot \frac{\hbar}{2}$   
 $= \frac{\hbar}{4} (1 + \sigma_z) \frac{1}{2} (1 + \sigma_z)$   
 $= \frac{\hbar}{4} (1 + \sigma_z)$   
 $= \text{Sp} \frac{1}{4} (1 + \sigma_z) (1 + \sigma_z) |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \text{Sp} \frac{1}{4} (1 - \sigma_z) (1 + \sigma_z) |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$   
 $= \frac{1}{2} (1 + \sigma_z) |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2} (1 - \sigma_z) |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$

Interpretation allgem. Zust.  $(\alpha, \beta)$   
 Raum der Spin 1/2 Systems. Zustandsraum ist  $SU(2)$   
 Zustand eines in  $z$  Richtung positiv spinnenden Teilchens  
 Observable  $A$  misst, ob Teilchen in  $z$  Richtung positiv spinnt  
 Erwartungswert der Spinmessung in  $z$ -Richtung  
 $P$  geht durch Messprozess in eine Mischung von beiden Zuständen über.  
 Mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2} (1 + \sigma_z)$  nimmt  $A$  den Wert  $+\frac{\hbar}{2}$  und mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2} (1 - \sigma_z)$  nimmt  $A$  den Wert  $-\frac{\hbar}{2}$  an.

Position Elektron paar

$H = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  schreiben  $|\uparrow\uparrow\rangle$  für  $|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$   
 $100 := \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$  Zustand des Proton Elektron-paars in  $z$  Richtung spinnend  
 $P = 100 \langle 100|$  schreiben  $|\uparrow\rangle$  statt  $|\uparrow\uparrow\rangle$   
 $A = \frac{\hbar}{2} \sigma_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z^1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \frac{\hbar}{2} \sigma_z^2$   $P = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \otimes \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$  ist kein Produktzustand!  
 $A^1 = \frac{\hbar}{2} \sigma_z^1 \otimes \mathbb{1} = \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \otimes \mathbb{1}$   $A = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) + \frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$   
 $A^2 = \frac{\hbar}{2} \mathbb{1} \otimes \sigma_z^2$   $= \frac{\hbar}{4} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \otimes (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) - \frac{\hbar}{4} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \otimes (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$   
 Durch Messung von  $A$  geht  $P$  über in  $\tilde{P} = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \otimes \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$   
 Durch Messung von  $A^1$  geht  $P$  über in  $\tilde{P}_1 = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \otimes \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$

1 Photon zustand

$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  mit Basis  $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 resp.  $|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$   $|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$   
 $H = \begin{pmatrix} \hbar\omega & 0 \\ 0 & \hbar\omega \end{pmatrix}$   $\omega$  Frequenz des Photons  
 $J = (1 + \frac{\hbar}{2} \sigma_z)$  Polarisationszustand  $|\uparrow\rangle = |\rightarrow\rangle \Leftrightarrow$  reines Zustand  
 (da  $(1 + \frac{\hbar}{2} \sigma_z) (1 + \frac{\hbar}{2} \sigma_z) = (1 + \frac{\hbar}{2} \sigma_z)^2 = 1 + \hbar \sigma_z + \frac{\hbar^2}{4} \sigma_z^2 = 1 + \hbar \sigma_z + \frac{\hbar^2}{4} (1 + \sigma_z^2) = 1 + \hbar \sigma_z + \frac{\hbar^2}{2} (1 + \sigma_z^2) = 1 + \hbar \sigma_z + \frac{\hbar^2}{2} (1 + 1) = 1 + \hbar \sigma_z + \hbar^2 = (1 + \hbar)^2$ )

1 Körperprobleme

Harmonische  
Oszillator  
klassisch

klassisch  
Mechanik

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 q^2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{m\omega} \sin \omega t \\ -m\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad H(q,p) = \frac{p^2}{2m} \quad \begin{matrix} q(t) = q(0) + \frac{p(0)}{m} t \\ p(t) = p(0) \end{matrix}$$

Hohlraum-  
Strahlung

Kann durch System von ungekoppelten Oszillatoren d. Frequenz  $\gamma$  mit Unabhängigkeit  $\gamma$  beschrieben werden.

Nach Equipartitionstheorem d. klassisch stat. Mechanik liefert die unrichtig spektrale Verteilung  $\rho(\gamma, T)$ .

$$\begin{matrix} \rho(\gamma, T) = n(\gamma) \cdot \epsilon(\gamma, T) & \text{Breitengröße} \\ \epsilon(\gamma, T) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} & \text{mittlere Energie} \end{matrix} \quad \text{Plancksche Formel}$$

(Begründung:  $E_n = n h \nu$  mögliche Energiequanten mit Wahrscheinlichkeit)

$$w_n(\gamma, T) = \frac{e^{-E_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n h \nu / kT}} \quad \text{Boltzmann}$$

$$\epsilon(\gamma, T) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n w_n(\gamma, T) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n h \nu \beta} \right) \Big|_{\beta = \frac{1}{kT}}$$

$$= \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Quantenmechan.  
Beschreibung  
d. Hohlraumstrahl.

Strahlungsfeld mit  $n$  Photonen (sind Bosonen)  $|n\rangle$  Basisvektor

$$|n\rangle = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} h\nu n |n\rangle \right\}$$

$H$  = Vollständigkeitsrelation von  $|n\rangle$

$$|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | n \rangle |n\rangle \quad \text{reiner Zustand } |n\rangle \langle n|$$

$|n\rangle \langle n|$  Wahrscheinlichkeit  $n$  Photonen in  $|n\rangle$  zu finden

$$H = h\nu N = \sum_{n=0}^{\infty} h\nu n |n\rangle \langle n| \quad \text{Hamiltonoperator}$$

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle \langle n| \quad \text{Teilchenzahloperator}$$

$$|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle \langle n| \quad w_n > 0 \quad \sum w_n = 1 \quad \text{allgemeinster Zustand}$$

$$\rho_n(\gamma, T) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle \langle n| \quad \text{Thermische Gleichgewichtszustand d. Photonenmod. d. Frequenz } \nu$$

$$w_n = \frac{e^{-h\nu n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-h\nu n/kT}}$$

Der Erwartungswert für  $H$

$$\langle H \rangle_{\rho_n} = \text{Sp}(\rho_n H) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} h\nu n e^{-h\nu n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-h\nu n/kT}} = \epsilon(\gamma, T)$$

Erzeugung und  
vernichtungsoperatoren  
für Bosonen

Photonen  
als  
harmonische  
Oszillatoren

$$A^* |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad n(A) = n(A^* A) = \sum |n\rangle \langle n| n = n \rho_n$$

$$A |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$$A^* A |n\rangle = n |n\rangle = N |n\rangle$$

$$A A^* |n\rangle = (n+1) |n\rangle$$

$$[A, A^*] = 1 \quad |n\rangle = \frac{1}{n!} (A^*)^n |0\rangle$$

$A, A^*$  verhalten sich für große  $n$  wie Ausleit- und Anleitoperatoren eines Spin  $s$  Systems:

$$A |e\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} |g\rangle$$

$$A^* |g\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} |e\rangle \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

$$A |e\rangle |n\rangle_0 = \sqrt{n} |n-1\rangle_0 \left(1 - \frac{n-1}{2s}\right)^{1/2}$$

Impuls und  
Orbitsoperatoren

$$P = i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (A^* - A) = P^x$$

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (A^* + A) = Q^x$$

$$[P, Q] = i\hbar [A^* A] = \frac{\hbar}{i}$$

$$A = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} Q + i \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} P$$

$$A^* = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} Q - i \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} P$$

Kann in keinem endl. norm. Raum realisiert werden:  
 $\text{Sp}(P^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | P^2 | n \rangle = 0 \quad \text{Sp}(P^2) = 0$  für  $n$  dim Raum

Photonen  
als  
harmonische  
oszillatoren

$$H = \hbar\omega A^\dagger A = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} Q^2 - \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\Gamma p^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2} (A^{\dagger 2} - 2A^\dagger A + A^2)$$

$$Q^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (A^{\dagger 2} + 2A^\dagger A + A^2)$$

Nullpunktenergie

$$u(t) = e^{-iHt/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\omega t} |n\rangle \langle n|$$

Koherenzvektor

$$A(t) = A e^{-i\omega t}$$

$$A^\dagger(t) = A^\dagger e^{i\omega t}$$

$$\Gamma A(t)|n\rangle = u(t) A^\dagger A u(t) |n\rangle = u(t) A^\dagger A e^{-in\omega t} |n\rangle$$

$$= u(t) \sqrt{n} e^{-in\omega t} |n-1\rangle = \sqrt{n} e^{-i(n-1)\omega t} |n-1\rangle = A e^{-i\omega t} |n-1\rangle$$

$$Q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (A^\dagger(t) + A(t)) - \frac{\hbar}{2m\omega} [\cos\omega t (A^\dagger + A) + i \sin\omega t (A^\dagger - A)]$$

$$Q(t) = Q \cdot \cos\omega t + P \frac{\sin\omega t}{m\omega}$$

$$P(t) = P \cos\omega t - Q m \sin\omega t$$

P(t) =

Erwartungswerte für einen Zustand  $|p\rangle$  für den  $q = \text{Sp}(Q\rho)$  existieren  
 $q(t) = \text{Sp}(Q(t)\rho)$   
 $p(t) = \text{Sp}(P(t)\rho)$  entsprechen d. klassischen Lösungen.

$$\frac{i}{\hbar} [H, Q] = -\frac{P}{m}$$

$$\frac{i}{\hbar} [H, P] = m\omega^2 Q$$

$$\Gamma [H, Q] = \hbar\omega \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [A^\dagger A, (A^\dagger + A)]$$

$$= \hbar \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}} [A^\dagger A A^\dagger + A^\dagger A A - A^\dagger A^\dagger A - A A^\dagger A]$$

$$= \hbar \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}} (A^\dagger - A) = -\frac{P}{m} \cdot \frac{\hbar}{i}$$

Kohärente  
Zustände

für die Beschreibung d. Photonen  
in Quantenoptik zweckmäßig

$$\alpha \in \mathbb{C} \quad V(\alpha) := e^{\alpha A^\dagger - \bar{\alpha} A}$$

$$|\alpha\rangle := V(\alpha)|0\rangle$$

$$V(\alpha) = e^{\alpha A^\dagger} e^{-\bar{\alpha} A} e^{-|\alpha|^2/2}$$

Definition d. kohärenter Zustände  
 $|\alpha\rangle$  kohärente Vektoren

$$\Gamma e^{xY} = e^{xY} e^{Y(-\delta Y X Y / 2)}$$
 falls  $[X, [X, Y]] = 0$   
 $= [Y, [X, Y]] = 0$   
 $\times \Gamma w(t) = e^{-xt} e^{(x+y)t}$  d.h. diff. gl.  
 $w(t) = e^{-xt} Y e^{xt} + \int_0^t e^{-xs} Y e^{xs} ds$   
 mit Lösung  $w(t) = e^{-xt} \int_0^t Y - [X, Y] s = 0 \quad Y e^{-[X, Y] \frac{t^2}{2}}$

aus  $X$   
klar

wichtige  
Relationen

$$V(\alpha)V(\beta) = V(\alpha+\beta) e^{\frac{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta}{2}}$$

$$V(\alpha)^\dagger = V(-\alpha) = V(\alpha)^{-1}$$

$$V(0) = 1$$

$$\Gamma \frac{\partial V(\alpha)}{\partial \alpha} = A^\dagger$$

$$V(-\alpha) V(\beta) V(\alpha) V(-\beta) = e^{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}} \quad \left| \frac{\partial P}{\partial \alpha} \right|_{\beta=\bar{\alpha}} = 0$$

$$V(-\alpha) A^\dagger V(\alpha) = A^\dagger - \bar{\alpha}$$

$$V(-\alpha) A^\dagger V(\alpha) = A^\dagger + \bar{\alpha}$$

$$V(-\alpha) A V(\alpha) = A + \alpha$$

$|\alpha\rangle$  ist Eigenzustand von  $A$   
mit EW  $\alpha \quad A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

$$\Gamma A|\alpha\rangle = A V(\alpha)|0\rangle = V(\alpha) (A + \alpha)|0\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$A^\dagger$  hat keine EW

$$\Gamma A^\dagger |\alpha\rangle = \lambda |\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \langle n | A^\dagger |\alpha\rangle = \Gamma n \langle n-1 | \alpha\rangle = \lambda \langle n | \alpha\rangle \quad n=1, \dots$$

$$\langle 0 | A^\dagger |\alpha\rangle = 0 = \lambda \langle 0 | \alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \langle n | \alpha\rangle = 0 \Rightarrow |\alpha\rangle = 0$$

Zu gegebenen  $\alpha$  sei

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\bar{\alpha} + \alpha) \quad p = i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\bar{\alpha} - \alpha) \Rightarrow \langle \alpha | Q | \alpha \rangle = q$$

$$\langle \alpha | P | \alpha \rangle = p$$

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega t} |\alpha\rangle$$

Lösung d. Schröd. gl. ist  $|\alpha(t)\rangle$

$$\text{also } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle = H(t) |\alpha(t)\rangle$$

$$\Gamma i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} e^{-i\omega t} |\alpha\rangle = \omega \hbar e^{-i\omega t} |\alpha\rangle = \omega \hbar |\alpha(t)\rangle$$

$$H(t) = \hbar\omega A^\dagger(t) A(t) = \hbar\omega$$

Regung  
d.  
kohärenten  
Zustand

$$\langle \alpha | Q(t) | \alpha \rangle = q(t)$$

$$\langle \alpha | P(t) | \alpha \rangle = p(t)$$

mit  $q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha(t) + \alpha^*(t))$

$$p(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} i (\alpha(t) - \alpha^*(t))$$

kohärente Zustände: auch Gaußsche Wellenpakete

Nichtorthogonalität  
d. kohärenten  
Zustände

$$\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle = e^{-|\alpha_1 - \alpha_2|^2}$$

$$e^{-\bar{\alpha}_1 A} \cdot e^{\alpha_2 A^*}$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)^* A^* - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) A}$$

$$\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1 - \alpha_2|^2 + i \text{im}(\bar{\alpha}_1 \alpha_2)}$$

Lemma  $| \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} | n \rangle$

$$\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle = \langle 0 | e^{+\alpha_1 A^* - \bar{\alpha}_1 A} | 0 \rangle \langle \alpha_2 | e^{-\alpha_2 A^* - \bar{\alpha}_2 A} | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2} e^{+\alpha_1 A^*} e^{-\bar{\alpha}_1 A} e^{-\frac{1}{2}|\alpha_2|^2} e^{-\alpha_2 A^*} e^{-\bar{\alpha}_2 A} | 0 \rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2 - \frac{1}{2}|\alpha_2|^2} \langle 0 | e^{-\bar{\alpha}_1 A} e^{+\alpha_1 A^*} e^{+\alpha_2 A^*} e^{-\bar{\alpha}_2 A} | 0 \rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2 - \frac{1}{2}|\alpha_2|^2} \langle 0 | e^{-\bar{\alpha}_1 A} e^{+\alpha_1 A^* + \alpha_2 A^* - \bar{\alpha}_2 A} | 0 \rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2 - \frac{1}{2}|\alpha_2|^2 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2} \langle 0 | e^{-\bar{\alpha}_1 A} e^{+\alpha_1 A^*} e^{+\alpha_2 A^*} e^{-\bar{\alpha}_2 A} | 0 \rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2 - \frac{1}{2}|\alpha_2|^2 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2} \langle 0 | e^{-\bar{\alpha}_1 A} e^{+\alpha_1 A^*} e^{+\alpha_2 A^*} e^{-\bar{\alpha}_2 A} | 0 \rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2 - \frac{1}{2}|\alpha_2|^2 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2} \langle 0 | e^{-\bar{\alpha}_1 A} e^{+\alpha_1 A^*} e^{+\alpha_2 A^*} e^{-\bar{\alpha}_2 A} | 0 \rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1 - \alpha_2|^2 + i \text{im}(\bar{\alpha}_1 \alpha_2)}$$

$$\Rightarrow | \langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle |^2 = e^{-|\alpha_1 - \alpha_2|^2}$$

$$| n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (A^*)^n | 0 \rangle$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n (A^*)^n}{\sqrt{n!} \sqrt{n!}} | 0 \rangle = e^{\alpha A^*} | 0 \rangle$$

$$e^{|\alpha|^2/2} | \alpha \rangle = e^{|\alpha|^2/2} e^{\alpha A^*} e^{-\alpha \bar{\alpha}} | 0 \rangle = e^{|\alpha|^2/2} e^{\alpha A^*} e^{-\alpha \bar{\alpha}} | 0 \rangle = e^{\alpha A^*} | 0 \rangle$$

Vollständigkeitsrelation

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} | \alpha \rangle \langle \alpha | d^2 \alpha$$

$$\int_{\mathbb{C}} d^2 \alpha \langle \alpha | \alpha \rangle \langle \alpha | e \rangle = \int_{\mathbb{C}} d^2 \alpha e^{-|\alpha|^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\alpha^m \bar{\alpha}^n}{(m!n!)^{1/2}} \langle 4 | m \rangle \langle n | e \rangle$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\langle 4 | m \rangle \langle n | e \rangle}{(m!n!)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^{m+n} e^{i\chi(n-m)} e^{-r^2} r dr d\chi$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle 4 | n \rangle \langle n | e \rangle}{n!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^{2n} e^{-r^2} r dr = \sum_{n=0}^{\infty} \langle 4 | n \rangle \langle n | e \rangle = \langle 4 | e \rangle = 1$$

Entwicklung von  $| e \rangle$

$$| e \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha | \alpha \rangle \langle \alpha | e \rangle = \int_{\mathbb{C}} \psi(\alpha) | \alpha \rangle d^2 \alpha$$

Es ist nicht eindeutig können z.B. eine Menge  $\psi$  sein  
Mass 0 in  $\mathbb{C}$  frei wählen und darauf  $\psi(\alpha) = 0$  setzen.  
 $\int \psi(\alpha) | \alpha \rangle d^2 \alpha = \int \psi(\alpha) | \alpha \rangle d^2 \alpha$

Spur von X

$$\text{Sp} X = \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha \langle \alpha | X | \alpha \rangle$$

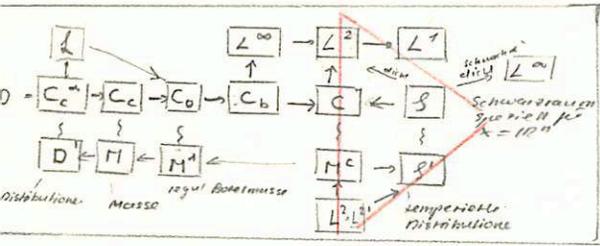
$$\text{Sp}(X) = \sum \langle n | X | n \rangle = \sum \langle n | \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha | \alpha \rangle \langle \alpha | X | \alpha \rangle | n \rangle$$

$$= \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha \langle \alpha | X \sum | n \rangle \langle n | \alpha \rangle$$

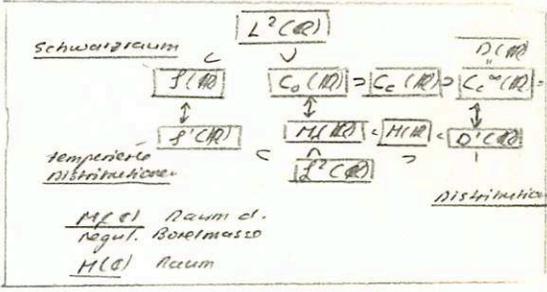
Die Orts- zur Schwingungsdarstellung

Motivation:

Im Teilraum konfigurationsraum sollte  $\mathcal{Q}$  alle rechten Welle als klassische Annahmen (Homogenität d. Potentials)  
 Da für einen S.O. Operator SW orthogonal sind, können wir als Zustandsraum nicht mehr den Hilbertraum  $L^2$  nehmen wie in der Energieeigenstellung sondern  $L^2$ .



uns hier interessierende Räume unser Hilbertraum soll  $L^2$  sein, wir wollen aber auch in einem Erweiterung von  $L^2$  in  $S'$  dem Raum d. temperierten Distributions arbeiten, sodass wir unseren Wunsch



$$\langle \varrho | \varrho \rangle = \langle \varrho | \varrho \rangle$$

$$\langle \varrho | \varrho \rangle = d(\varrho - \varrho)$$

$$d = \int d\varrho | \varrho \rangle \langle \varrho |$$

erhalten können.

auf Schwarzraum ist Fouriertrafo eine Bijektion eine Isometrie

Paraphrase: Fouriertrafo erweitert zu unitarem Operator auf  $L^2$

allg. Problem P, Q S.O. Operatoren mit  $[P, Q] = -iI$

können kanonische Kommutatorrelationen erfüllen durch Schwingungsdarstellung

$H = L^2(\mathbb{R})$   $Q: f(x) \rightarrow f(x)$   $e \rightarrow x \cdot e$   
 $P: f(x) \rightarrow f'(x)$   $e \rightarrow \frac{d}{dx} e$

In welchem Sinne ist diese Darstellung einzigartig?

$U(t) := e^{-itP}$   $V(t) := e^{itQ}$  umkehr in herkl. Operatoren

$U(t)V(s) = e^{its} V(s)U(t)$

Wegrelationen

von Neumann  $U(t), V(s)$  stetig einparam. unitäre Gruppen die die Wegrelationen erfüllen

P generalisiert  $U$   
 Q generalisiert  $V$   
 $\rightarrow \exists D$  d.h. W. Bereich  $P, Q: D \rightarrow D$   
 $[P, Q] = -iI$   
 $P, Q$  wesentlich s.o.

alle invec. Darstellung diese Relation sind unitär äquivalent

Konvention

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} (A^\dagger + A)$$

$$P = \frac{i}{\sqrt{2}} (A^\dagger - A)$$

$$H = A^\dagger A = \frac{P^2 + Q^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$A^\dagger = (Q - iP) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A = (Q + iP) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$Q: f \rightarrow f$   $Qe(q) = q \cdot e(q)$   $e \rightarrow f$   
 $P: f \rightarrow f'$   $Pe(q) = \frac{1}{i} \frac{d}{dq} e(q)$   $e \rightarrow f'$

$[Q, P] = i$

$\langle \varrho | e \rangle = \int \frac{d}{dq} e(q) - \frac{d}{dq} (q e(q)) = -iq \frac{d}{dq} e(q) + i e(q) + iq \frac{d}{dq} e(q) = i e(q)$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} (q + \frac{d}{dq})$$

$$A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (q - \frac{d}{dq})$$

$\langle \varrho | n \rangle = 4_n(q)$  Postulat

$0 = \langle \varrho | A | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (q + \frac{d}{dq}) \varphi_0(q) \rightarrow \varphi_0(q) = \pi^{-1/4} e^{-q^2/2}$

$4_n(q) = \frac{1}{n!} \langle \varrho | A^n | 0 \rangle = (2^n n! \pi)^{-1/2} (q - \frac{d}{dq})^n e^{-q^2/2}$  Hermitsche Funktionen

$H_n(q) = e^{q^2/2} (q - \frac{d}{dq})^n e^{-q^2/2}$  Hermilpolynome

die  $4_n(q)$  bilden ein Orthonormalsystem in  $\mathcal{F}$

$$\int 4_n(q) \cdot 4_m(q) dq = \int \langle m | \varrho \rangle \langle \varrho | n \rangle dq = \langle m | n \rangle$$

$$= \frac{1}{n! m!} \langle \varrho | A^m A^n | \varrho \rangle = \langle m | n \rangle - \delta_{mn}$$

Ordnung:  $4_n(q) = \langle \varrho | n \rangle \cdot \langle n | \varrho \rangle$   $\langle \varrho | e \rangle := e(q)$

$| \varrho \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} | n \rangle \langle n | \varrho \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} | n \rangle 4_n(q)$  ist nicht in  $L^2$ , denn  $\sum 4_n(q)^2 = \infty$

$| \varrho_0 \rangle = d(q - q_0)$   $\langle \varrho | \varrho_0 \rangle = d(q - q_0)$

$(E_{| \varrho_0 \rangle} e)(q) = \begin{cases} e(q) & \text{d.h. } q = q_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  Projektor in  $L^2$

$| \varrho \rangle$  Zustand  $e(q)$  Komponenten des Zustands in der Ortsdarstellung

$E_{| \varrho_0 \rangle} = \int | \varrho_0 \rangle \langle \varrho_0 | dq$  macht jsgf. Sinn für alle  $e \in \mathcal{F}$

$E_A := E_{| \varrho_0 \rangle} A$  - Spektralscher  $E(A_1) E(A_2) = E(\min(A_1, A_2))$

$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda = 0$   $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda = 1$   $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda = E_0$

$$E(\hbar, \hbar_0) = \int_{\hbar_0}^{\hbar} dE(A) = E(\hbar_1) - E(\hbar_0)$$

kann man  $dE(q) = 19 > < q | dq$  definieren

$Q = \int 19 > < q | dq$  Maßanzahl von  $Q$

4 Zustand  $\psi(q)$  Komponenten in Ortsdarstellung

$$|4\rangle = \int dq \psi(q) |q\rangle$$

$$\langle 4 | q \rangle = \psi(q)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte, dass System am Ort  $q$  zu finden

$$\int_{\mathbb{R}} dq |\psi(q)|^2 = \langle 4 | E(\hbar_1, \hbar_0) | 4 \rangle$$

Wahrscheinl., System zwischen  $\hbar_0$  u.  $\hbar_1$  zu finden

Normierung:  $\int_{\mathbb{R}} |\psi(q)|^2 dq = 1$

$F(q)$  z.B. Polynom  $F(Q) |4\rangle = \int F(q) \psi(q) dq$  Funktionalkalkül

$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dq^2} + \frac{q^2}{2}$   $H |4\rangle = E |4\rangle$

hat Eigenwerte  $E_n$  mit Eigenfunktionen  $\psi_n$

die Differentialgleichung  $H |4\rangle = E |4\rangle$  hat jeweils für jedes  $E$  eine Lösung (oder 2 lin. unabh. Lösungen), die Normierung  $\int |\psi(q)|^2 dq = 1$  nicht mehr möglich

Impulsdarstellung

suchen Eigenfunktionen des Impulsoperators

$$P |p\rangle = p |p\rangle \Rightarrow \psi_p(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq} = \langle q | p \rangle$$

Die Impulsdarstellung ist eine isomorphe Darstellung der Zustände. Isomorphie wird gegeben durch Fouriertransformationen.

$$P \hat{\psi}(p) = p \hat{\psi}(p) \Rightarrow Q \hat{\psi}(p) = i \frac{d\hat{\psi}(p)}{dp}$$

analog erhält man für  $|n\rangle = \int dp \hat{\psi}_n(p) |p\rangle$

$$\hat{\psi}_n(p) = \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{\hbar} \left[ p - \frac{d}{dp} \right] \right)^n \psi_0(p) = (-i)^n (2\pi n! \hbar)^{-1/2} H_n(p) e^{-p^2/2\hbar} = (-i)^n \psi_n(p)$$

$$\hat{\psi}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipq} \psi(p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} \langle p | q \rangle \langle q | 4 \rangle dq = \langle p | 4 \rangle$$

$$F \psi_n(p) = (-i)^n \psi_n(p)$$

Transformations  
theorie

<u>Energiedarst.</u>	<u>Ortsdarstell.</u>	<u>Impulsdarst.</u>
$ 4\rangle = \sum \psi_n  n\rangle$	$= \int \psi(q)  q\rangle dq$ $= \int  q\rangle \langle q   4 \rangle dq$	$= \int \hat{\psi}(p)  p\rangle dp$ $= \int  p\rangle \langle p   \hat{\psi} \rangle dp$ $= \int \int  p\rangle \langle p   q \rangle \langle q   \hat{\psi} \rangle dq = \int \int  p\rangle \langle p   q \rangle \langle q   4 \rangle dq$

$$|4\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n | 4 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n |n\rangle$$

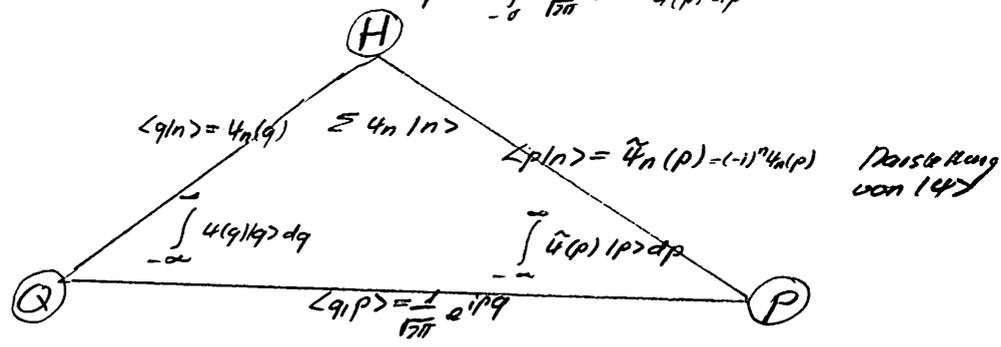
$$|4\rangle = \int |q\rangle \langle q | 4 \rangle dq = \int \psi(q) |q\rangle dq$$

$$Q = \int Q |q\rangle \langle q | 4 \rangle dq = \int q |q\rangle \langle q | 4 \rangle dq = \int q \psi(q) dq$$

$$|4\rangle = \int |p\rangle \langle p | 4 \rangle dp = \int \hat{\psi}(p) |p\rangle dp$$

$$\langle q | 4 \rangle = \int \langle p | q \rangle \langle p | \hat{\psi} \rangle dp$$

$$\text{oder } \psi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipq} \hat{\psi}(p) dp$$



$$\langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi \hbar}} e^{ipq/\hbar}$$

$$\langle q | n \rangle = \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/4} \psi_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} q \right)$$

$$\langle p | n \rangle = (m\omega \hbar)^{-1/4} (-i)^n \psi_n \left( (m\omega \hbar)^{-1/2} p \right)$$

Trijo in konventionellen Einheiten

Kohärenz  
zuständen  
Neben  
Minimal  
unschärfe

$$\text{var } Q = \langle \alpha | (Q - \langle Q \rangle)^2 | \alpha \rangle = \langle 0 | Q^2 | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | A A^\dagger | 0 \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \langle Q | \alpha \rangle &= \langle 0 | U(A)^\dagger Q U(A) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | U(A)^\dagger \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (A^\dagger + A) \right) U(A) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \frac{1}{\sqrt{2}} (A^\dagger + \bar{a} + A + \alpha) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{a} + \alpha) \end{aligned}$$

$$\langle P^2 \rangle = \langle Q^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Rightarrow (P | \alpha \rangle)^2 = \frac{\hbar^2}{4 \langle Q^2 \rangle} \Rightarrow P | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{2 \sqrt{\langle Q^2 \rangle}} \cdot \frac{Q | \alpha \rangle}{\sqrt{\langle Q^2 \rangle}} = \frac{Q | \alpha \rangle \cdot \hbar}{2 \langle Q^2 \rangle}$$

d.h.  $\frac{d\psi(q)}{dq} = -\frac{q\psi(q)}{2 \langle Q^2 \rangle}$       $\psi(q) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2 \langle Q^2 \rangle}} e^{-\frac{q^2}{4 \langle Q^2 \rangle}}$

und erhält auch  $\int_{-\infty}^{\infty} dq q^2 |\psi(q)|^2 = \langle Q^2 \rangle$

Unschärfe  
zwischen  
Energie und  
Zeit

$$\left. \begin{aligned} \Delta E &= \Delta \frac{p^2}{2m} = \frac{p}{m} \Delta p \\ \Delta t &= \frac{\Delta x}{v} = \frac{\Delta x \cdot m}{p} \end{aligned} \right\} \Delta E \Delta t \geq \hbar \quad \text{heuristisch}$$

klassisch

Lagrangefunktion  $L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 - V(r))$   
 $= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$  (zentrales Feld)

kanonische Impulse  
 $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} = p_r$   
 $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mr^2 \dot{\varphi} = p_\varphi$   
 $\frac{\partial L}{\partial r} = 2mr \dot{\varphi}^2 = p_\varphi^2 / r$

$H = \frac{1}{2m} (p_r^2 + V(r)) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2} \left\{ p_\varphi^2 + \frac{p_\theta^2}{\sin^2 \varphi} \right\} + V(r)$   
 $= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = H$

Integration  $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$      $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$   
 $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$   
 $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$   
 $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2 \sin^2 \varphi}$

$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$   
 $p_r = \sqrt{2m \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r) \right)}$   
 $t = \int \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}}$  (Gleichung für t)

$L^2 = \frac{1}{2m} (p_\varphi^2 + \frac{p_\theta^2}{\sin^2 \varphi})$   
 da  $|p|^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2}$   
 $\Gamma p^2 = 4p_r^2 \sin^2 \varphi + p_\theta^2 \cos^2 \varphi$   
 $= \frac{(p_r \sin \varphi)^2}{\sin^2 \varphi} + \frac{(p_\theta \cos \varphi)^2}{\cos^2 \varphi}$   
 $= \frac{L^2}{\sin^2 \varphi} + p_r^2$

Quanten-  
mechanisch

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \quad \text{in der Ortsdarstellung}$$

ist rotations-symmetrisch

$\Gamma$  Müssen zeigen:  $\exists$  Darstellung von  $SO(3)$   $R \rightarrow U(R)$ , so dass gilt  $U(R)^\dagger Q_i U(R) = \sum_j Q_j R_{ji}$   
 $U(R)^\dagger p_i U(R) = \sum_j p_j R_{ji}$   
 $\Rightarrow U(R)^\dagger H U(R) = H$

Sei  $|l, m\rangle = |l, m\rangle_{\varphi=0}$  simultane Ew von  $Q_1, Q_2, Q_3$

$Q_i U(R) |l, m\rangle = U(R) \sum_j R_{ji} Q_j |l, m\rangle = U(R) \sum_j R_{ji} Q_j |l, m\rangle$  d.h.  $\sum_j R_{ji} Q_j$  ist Ew zu  $U(R) |l, m\rangle$

Definieren  $Y(R) |l, m\rangle = |l, m\rangle \quad \forall R \in SO(3)$

$U(R) |l, m\rangle = U(R) |l, m\rangle$      $\Gamma \langle q_1 | U(R) |l, m\rangle = \delta(q_1 - R q_2) = \delta(R^T q_1 - q_2) = \langle q_1 | U(R^{-1}) |l, m\rangle$

$U(R) |l, m\rangle = |l, m\rangle$      $\Gamma \langle q_1 | p \rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{i q_1 R p} = (2\pi\hbar)^{-3/2} e^{i R q_1 p} = \langle R q_1 | p \rangle$

Das kälteste freie Teilchen

In d. Impulsraumdarstellung  $L^2(\mathbb{R}^3, dp^3)$  ist der Hamiltonoperator  $H = \frac{1}{2m} |p|^2$  ein Multiplikationsoperator  
 in  $\frac{d}{dt} \hat{\psi} = H \hat{\psi} = \frac{1}{2m} |p|^2 \hat{\psi}$   
 $\rightarrow \hat{\psi}(p, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t} \hat{\psi}_0(p)$  Wahrscheinlichkeitsdichte für den Impuls ist zeitunabhängig

H hat kein kontin. Spektrum mit Spektralcharakter  $E_\lambda(\hat{H}) = \begin{cases} \hat{H} & \text{für } \lambda \leq E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$   
 $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \langle \psi | E_\lambda | \psi \rangle d\lambda = \langle \psi | E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1} | \psi \rangle = \int_{\lambda_1 \leq \frac{p^2}{2m} \leq \lambda_2} |\hat{\psi}_0(p)|^2 dp$  Wahrscheinlichkeit, die Energie im Bereich zwischen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  zu finden

Spektralzerlegung:  $H = \int \lambda dE_\lambda$   $dE_\lambda = \int dp^3 d(\lambda - \frac{p^2}{2m}) \mathbb{1}_{\lambda > \frac{p^2}{2m}}$   
 Zusammenhang mit d. Ortsdarstellung:

$\psi_+(q, t) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int dp^3 e^{i p q / \hbar} \hat{\psi}_+(p, t) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int dp^3 e^{i p q / \hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t} \hat{\psi}_0(p)$   
 $= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int dp^3 e^{i p (q - \frac{p^2}{2m} t)} \hat{\psi}_0(p)$   
 $= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int dp^3 \int dx e^{i p (q - x) - \frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t} \psi_0(x)$   
 $= \int dx^3 G(q-x, t) \psi_0(x)$   
 $G(q, t) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int dp^3 e^{i p q / \hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t}}{(2\pi\hbar)^{3/2} (\det A)^{1/2}} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i t}\right)^{3/2} e^{i \frac{m}{2\hbar} \frac{q^2}{t}}$

Fouriertransf.  
 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$   
 $A^T = A$   
 $(Ax + x) > 0 \forall x$   
 $e^{-(Ax+x)/2} \psi(x) = e^{-\frac{1}{2} (k, k) / t} = (\det A)^{-1/4}$

ist Fundamentallösung d. hier/konformen Schrödingergleichung  
 $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$   
 $\psi_+(q, t) = \int dx^3 G(q-x, t) \psi_0(x)$   
 $\sup_{q \in \mathbb{R}^3} |\psi_+(q, t)|^2 \leq \left(\frac{m}{2\pi\hbar i t}\right)^3 \|\psi_0\|_2^2$

Zeitmessung des Wellenpakets

$\psi_+(q, t) = G * \psi_0$   
 $\frac{\partial \psi_+(q, t)}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} \psi_+(q, t) - \frac{\partial G}{\partial t} * \psi_0 = \frac{\Delta}{2m} \psi_+(q, t)$   
 $\psi_+(q, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t} * \psi_0(q)$

Zeitmessung d. Wellenpakets etwas präziser

$E(p) = \frac{p^2}{2m} = E(p_0) + \frac{dE(p)}{dp} (p - p_0) = E(p_0) + \frac{p_0}{m} (p - p_0)$   
 $\psi_+(q, t) = e^{i(q \cdot p_0 - E(p_0)t)} \chi(q - p_0 t)$   
 $\chi(q) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int dp^3 \hat{\psi}(p) e^{i \frac{p}{\hbar} \cdot q}$

Ausmessen mit Messgeräten Geschwindigkeit  $\frac{p_0}{m}$

unschärfte Beziehungen

$\text{var}_\psi(A) = \langle \psi | (A - \langle A \rangle_\psi)^2 | \psi \rangle = \langle \psi | A^2 | \psi \rangle - \langle \psi | A | \psi \rangle^2 = \delta_\psi^2(A)$  d. Standardabweichung

$\text{var}_{\psi(t)}(A) = \text{var}_\psi(A(t))$  Zust. Schröding., Heisenbergbild

kältestes Teilchen

$P(t) = P$   
 $Q(t) = Q + P t / m$

$\text{var}(Q|4_t) \sim \frac{\hbar^2}{m^2} \text{var}(P|4_t) \quad \hbar \rightarrow \infty$

$\frac{d}{dt} \text{var}(Q|4_t) = \frac{d}{dt} \text{var}(Q(t)|4_t) = \frac{d}{dt} \text{var}(Q + \frac{P t}{m} | 4_t)$   
 $= \frac{d}{dt} (\langle \psi | (Q + \frac{P t}{m})^2 | \psi \rangle - (\langle \psi | Q + \frac{P t}{m} | \psi \rangle)^2)$   
 $= \langle \psi | Q(t) P + P Q(t) | \psi \rangle - 2 \langle \psi | P | \psi \rangle \langle \psi | Q(t) | \psi \rangle$   
 $\frac{d}{dt} \text{var}(Q|4_t) = \frac{2}{m^2} \text{var}(P, 4_t)$   
 $\text{an } \text{var}(Q|4_t) \sim \frac{\hbar^2}{m^2} \text{var}(P, 4_t) \quad t \rightarrow \infty$

Heisenbergsche Unschärfen

$\text{var}_\psi A \cdot \text{var}_\psi B \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle_\psi|^2$

$\left. \begin{aligned} \bar{A} &:= A - \langle A \rangle_\psi & \langle \bar{A}^2 \rangle_\psi &= \text{var}_\psi(A) \\ \bar{B} &:= B - \langle B \rangle_\psi & \langle \bar{B}^2 \rangle_\psi &= \text{var}_\psi(B) \\ \langle \bar{A}, \bar{B} \rangle &= \langle [A, B] \rangle_\psi \end{aligned} \right\}$  müssen also gelten  $\langle \bar{A}^2 \rangle_\psi \langle \bar{B}^2 \rangle_\psi \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle_\psi|^2$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \|\bar{A} + i\lambda \bar{B}\|_\psi^2 = \|\bar{A}\|_\psi^2 + \lambda^2 \|\bar{B}\|_\psi^2 + i\lambda \langle \psi | [\bar{A}, \bar{B}] | \psi \rangle$   
 minimal für  $2\lambda \|\bar{B}\|_\psi^2 + i \langle \psi | [\bar{A}, \bar{B}] | \psi \rangle = 0$   
 $0 \leq \|\bar{A}\|_\psi^2 + \frac{1}{4} \frac{|\langle \psi | [\bar{A}, \bar{B}] | \psi \rangle|^2}{\|\bar{B}\|_\psi^2} \quad \lambda = \frac{-i \langle \psi | [\bar{A}, \bar{B}] | \psi \rangle}{2 \|\bar{B}\|_\psi^2}$

$U(R) \psi(q) = \psi(R^{-1}q)$

$\Gamma U(R) \psi(q) = \langle q | U(R) | \psi \rangle = \langle R^{-1}q | \psi \rangle = \psi(R^{-1}q)$

setzen  $U(R(\underline{e}, \alpha)) = e^{-i k(\underline{e}, \alpha)}$

$R(\underline{e}, \alpha) = (\underline{e} \cdot \underline{q}) \underline{e} + \underline{e} \wedge \underline{q} \cdot \sin \alpha + \underline{e} \wedge (\underline{e} \wedge \underline{q}) \cdot \cos \alpha$

$\hbar k(\underline{e}) = L \cdot \underline{e}$

$\Gamma (k(\underline{e}) \psi)(q) = i \frac{\partial}{\partial \alpha} U(R) \psi(q) |_{\alpha=0} = i \frac{\partial}{\partial \alpha} \psi(R^{-1}q) |_{\alpha=0} = i \nabla \psi \cdot \frac{\partial R^{-1}(\underline{e}, \alpha)}{\partial \alpha} |_{\alpha=0}(q)$   
 $= i \nabla \psi \cdot \underline{e} \wedge \underline{q} = (e \wedge q) \cdot \nabla \psi(q) = (Q \wedge P) \cdot \nabla \psi(q) = (Q \wedge P) \cdot \nabla \psi(q) = (L \cdot \nabla \psi)(q)$

$[k(\underline{e}), \underline{x} \cdot \underline{f}] = i \underline{x} \cdot \underline{e} \wedge \underline{f}$

$\Gamma e^{-i k(\underline{e}, \alpha)} (\underline{x} \cdot \underline{f}) e^{i k(\underline{e}, \alpha)}$   
 $= \underline{x} \cdot R(\underline{e}, \alpha) \underline{f}$   
 $\rightarrow \frac{1}{\alpha} \{ e^{-i k(\underline{e}, \alpha)} \underline{x} \cdot \underline{f} e^{i k(\underline{e}, \alpha)} - \underline{x} \cdot \underline{f} \}$   
 $\Rightarrow [k(\underline{e}), \underline{x} \cdot \underline{f}] \stackrel{\text{mit } \lim_{\alpha \rightarrow 0}}{=} \underline{x} \cdot \frac{\partial R(\underline{e}, \alpha) \underline{f}}{\partial \alpha} - \underline{f}$   
 $= \underline{x} \cdot \underline{e} \wedge \underline{f}$

speziell

$[L_1, L_2] = i \hbar L_3$  zykl.  
 $[L_1, Q_2] = i \hbar Q_3$  zykl.  
 $[L_1, P_2] = i \hbar P_3$  zykl.

$U(R)^\dagger H U(R) = H$   
 $\Rightarrow K^2, K_3, H$  kommutierende Integrale d. Bewegung mit rein diskretem Spektrum.  
 $\Rightarrow$  Betrachten  $H$  auf jedem Eigenraum  $H_{m, m}$  auf dem  $k^2 = e(e+1)$   $k_3 = m$  ist

B57  
 $[H, L_3] = 0$   
 $H_e$  Eigenraum zu  $E_{l, m}$  von  $L_3$   
 $L_3 H_e = e H_e$   
 $H L_3 H_e = H H_e = L_3 H H_e$   
 $\Rightarrow H H_e \in H_e$   
 $\Rightarrow H_2$   $H$ -Eigenraum von  $H$  bleibt invariant unter  $H$

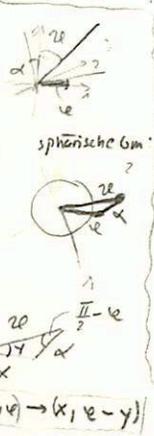
weiche Darstellung  $D_e$  von  $D_m [k_1, k_2] = i \hbar k_3$  kommen wir?

$q = (r \cdot \sin \vartheta \cos \varphi, r \cdot \sin \vartheta \sin \varphi, r \cdot \cos \vartheta)$   
 $\psi(q) = \psi(r, \vartheta, \varphi)$   
 $\langle \psi | \psi \rangle = \int r^2 dr \int \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi |\psi(r, \vartheta, \varphi)|^2$  Ortsdarstellung

(i)  $R(\underline{e}_3, \alpha) : (r, \vartheta, \varphi) \rightarrow (r, \vartheta, \varphi + \alpha)$   
 $L_3 \psi = -\frac{\hbar}{i} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\psi(r, \vartheta, \varphi + \alpha) - \psi(r, \vartheta, \varphi)}{\alpha} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi$

(ii)  $R(\underline{e}_1, \alpha) : (r, \vartheta, \varphi) \rightarrow (r + \alpha \sin \vartheta, \vartheta + \alpha \cos \vartheta \cos \varphi, \varphi)$   
 $L_1 \psi = -\frac{\hbar}{i} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\psi(r + \alpha \sin \vartheta, \vartheta + \alpha \cos \vartheta \cos \varphi, \varphi) - \psi(r, \vartheta, \varphi)}{\alpha}$   
 $= \frac{\hbar}{i} \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \psi + \cos \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \psi$

(i)  $L_3 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$   
(ii)  $L_1 = -\frac{\hbar}{i} (\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cos \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi})$   
(iii)  $L_2 = \frac{\hbar}{i} (\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi})$   
(iv)  $L_x = \frac{\hbar}{i} e^{i\varphi} (\frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi})$   
(v)  $L^2 = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial r} ( \frac{\partial}{\partial r} ) - \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\sin^2 \vartheta \partial \vartheta^2}$



Übergang in Polarkoordinaten  
 $L^2(\mathbb{R}^3, d^3q) = L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr) \otimes L^2(S_2, \sin \vartheta d\vartheta d\varphi)$

suchen Vektoren  $Y_{lm}$  mit  $k^2 Y_{lm} = e(e+1) Y_{lm}$   
 $k_3 Y_{lm} = m Y_{lm}$

Kugelfunktionen

$Y_e(q) := r^{-e} U_e(q)$  wobei  
 $U_e(q)$  ein harmonisches Polynom vom Grade  $e$  ist, das homogen ist  
 Harmonisch:  $\Delta P = 0$   
 $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r^2 - \frac{k^2}{r^2}$   
 $k^2 = \frac{L^2}{\hbar^2} = \frac{1}{\sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$   
 P-homogen:  $P_e(\lambda q) = \lambda^e U_e(q)$   
 homogen d.

$k^2 Y_e = (e+1)e Y_e$

$\Delta U_e = 0$   
 $\Rightarrow \frac{k^2}{r^2} U_e = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r^2 U_e$   
 $k^2 U_e = r \frac{\partial^2}{\partial r^2} r U_e$   
 $k^2 Y_e = r \frac{\partial^2}{\partial r^2} r^{-e} U_e = (e+1)e r^{-e} U_e = (e+1)e Y_e$

wegen  $h^2 \gamma_2 = \ell(\ell+1) \gamma_0$   
 kommt in  $L^2(S_2)$  jede irreduz. Darstellung  $\rho$   
 von  $SO(3)$  mindestens einmal vor.

$V_\ell$  Raum d. Kugelfunktionen vom Index  $\ell$   
 ist isomorph  $\mathbb{R}^{\ell+1}$

weiterhin:  $L^2(S_2)$  wird  
 aufgespannt durch Polynome  
 in  $y_1, y_2, y_3$  auf  $S^2$

Satz:  $h^2$  hat in  $L^2(S_2)$  die  $(2\ell+1)$  fachen  
 Eigenwerte  $\ell(\ell+1)$  und die Eigenfunktionen  
 $Y_\ell$  sind vollständig.

erhalten aus  $Y_0$  durch Linearwahl  
 simultane Eigenfunktionen  $Y_{\ell m}$

$$h^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}$$

$$h^3 Y_{\ell m} = m Y_{\ell m}$$

wegen  $h^3 Y_{\ell m} = \frac{1}{i} \frac{d}{d\varphi} Y_{\ell m} = m Y_{\ell m}$

$$\Rightarrow Y_{\ell m} = e^{im\varphi} Y_{\ell m}(\vartheta, 0)$$

↳ Abhängigkeit ist trivial

$$Y_{\ell 0}(\vartheta, 0) = C_\ell (\sin \vartheta)^\ell$$

$$C_\ell = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(2\ell)!}{\ell!}}$$

↳  $h^2 Y_{\ell 0} = 0$  heißt  $\frac{1}{i} \frac{d}{d\vartheta} (i \frac{d}{d\vartheta} - \cot \vartheta \frac{d}{d\vartheta}) e^{i\ell\vartheta} Y_{\ell 0}(\vartheta, 0) = 0$   
 $\Rightarrow (\frac{d}{d\vartheta} - \cot \vartheta) Y_{\ell 0}(\vartheta, 0) = 0$   
 $\Rightarrow Y_{\ell 0}(\vartheta, 0) = \text{const.} \cdot (\sin \vartheta)^\ell$

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{H}_{\ell m} \quad \mathcal{H}_{\ell m} = \left\{ f(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \mid \int_0^\infty dr r^2 |f(r)|^2 < \infty \right\}$$

bewirkt eine Reduktion der 3dim Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\varrho) + V(\varrho) \psi(\varrho) = E \psi(\varrho)$$

in 1 dim Radialgleichungen

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) + V(r) \right] f Y_{\ell m} = E f Y_{\ell m}$$

Mit dem in der Klammer nicht vor  $f$  steht  $Y_{\ell m}$  ist separiert

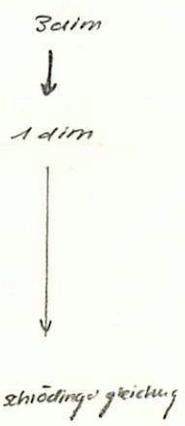
Setzt man  $f(r) = g(r)$ , so erhält man die Beweg.gleichung eines Massenpunktes  $r$  auf  $\mathbb{R}_+$  im effektiven Potential

$$U_\ell(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2}$$

Nichtimpulsstreuung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 g}{dr^2} + U_\ell(r) g = E g$$

mit  $\int_0^\infty dr |g(r)|^2 < \infty$   
 Normierbarkeitbedingung



WKB Methode  
 Wentzel, Kramers  
 Brillouin

Verfahren zur  
 näherungsweise  
 Lösung der 1dim  
 Schrödingergleichung

$$E \psi = H \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} \psi + V(r) \psi$$

Ansatz:  $\psi = A(r) e^{iS(r)/\hbar}$

$$\text{heißt } A'' + \frac{2i}{\hbar} A' S' + \frac{i}{\hbar} A S'' - A \frac{S'^2}{\hbar^2} + A \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) = 0$$

machen Potenzreihenentwicklung nach  $\hbar$

I heißt:  $S' = \sqrt{2m(E-V)}$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)}} e^{\pm i \int \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)} ds}$$

$$S = \int \sqrt{2m(E-V)} ds$$

haben  $\frac{\hbar^2}{2m}$  Terme vernachlässigt  
 ist in  $E \approx V(r)$  unbrauchbar

II heißt:  $\frac{2i}{\hbar} A' \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)} = \frac{i}{\hbar} A \frac{2m}{\hbar^2} (E-V)$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)}}$$

Radialgleichung  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} \psi(r) + V(r) \psi = E \psi$

Satz von Weyl und Kato

$V(r)$  leitet sich in Integral  
 $V(r) = O(r^{-1+\epsilon}) \quad r \rightarrow \infty$   
 $V(r) = O(r^{-2+\epsilon}) \quad r \rightarrow 0$

$\forall \epsilon > 0 \exists$  höchst abzählbar viele reguläre normierbare Lösungen  $g_\ell(k, r)$  der Radialgleichung mit  $k = i\alpha_n \quad \alpha_n > 0$

$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{\hbar^2 \alpha_n^2}{2m} + E_m$  (keine Entart.)  
 $\forall k > 0 \exists!$  reguläre Lösung  $g_\ell(k, r)$  mit Streuphase  $\delta_\ell(k)$

$g_\ell(k, r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell(k)) \quad r \rightarrow \infty$

Die  $\{g_\ell(i\alpha_n, r), g_\ell(k, r)\}$  bilden in  $L^2(\mathbb{R}_+, dr)$  ein vollständiges Orthonormalsystem  
 jedes  $g \in L^2$  hat die Form  
 $g(r) = \sum_n c_n g_\ell(i\alpha_n, r) + \int_0^\infty dk c(k) g_\ell(k, r)$   
 $c_n = \int dr g_\ell(i\alpha_n, r) g(r) \quad c(k) = \int dr g_\ell(k, r) g(r)$

$\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \psi = \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{m=-\ell}^\ell \frac{g_{\ell m}(r)}{r} Y_{\ell m}(\alpha, \varphi)$   
 $g_{\ell m} = \sum_n c_{n\ell m} g_\ell(i\alpha_n, r) + \int dk c_{\ell m}(k) g_\ell(k, r)$

14)  $\leftrightarrow \{c_{n\ell m}, c_{\ell m}(k)\}$   
 $\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{m=-\ell}^\ell \sum_n \overline{c_{n\ell m}} c_{n\ell m} + \int \overline{c_{\ell m}(k)} c_{\ell m}(k) dk$   
 $H|\psi\rangle \rightarrow \left\{ \frac{\hbar^2 \alpha_n^2}{2m}, \frac{\hbar^2 k^2}{2m} c_{\ell m}(k) \right\}$

Normierbarkeit  
Radialgleichung

$\int_0^\infty |g(r)|^2 dr < \infty$   
 für Eigenfunktionen  
 Beschränktheit und Oszillation im Unendlichen für verallgemeinerte Eigenfunktionen.

reguläre Lösung

$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 0$

Mehrmehrwert  
Zustände des  
reinen Teilchens

$V(r) = 0 \quad H$   
 $\left( -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2 \right) f_\ell(k, r) = 0$   
 Ansatz  $f_\ell(k, r) = z_{\ell+1/2}(s) s^{-1/2} \quad s = k \cdot r$   
 führt auf  $z'' + s z' + (1 - \frac{\ell^2}{s^2}) z = 0 \quad \lambda = \ell + 1/2$   
 Besselsche Dgl. Gleichung mit  $z_\lambda$  Zylinderfunkt. als Lösung

Besselsche Dgl.

$\Gamma \left( \frac{d^2}{(drk)^2} + \frac{2}{rk} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{(rk)^2} + 1 \right) = \frac{H}{k^2}$   
 $\left[ \frac{d^2}{(ds)^2} + \frac{2}{s} \frac{d}{ds} + \left( 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{s^2} \right) \right] f_\ell = 0$   
 $\Rightarrow \left[ \frac{d^2}{(ds)^2} + \frac{1}{s} \frac{d}{ds} + \left( 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{s^2} \right) \right] z_{\ell+1/2} = 0$

$\left( \frac{1}{s} \frac{d}{ds} s - \frac{\ell(\ell+1)}{s^2} + 1 \right) f_\ell(s) = 0$   
 mit regul. Lösungen  
 $j_\ell(s) = (-s)^\ell \frac{1}{s} \left( \frac{d}{ds} \right)^\ell e^{\frac{1}{2} s} \frac{\sin s}{s}$   
 $g_\ell(k, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k r j_\ell(kr)$  Lösungsm. gemäß Satz von Weyl-Hodeira

$\Gamma \ell = 0 \quad j_0(s) = \frac{\sin s}{s}$  ist Lösung regulärer  
 Auf- und Absteigeoperatoren  
 $D_\ell^+ = \frac{1}{is} \frac{d}{ds} s \quad D_\ell^- = i \frac{d}{ds}$   
 $D_\ell^+ D_\ell^- = \ell + 1 = D_{\ell+1}^- D_\ell^+$   
 $\Rightarrow (D_{\ell+1}^- D_\ell^+ - 1) D_\ell^+ f_\ell = 0$   
 wenn  $D_{\ell+1}^- D_\ell^+ f_\ell = D_\ell^- f_\ell = 0$   
 und  $(D_\ell^- - 1) D_\ell^- f_\ell = 0$   
 $i D_\ell^+ = \frac{1}{s} \frac{d}{ds} s - \frac{\ell}{s}$   
 $= \frac{d}{ds} - \frac{\ell-1}{s} = s^{\ell-1} \frac{d}{ds} s^{\ell-1}$   
 $\Rightarrow j_\ell(s) = (-1)^\ell D_\ell^+ D_{\ell-1}^+ \dots D_1^+ \frac{\sin s}{s}$

(i) folgt aus  $\int g_\ell(k, r_1) g_\ell(k, r_2) dk = \delta(r_1 - r_2)$   
 $\int_0^\infty dk |c(k)|^2 = \int_0^\infty dk \int_0^\infty dr_1 g_\ell(k, r_1) g_\ell^*(k, r_2) \int_0^\infty dr_2 g_\ell(k, r_2) g_\ell(r_1)$   
 $= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty g_\ell(k, r_1) g_\ell(k, r_2) dk g_\ell^*(r_1) g_\ell(r_2)$   
 $= \int_0^\infty |g_\ell(r)|^2 dr$

(ii) folgt aus  $g(r) = \int dk g_\ell(k, r) c(k)$

$J: L^2(\mathbb{R}_+, dr) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+, dk)$   
 $g(r) \rightarrow c(k)$   
 $c(k) = \int dr g_\ell(k, r) g(r)$   
 (i) ist isometrisch  $\|c\|_2^2 = \|g\|_2^2$   
 (ii) ist surjektiv

Fazit:

Die Wellenfunktionen  
 $\langle q | k, l, m \rangle = \frac{g_l(k, r)}{r} \quad Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = Y_{lm}(q)$   
 sind verallgem. Eigenfunktionen  $|k, l, m\rangle$  von  
 $H_0 = \frac{1}{2m} p^2, L^2, L_z \quad H_0 |k, l, m\rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} |k, l, m\rangle$   
 $L^2 |k, l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |k, l, m\rangle$   
 $L_z |k, l, m\rangle = \hbar m |k, l, m\rangle$   
 Skalarprodukte:  $\langle k_1, l_1, m_1 | k_2, l_2, m_2 \rangle = \int d^3q \psi_{k_1, l_1, m_1}^*(q) \psi_{k_2, l_2, m_2}(q)$   
 $= \int d^3q g_{l_1}(k_1, r) g_{l_2}(k_2, r) \int \sin^2 \vartheta d\vartheta d\varphi Y_{l_1, m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2, m_2}^*(\vartheta, \varphi)$   
 $= \delta(k_1 - k_2) \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2}$   
 bilden eine Basis im Zustandsraum  $L^2(\mathbb{R}^3)$  des freien Teilchens, wegen Vollständigkeit von  $g_l$  in  $L^2(\mathbb{R}_r)$  und von  $Y_{lm}$  in  $L^2(S_2)$

Impulsausleitung

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int d^3p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \langle q | p \rangle = \int d^3k \sum_{l, m} \langle p | k, l, m \rangle^* \langle q | k, l, m \rangle = \int d^3k \sum_{l, m} \langle q | k, l, m \rangle \langle k, l, m | p \rangle$$

$$= \int d^3k \sum_{l, m} \langle p | k, l, m \rangle^* Y_{lm}(q)$$

entwicklung d.  $\delta$ -Fkt. in Kugelmittelpunkt.

$$\langle p | k, l, m \rangle = \int d^3q \langle p | q \rangle \langle q | k, l, m \rangle \quad \text{Fourierexp. von } \psi_{k, l, m}$$

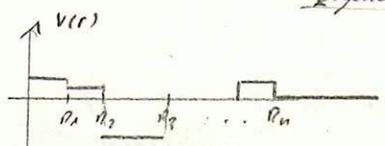
$$\langle k, l, m | p \rangle = i^l Y_{lm}\left(\frac{p}{p}\right) \frac{\delta(k - p)}{p \hbar^l}$$

Sketch:  
 $e^{i k r \cos \vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} j_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$   
 (superposition von Lösung d. Radialgleichung)  
 $= \sum_{l=0}^{\infty} c_{00} j_0(kr) Y_{00}(\vartheta, \varphi)$   
 $c_0 = i^l Y_{00}(\vartheta, \varphi) \quad \frac{\sqrt{2\pi}}{4\pi} P_0(\cos \vartheta)$   
 Legendrepolynom

stufenweise konstantes Potential

$$V(r) = V_m \quad r \in [R_{m-1}, R_m] \quad V_{m+1} = 0$$

$$R_{m+1} = \infty$$

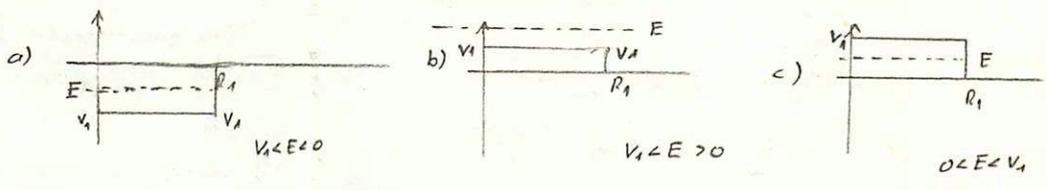


gibt Radialgleichung:

$$\left| \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m(E - V_l)}{\hbar^2} \right| \psi(r) = 0 \quad \text{in } (R_{l-1}, R_l)$$

mit  $f(R_{l-1}-0) = f(R_{l-1}+0)$   
 $f'(R_{l-1}-0) = f'(R_{l-1}+0) \quad \text{wenn } \neq$   
 $\lim_{r \rightarrow 0} r f(r) = 0$

untersuchen Fälle



a)  $\hbar k_0 = \sqrt{2m(E - V_1)} \quad f_<(r) = A j_l(k_0 r) \quad r \in (0, R_1) \quad \text{reguläre Lösung}$   
 $\hbar \kappa = \sqrt{-2mE} \quad f_>(r) = B h_0^{(1)}(i \kappa r) \quad r > R_1 \quad \text{exponent. abfallende Lösung}$

aus # folgt:  $\frac{d \ln |f|}{dr} \Big|_{R_1} = \frac{d \ln |f|}{dr} \Big|_{R_1} \quad \text{d.h.} \quad \frac{k_0 j_l'(k_0 R_1)}{j_l(k_0 R_1)} = \frac{i \kappa h_0^{(1)'}(i \kappa R_1)}{h_0^{(1)}(i \kappa R_1)}$

Bsp  $l=0 \quad f = f_r \quad g_< = A \sin(k_0 r)$   
 $g_> = B \cdot e^{-\kappa r}$

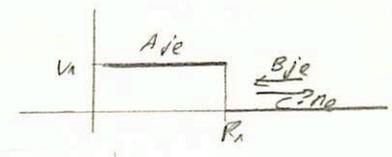
ergibt gleich:  $\frac{k_0 \cos k_0 R_1}{\sin k_0 R_1} = -\kappa \quad \Leftrightarrow \quad y = k_0 R_1$   
 $x^2 = \frac{2m R_1^2 |V_1|}{\hbar^2}$   
 $\cot y = -\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y}$

Transzendente Gleichung für E mit höchstens endlich vielen Lösungen.

b) c)  $0 < E < V_0$   $k_{in} = \sqrt{2m(E - V_0)}$   $k = \sqrt{2mE}$

$\psi_0(r) = B_j e^{ikr} + C_n e^{-ikr}$   
 $\psi_2(r) = A_j e^{ikr}$

Kontinuitätsbed. liefern  $\frac{C}{B} = -\frac{1}{2} \frac{d\psi}{dr}(k)$

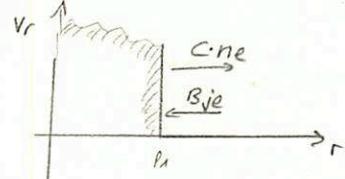


Grenzfall:

Außenraum eine harten Kugel

$V(r) = \begin{cases} +\infty & r < R_1 \\ 0 & r > R_1 \end{cases}$

mit Randbed.  $\psi_0(R_1) = 0$   
 $-B_j e^{ikR_1} + C_n e^{-ikR_1} = 0$   
 $\Rightarrow \frac{C}{B} = \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dr}(k) = \frac{je(kR_1)}{2kR_1}$



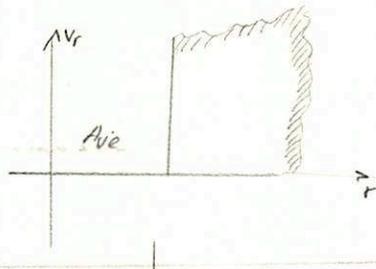
Berechnung d. Streuphase

Ionenraum eine harten Kugel

$V(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \infty & r > R_1 \end{cases}$

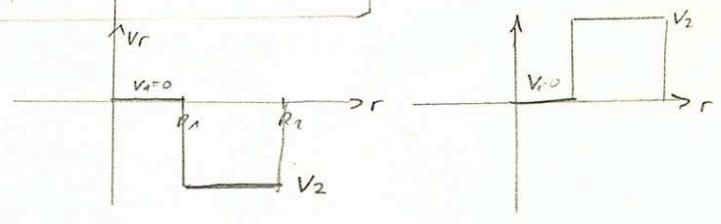
mit regul. Lösung  $A_j e^{ikr}$  und Randbeding.  $je(\sqrt{2mE}R_1) = 0$

$F_0 \sim \left( \frac{0 \cdot \pi}{R_1} + \frac{2 \cdot \pi}{20 \cdot \lambda} \right)^2$   
 $2m$



Kugelschale

neuer Effekt: Resonanzeffekte



d Schale

$V_0(r-R)$

Radialgleichung für  $g = rf$   $l=0$   $\omega = \frac{2mV}{\hbar^2}$

$-\frac{d^2}{dr^2} g + \omega(r-R)g = \frac{dmE}{\hbar^2} g$

mit Randbedingungen:  
 $g(0) = 0$   $g(R-0) = g(R+0)$   
 $g'(R+0) = g'(R-0) + \omega g(R)$

Zur 1dim Bewegung

$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(r)] \psi = 0$

Radialgleichung 1dim Schrodingergl.

mit Aufh. bei:  
 - Kugelsymmetrische Feldern  
 - Wirtzen Foklern

Satz

Energieabwärtis des diskreten Spektrums sind nicht entartet

$\int \frac{\psi_1''}{\psi_1} = \frac{\psi_2''}{\psi_2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - U(r)]$

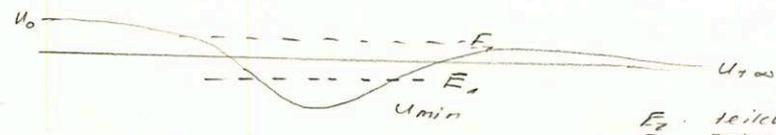
$\psi_1' \psi_2 - \psi_1 \psi_2' = \text{konst} = 0$  da  $\psi_1 = \psi_2 = 0$  im Unendlichen

$\frac{\psi_1}{\psi_2} = \text{konst}$

Knotenanzahl für wellenfunkt. des diskrete Spektrums

Die Funktion  $\psi_n(x)$  zum  $n$ -ten EW  $E_n$  hat  $n$  Nullstellen

sehen  $U(+\infty) = 0$   
 $U(-\infty) = U_0 > 0$



$E_2$ : Teilchen kann ins unendl. gehen  
 $E_1$ : Teilchen bleibt stehen

für hinreichend große  $x$  kann  $U(x)$  vernachl. werden

$\psi = a \cdot \cos(kx + \delta)$   $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  Wellenzahl

für hinreichend kleine  $x$  kann  $U(x) = U_0$  gesetzt werden

$\psi = b e^{\alpha x}$   $\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$

Das Coulomb Potential

$$V(r) = \pm 2e z_2 \frac{e^2}{r}$$

erfordert spezielle Diskussion, da Wegintegral nicht gilt!

Virialsatz

$$H = T + V \quad T = (2m)^{-1} p^2 \quad H|u\rangle = E|u\rangle$$

$$2 \langle u | T | u \rangle = \langle u | Q \cdot \nabla V | u \rangle$$

$$\langle u | H | u \rangle = E \langle u | u \rangle$$

$\langle u | Q \cdot \nabla V | u \rangle$  zeitunabhängig

$$\langle u | [Q \cdot \nabla, H] | u \rangle = 0$$

$$[Q \cdot \nabla, H] = [2Q_k p_k, \frac{\sum p_k^2}{2m} + V]$$

$$= \frac{2Q_k p_k p_k^2}{m} + \frac{2Q_k p_k V}{-i\hbar Q \cdot \nabla} - \sum \frac{p_k^2 Q_k p_k}{2m}$$

$$= \frac{1}{2m} \sum_k \sum_l [Q_k p_k, p_l^2] - \sum i\hbar Q \cdot \nabla V - V \sum Q_k p_k$$

$$= \frac{i\hbar}{m} \sum p_k^2 - i\hbar Q \cdot \nabla V$$

$$\langle [Q_k p_k, p_l^2] \rangle$$

$$= [Q_k, p_l^2] p_k$$

$$= [Q_k, p_l] p_l p_k$$

$$\langle [Q_k, p_l^2] \rangle = -i\hbar p_k^2 - V \sum Q_k p_k$$

$$= (k-v) \sum Q_k p_k$$

$$\langle u | \nabla V | u \rangle = \langle u | \nabla V(r) | u \rangle$$

Ist  $V(r) \leq 0$  (negativ)

$$0 \leq 2 \langle u | T | u \rangle = \langle u | r V(r) | u \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow \int d^3p p^2 |Q(p)|^2 = 0 \Rightarrow H = 0$$

gebundene Zustände im Coulombpotential

Für  $E < 0$  gibt es nur im allkultralen Fall gebundene Zustände für  $E > 0$  niemals

im Coulombpotential gilt  $Q \cdot \nabla V = -V$

Virialsatz:

$$2 \langle u | T | u \rangle = \langle u | -V | u \rangle$$

$$\langle u | T | u \rangle + E \langle u | u \rangle = 0 \Rightarrow E < 0$$

Wellen im Coulombfeld

$$V(r) = -\frac{ze^2}{r}$$

$$2mE = -\hbar^2 k^2$$

$$k = \alpha \cdot r$$

$$s_0 = \hbar \cdot \alpha \quad \alpha_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \cdot 10^{-8} \text{cm Bohrscher Radius}$$

$$\left[ \frac{1}{s} \frac{d^2}{ds^2} s - \frac{e(e+1)}{s^2} + \frac{2e}{s} - 1 \right] f = 0$$

Radialgleichung

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{e(e+1)}{r^2} \right) + V(r) \right) f = E f$$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{e(e+1)}{r^2} \right) - \frac{ze^2}{r} \right) f = E f \quad \left[ \frac{2m}{\hbar^2} \right]$$

$$\left( \frac{1}{s} \frac{d^2}{ds^2} s - \frac{e(e+1)}{s^2} + \frac{ze^2 2m}{\hbar^2 s^2 r} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) f = 0$$

$$\left[ \frac{1}{s} \frac{d^2}{ds^2} s - \frac{e(e+1)}{s^2} + \frac{2e}{s} - 1 \right] f = 0$$

setzen  $f = e^{-s} u$

erhalten dann Dgl:

$$u'' + 2 \left[ \frac{1}{s} - 1 \right] u' + \left[ \left( \frac{2e}{s_0} - 1 \right)^2 - \frac{e(e+1)}{s^2} \right] u = 0$$

Polenreihenansatz

$$u(s) = s^e \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^m$$

$$u'(s) = e s^{e-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^m + s^e \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} (m+1) s^m$$

$$u''(s) = e(e-1) s^{e-2} \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^m + 2e s^{e-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} s^m$$

$$+ e s^{e-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} (m+2) s^m$$

$$+ 2e s^{e-1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} (m+1) s^m$$

$$+ s^e \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} (m+1) s^m$$

Konfluent Hypergeometrische Dgl

einsetzen:

$$[(m+e+2)(m+e+1) - e(e+1)] a_{m+2}$$

$$= 2 \left[ m+e+1 - \frac{e}{s_0} \right] a_{m+1}$$

da so wählen, dass  $\int |e^{-s} u(s)|^2 r^2 dr = 1$

Normierbarkeit möglich  $\Rightarrow$

$$n = N(e+1) = \frac{e}{s_0} \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Hauptquantenzahlen}$$

$$N = 0, 1, 2, \dots$$

$n = \frac{Z}{\alpha c_0}$  Hauptquantenzahl

Schule

$E_n = \frac{-\hbar^2 \alpha^2}{2m} = \frac{-\hbar^2 Z^2}{n^2 \alpha^2 2m} = -\frac{1}{2} mc^2 \frac{(Z \cdot \alpha)^2}{n^2} = -13.605 \cdot \frac{Z^2}{n^2} \text{ eV}$

$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$  Feinstrukturkonstante

s. p. d. e. f. Niveaus

$l = 0, 1, \dots, (n-1)$  Orbitalquantenzahl / Nebenquantenzahl

$m = -l, \dots, l$  Magnetquantenzahl

qualitative Bemerkungen

a) Die radiale Wahrscheinlichkeitsverteilung ist  $W_{ne}(r) = r^2 |f_{ne}(r)|^2$  verhält sich für  $r \rightarrow 0$  wie  $r^{2(l+1)}$ , d.h. Elektron kann kein nicht zu nahe kommen.

b)  $f_{ne} = e^{-\beta r} U_{nl}$   $U_{nl}(\beta) = \sum_{k=0}^{n-l-1} a_k r^k e^{-\beta r}$   
 Polynom vom Grad  $n-l-1$   
 $a_k r^k = (-1)^k \frac{n-l-k}{k(k+1)} \cdot \frac{n-l-k-1}{(k+1)(k+2)} \dots \frac{n-l-k-1}{1(2 \dots k)}$

Potentialstreuung

$H = \sum_{i=1}^2 \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q_1, q_2)$

absparieren d. Schwerpunkt bewegung:

$P = p_1 + p_2$   $Q = \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2}$   $H = m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2 + V(q_1, q_2)$   
 $p = \frac{m_1 p_1 - m_2 p_2}{m_1 + m_2}$   $q = q_1 - q_2$   $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$   
 $H = H_S + H_r$   $H_S = \frac{P^2}{2M}$   $H_r = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

$\Gamma H_S + H_r = \frac{(p_1 + p_2)^2}{2M} + \frac{(m_1 p_1 - m_2 p_2)^2}{2m_1 m_2}$   
 $= \frac{(p_1 + p_2)^2 m_1 m_2 + (m_1 p_1 - m_2 p_2)^2}{2 m_1 m_2 M} = \frac{p_1^2 m_1 m_2 + p_2^2 m_1 m_2 + p_1^2 m_2^2 + p_2^2 m_1^2}{2 m_1 m_2 M}$   
 $= \frac{p_1^2 m_1 (m_1 m_2)}{2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} + \frac{p_2^2 m_2 (m_1 m_2)}{2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} = H_r$

quantenmechanik: Absparieren d. Schwerpunkt koordinat wird durch aufspalten

$\mathcal{X} = L^2(R^6 dq_1, dq_2) \cong L^2(M^3 dQ) \otimes L^2(M^3, dq)$   
 realisiert.

Potentialstreuung in Ortsdarstellung  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V$

$\psi_t$ :  $i\hbar \psi_t = H \psi_t$

$S(q, t) := |\psi_t(q)|^2$   
 $j(q, t) := \frac{\hbar}{2mi} \{ \overline{\psi_t}(q) \nabla \psi_t(q) - \psi_t(q) \nabla \overline{\psi_t}(q) \}$

wahrscheinlichkeitsdichte  
wahrscheinlichkeitsstromdichte

es gilt die

$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0$

Kontinuitäts Gleichung

$\Gamma \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{\psi_t}(q) \psi_t(q) = \frac{H \overline{\psi_t}(q) \psi_t(q)}{i\hbar} + \overline{\psi_t}(q) \frac{H \psi_t(q)}{i\hbar}$   
 $= \frac{-\Delta \frac{\hbar^2}{2m} + V}{i\hbar} \overline{\psi_t}(q) \psi_t(q) + \overline{\psi_t}(q) \frac{-\Delta \frac{\hbar^2}{2m} + V}{i\hbar} \psi_t(q)$   
 $= -\frac{\hbar}{2mi} \{ \Delta \overline{\psi_t}(q) \psi_t(q) - \overline{\psi_t}(q) \Delta \psi_t(q) \}$   
 $\nabla \cdot j = \frac{\hbar}{2mi} \{ \overline{\psi_t}(q) \Delta \psi_t(q) - \psi_t(q) \Delta \overline{\psi_t}(q) \}$

liefert lokalen Erhaltungssatz und mit

$\langle \psi_t, \psi_t \rangle = \int d^3q S(q, t) = 1$   
 einen globalen Erhaltungssatz

ebene Wellen für Kräftefreie Teilchen

$\psi_0(k, q) = e^{ik \cdot q}$   
 $S_0 = 1$   
 $j_0 = \frac{\hbar k}{m} (= \frac{p}{m} = v \cdot S_0)$

$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\Delta \hbar^2}{2m} \psi = E \psi$   
 $\psi(t) = e^{-iEt/\hbar} = e^{i(p^2 t/\hbar)}$   
 $\psi(t) = e^{-iEt/\hbar} \cdot e^{i p x/\hbar} = e^{i(Et - px)/\hbar}$   
 $= e^{i p q/\hbar} = e^{i k q}$   
 $k = \frac{p}{\hbar}$

Problemstellung für Streuprozes

$V \neq 0$   
 $V(q) \xrightarrow{\text{abw}} 0 \quad |q| \rightarrow \infty$   
 Sucht Lösungen  $\psi_{\pm}(k, q)$  mit posit. Energie  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  und asymp. Verhalten  $\downarrow$  Randbedingung

$\psi_{\pm}(k, q) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left\{ e^{i k q} + f_{\pm}(q, k) \frac{e^{\pm i k r}}{r} \right\}$

ebene einfallende Welle  $\leftarrow$  ein die austretende Kugelwelle (Planwelle)

erhält dann

$i k r \approx \pm \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r} \rightarrow |f_{\pm}(q, k)|$

$f_{\pm}(q, k) \approx \frac{\hbar}{m r^2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{i} \bar{f}_{\pm} \frac{d f_{\pm}}{d q} \right\}$

$f_{\pm}(q, k) \approx \frac{\hbar}{m r^2} \sin 2\alpha \text{Re} \left\{ \frac{1}{i} \bar{f}_{\pm} \frac{d f_{\pm}}{d q} \right\}$

Strom der ausk. Welle

$\Gamma \nabla r = \frac{d}{dr} \quad \nabla_{\text{ang}} = \frac{1}{r} \frac{d}{d\alpha} \quad \nabla_{\phi} = \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{d}{d\phi}$

zeitunabhängige Streutheorie

differenzielle Wirkungsquerschnitt

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{\hbar k}{m} |f(q, k)|^2}{\frac{\hbar k}{m}} = \frac{\text{Strom in den Winkelraum } d\Omega}{\text{Einfallender Strom}}$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(q, k)|^2$

totaler Wirkungsquerschnitt

$\sigma_T = \int d\Omega |f|^2 = \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\phi |f(q, k)|^2$

Existenz und Eindeutigkeitsproblem von Streulösungen

Suchen Lösung  $\psi_T$   
 $H \psi_T = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi_T$   
 $H = \frac{\Delta \hbar^2}{2m} + V$

$(\Delta + k^2) \psi_T = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar^2} U$

Differentialgleichung für  $\psi_T$

Streugleichung

$\psi_T(k, q) = e^{i k q} + \int d^3x G_{\pm}(k, q-x) U(x) \psi_T(k, x)$   
 mit  $G_{\pm}(k, q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i k r}}{r}$ ,  $(\Delta + k^2) G_{\pm}(k, q) = \delta(q)$

Integralgleichung für  $\psi_T$

$G$  Green'sche Funktion

$(\Delta + k^2) \psi_T(k, q) = U(q) \psi_T(k, q)$  mit  $(\Delta + k^2) G_{\pm}(k, q) = \delta(q)$   
 $\rightarrow$  Theorie d. Distributionen

$\psi_{\pm}(k, q) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x \frac{e^{\pm i k |q-x|}}{|q-x|} U(x) \psi_{\pm}(k, x)$   
 $f_{\pm}(k, q) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x e^{\pm i k \hat{q} \cdot x} U(x) \psi_{\pm}(k, x)$   
 $\rightarrow \psi_{\pm}(k, q) = \frac{e^{\pm i k r}}{r} f_{\pm}(q, k) + O(r^{-2})$

Born'sche Approximation

Iterieren Streugleichung: Entwicklung von  $\psi_{\pm}(k, q)$  in Potenzen von  $U$ :

$\psi_{\pm} = \psi_0 + G_{\pm} U \psi_{\pm} = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (G_{\pm} U)^n \psi_0$

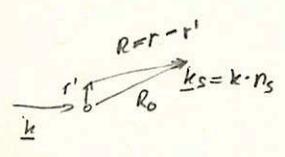
1. Born'sche Approximation ist Trunkation der Entwicklung bei  $n=1$

$\psi_{\pm}^{(1)}(k, q) = e^{i k q} - \frac{i m}{2\pi \hbar^2} \int d^3x \frac{e^{\pm i k |x-q|}}{|x-q|} V(x) e^{i k x} = e^{i k q} - \frac{1}{4\pi} \int d^3x \frac{e^{\pm i k |x-q|}}{|x-q|} U(x) e^{i k x}$

$f_{\pm}(q, k) = e^{\pm i k r} \cdot r \left( \frac{1}{4\pi} \right) \int d^3x \frac{e^{\pm i k |x-q|}}{|x-q|} U(x) e^{i k x} = e^{\pm i k r} \left( \frac{1}{4\pi} \right) \int d^3x \frac{e^{\pm i k (r-x) \hat{n}_s}}{r} U(x)$

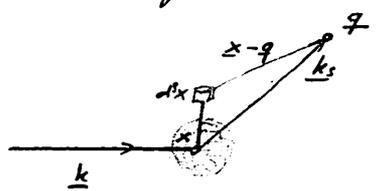
$|x-q| = r - x \hat{n}_s$

$= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x e^{i k (\hat{k} - \hat{k} \cdot \hat{n}_s) x} U(x)$



1. Born Approximation

$$f^{\pm}(\theta, \varphi, \underline{k}) = \frac{-m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x V(x) e^{i\underline{x}(\underline{k} - \underline{k}_s)}$$



$\psi_{\pm} = \psi_0 + G_{\pm} U \psi_{\pm}$  Integralgleichung die zur Schrödinger-Gleichung gehört

$\psi_{\pm} = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (G_{\pm} U)^n \psi_0$  Lösung d. Integralgleichung

Born Approximation:

$\psi_{\pm}^{\approx} = \psi_0 + G_{\pm} U \psi_0$

$\psi_{\pm}^{\approx}(\underline{k}, \underline{r}) = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x \frac{e^{i\underline{k}|\underline{x}-\underline{r}|}}{|\underline{x}-\underline{r}|} V(\underline{x}) e^{i\underline{k}_s \cdot \underline{x}}$

nun gilt

$f_{\pm}(\theta, \varphi, \underline{k}, r) \approx e^{\mp i\underline{k} \cdot \underline{r}} \cdot \left( \frac{-m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x \frac{e^{i\underline{k}|\underline{x}-\underline{r}|}}{|\underline{x}-\underline{r}|} V(\underline{x}) e^{i\underline{k}_s \cdot \underline{x}} \right)$

falls  $q$  gross ist im Vergleich mit  $x$  können wir  $|\underline{x}-\underline{r}|$  "ersetzten" durch  $r - \frac{x \cdot \underline{k}_s}{k}$

$f_{\pm}(\theta, \varphi, \underline{k}, r) = \frac{-m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x e^{i\underline{k}(\underline{x} \pm \frac{\underline{x} \cdot \underline{k}_s}{k})} V(\underline{x})$   
 $= \frac{-m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x V(\underline{x}) e^{i\underline{x}(\underline{k} - \underline{k}_s)}$

Bsp  
Yukawa Potential

$V(r) = g \cdot \frac{e^{-\mu r}}{r}$  Yukawa Potential  
 ergibt  
 $f^{\pm}(g, \mu, \theta, \varphi, \underline{k}) = -\frac{2mg}{\hbar^2} (\mu^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^{-1}$

Coulomb Streuung

$\frac{d\sigma'}{d\Omega} = |f_{\mu=0}|^2 = \frac{2z_1 z_2 e^2 m^2}{4E} \sin^{-4} \frac{\theta}{2}$

ergibt Rutherford'sche Streuformel, obwohl höhere Bornsche Näherung divergieren

Streuung an zentral-potential

$\psi_{\pm}(k, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta_0)$   $\psi_{e,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\pi}{4\pi}} P_0(\cos \theta)$

Streuphasen  $\delta_l(k)$  bestimmen Streuwelle für zentralpotential

Potenziale endlich Reichweite

Streuphase legt Wellenfunktion nur wenig fest

Streuung in hartem Kugel

$\delta_l \approx \frac{1}{2} k a^2$

Resonanzen

in niederenergetischer Kernphysik

Coulombstreuung

analytische  
Lösung d.  
Radialgleichung  
möglich  
→ hypergeometrische  
Differentialgleichung

zeitabhängige Streumatrix

Streumatrix

Streuung an Potential  $H = H_0 + V$   $H_0 = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m}$

$|e^{i\mathbf{k}}\rangle \in \mathcal{X}$  Zustand eines kugelfreien Teilchens zum  $t=0$

$|e^{\pm}\rangle \in \mathcal{X}$  Zustand des Teilchens im Potential  $V$  zur Zeit  $t=0$

mit  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \| e^{-iH_0 t/\hbar} |e^{in}\rangle - e^{-iH t/\hbar} |e^+\rangle \| = 0$

ebenso

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| e^{-iH_0 t/\hbar} |e^{out}\rangle - e^{-iH t/\hbar} |e^-\rangle \| = 0$

ist bewiesen mit Existenz von  $s$ -lim  $U(t)U_0(t)$

Definieren:

$s$ -lim  $U(-t)U_0(t) = \mathcal{R}^\mp$

denn dann

$|4^-\rangle = \mathcal{R}^- |4^{out}\rangle$   
 $|4^+\rangle = \mathcal{R}^+ |4^{in}\rangle$

$S := \mathcal{R}_-^* \mathcal{R}_+$  Streuoperator  
 $\mathcal{X}^\pm := \mathcal{R}_\pm \mathcal{X}$  ein- und auslaufende Streuzustände

$\langle 4^- | 4^+ \rangle = \langle 4^{out} | \mathcal{R}_-^* \mathcal{R}_+ | 4^{in} \rangle = \langle 4^{out} | S | 4^{in} \rangle$   
Übergangsamplitude

- Eigenschaften:  $\bullet \mathcal{R}_\pm$  sind Isometrien  
 $\Rightarrow \mathcal{R}_\pm^* \mathcal{R}_\pm = 1$   
 $\bullet [S, H_0] = 0$

$\Gamma U(t) \mathcal{R}_\pm = s$ -lim  $U(t)U(-s)U_0(s)$   
 $= s$ -lim  $U(-s)U_0(s)U_0(t)$   
 $= \mathcal{R}_\pm U_0(t)$   
 $\rightarrow H \mathcal{R}_\pm = \mathcal{R}_\pm H_0$

- $\bullet B \subseteq \mathcal{K}$  Raum d. gebundenen Zustände

$B \perp \mathcal{X}^\pm$   $\Gamma H |4\rangle = E |4\rangle$   
 $|4^\pm\rangle \in \mathcal{X}^\pm$   $|4^\pm\rangle = \mathcal{R}_\pm |4^{in}\rangle$   
 $\langle 4 | 4^+ \rangle = \langle 4 | U(t)^* U(t) | 4^+ \rangle = e^{iEt/\hbar} \langle 4 | U(t) | 4^+ \rangle$   
 $\rightarrow 0 = e^{iEt/\hbar} \langle 4 | U_0(t) | e^{in} \rangle = \int d^3p \overline{U(p)} \tilde{\psi}^{in}(p) e^{i(E - \frac{p^2}{2m})t/\hbar} \rightarrow 0$

gilt  $\mathcal{R} = B \oplus \mathcal{X}^S$  asymptotische Vollständigkeit

Raum d. Streuzustände

jeder Streuzustand hat genau eine ein- und auslaufende Asymptote für anständig Potential

$|x\rangle \in \mathcal{X}^S \Rightarrow |x^S\rangle = \mathcal{R}^+ |e^{in}\rangle = \mathcal{R}^- |e^{out}\rangle$

allgemein: Wechselwirkung eines Teilchens mit Spin  $s$  wird durch Spinor der Stufe  $2s$  beschrieben der symmetrisch ist. Die symmetrischen Spinoren realisieren irreduzible Darstellungen von  $SU(2)$

Transformation bei Drehungen:

$$U(\underline{e}, \varphi) = e^{i \underline{e} \cdot \underline{\sigma} \varphi / 2} = \cos \frac{\varphi}{2} + i \underline{e} \cdot \underline{\sigma} \sin \frac{\varphi}{2}$$

nichtrelativist.: Wechselwirkung von Teilchen ist unabhängig vom Spin. Trotz dem existiert eigenartige Abhängigkeit d. Energie vom orbitalen Spin, die aus dem Prinzip d. Ununterscheidbarkeit gleichartiger Teilchen folgt.

Bei relat. Effekte wohl: Spin tritt in Wechselw. mit magnetischem Feld  $\rightarrow$  oben

Zeitunabhängige Störungstheorie

Analytische Störung:

$$H = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \dots = H(\lambda) = H_0 + V(\lambda)$$

$H_0$  hat  $n$ fachen isolierten EW  $E_0$

$E_0$  spaltet dann unter kleinen Störungen auf in maximal  $n_0$  versch. analytische EW  $E^k(\lambda)$  mit Eigenfunkt.  $|\psi^k(\lambda)\rangle$ , die analyt. in  $\lambda$  sind.

Algorithm: f. Bestimmung von  $E^k(\lambda)$ ,  $\psi^k(\lambda)$  durch Koeff.vergleich

$$H(\lambda) \psi^k(\lambda) = E^k(\lambda) \psi^k(\lambda)$$

$$E^k(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} E_m^k \lambda^m$$

$$|\psi^k(\lambda)\rangle = \sum |\psi_m^k(\lambda)\rangle$$

mit Normierung:  $\langle \psi_0^k | \psi^k(\lambda) \rangle = 1 \rightarrow \langle \psi_0^k | \psi_m^k(\lambda) \rangle = 0$   $m \geq 1$

$$(H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \dots) (\psi_0^k + \lambda \psi_1^k + \lambda^2 \psi_2^k + \dots) = (E_0^k + \lambda E_1^k + \lambda^2 E_2^k + \dots) (\psi_0^k + \lambda \psi_1^k + \lambda^2 \psi_2^k + \dots)$$

$$H_0 \psi_0^k = E_0^k \psi_0^k$$

$$(H_0 - E_0^k) \psi_1^k + (H_1 - E_1^k) \psi_0^k = 0$$

$$(H_0 - E_0^k) \psi_2^k + (H_1 - E_1^k) \psi_1^k + (H_2 - E_2^k) \psi_0^k = 0$$

} genügt meist für physikalische Problemlösungen

refinierten:  $P_0 = -Q_0 (H_0 - E_0)^{-1} Q_0$

$H_0$  ER von  $H_0 \rightarrow$  m EW  $H_0$

$P_0$ : Proj. auf  $H_0$

$Q_0 = 1 - P_0$  Proj auf  $H_0^\perp$

Pauli Gleichung:

wir wollen die Hamiltonfunktion eines Elektrons bestimmen, falls der Spin auch mit einbezogen werden soll.

Schröd.gl. für Elektron ohne Spin

$$\mathcal{X} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3q)$$

$$H = \frac{1}{2M} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \underline{A}(q,t) \right)^2 + e\phi(q,t)$$

Erwartungswerte:

$$S(q,t) = |\psi(q,t)|^2$$

$$j(q,t) = \frac{1}{M} \operatorname{Re} \langle \psi^*(q,t) | \vec{p} - \frac{e}{c} \underline{A}(q,t) | \psi(q,t) \rangle$$

(vgl. ohne abstr. Feld)

$$j(q,t) = \frac{\hbar}{2mi} \langle \psi^*(q,t) | \nabla | \psi(q,t) \rangle - \langle \psi^*(q,t) | \nabla | \psi(q,t) \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{mi} \operatorname{Re} \langle \psi^*(q,t) | \nabla | \psi(q,t) \rangle$$

haben lokalen Erhaltungsgl.  $\frac{d\rho}{dt} = \operatorname{div} j$

Eigenwert:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \rho | \psi \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | [H, \rho] | \psi \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | \underline{p} - \frac{e}{c} \underline{A}(q,t) | \psi \rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar} \langle \psi | \Pi_x | \psi \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \Pi_x | \psi \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | [H, \Pi_x] | \psi \rangle - \frac{e}{c} \langle \psi | \frac{dA}{dt} | \psi \rangle$$

$$- e \langle \psi | E(q,t) | \psi \rangle \rightarrow \frac{e}{c} \langle \psi | (\vec{p} \cdot \underline{B}(q,t))_{\text{symm}} | \psi \rangle$$

mit Spin ist der Zustandsraum

$$\mathcal{X} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3q) \otimes \mathbb{C}^2$$

$$\psi(q,s) \quad s = \pm \frac{\hbar}{2}$$

$\psi(q,s)$  2-komponentiges Spinorfeld

Darstellung der SU(2) in  $\mathcal{X}$ :

1) Operation auf  $\mathbb{C}^2$ :  $U_{\text{Spin}}(A) : \chi(s) \mapsto \chi'(s) = \sum_{s'} A_{ss'} \chi(s')$

$$A_{ss'} = \langle s | A | s' \rangle$$

2) Operation auf  $L^2(\mathbb{R}^3, d^3q)$ :  $U_{\text{Bahn}}(A) : \psi(q) \mapsto \psi'(q) = \psi(R^{-1}q)$

$R(A)$  homomorphes Bild von  $\pi : SU(2) \rightarrow SO(3)$

Tensorprodukt der Operationen:

$$U(A) : \psi(q,s) \mapsto \psi'(q,s) = \sum_{s'} A_{ss'} \psi(R^{-1}(q), s')$$

Im Zustandsraum des Elektrons mit Spin  $\frac{1}{2}$  hat man eine unitäre Darstellung  $U : A \rightarrow U(A)$  von SU(2), das Tensorprodukt der Darstellungen  $U_{\text{Bahn}}$  und  $U_{\text{Spin}}$

Dabei addieren sich die infinitesimalen Erzeugenden, die Drehimpulse zum Gesamtdrehimpuls  $J$ :

$$U(e^{-i(\underline{L} + \underline{S}) \cdot \underline{\alpha} / \hbar}) = U_{\text{Bahn}}(R(\underline{e}, \underline{\alpha})) e^{-i \underline{S} \cdot \underline{\alpha} / \hbar}$$

$$= e^{-i(\underline{L} + \underline{S}) \cdot \underline{\alpha} / \hbar}$$

$$\underline{J} = \underline{L} + \underline{S} \quad \underline{L} = \underline{x} \wedge \underline{p} \quad \underline{S} = \hbar \cdot \underline{\sigma} \quad [\underline{L}, \underline{S}] = 0$$

Ein äußeres elektromagnetisches Feld koppelt an die Bahnbewegung und an die Spinfreiheitsgrade.

$$H_0 = \frac{1}{2M} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \underline{A} \right)^2 + e\phi + g \mu_B \underline{B} \cdot \underline{S} / \hbar \quad \mu_B = \frac{-e\hbar}{2Mc} \quad \text{Bohrscher Magneton}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_0 \psi \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2 \quad \text{Pauli Gleichung}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = H_4$$

$$H = -\frac{\Delta \hbar^2}{2m}$$

freies Teilchen: speziell für harm. Oszillator

$$H = -\frac{\Delta \hbar^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 - \frac{\hbar\omega}{2}$$

harm. Oszillator

$$H = \hbar\omega A^\dagger A$$

$$P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (A^\dagger - A)$$

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (A^\dagger + A)$$

$$[P, Q] = i\hbar$$

$$A^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad A^\dagger \sim \frac{d}{dx} + x/\lambda$$

$$A |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$$A^\dagger A |n\rangle = N |n\rangle = n |n\rangle$$

$$|n\rangle = \frac{A^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle = \frac{A^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} \quad \text{normiertes Hermitepolynom}$$

haben const. System in  $L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{X} = L^2(\mathbb{R}, dx)$$

$$= \oplus \mathcal{H}_n$$

Energiediagonale:  $H$  diagonal  
Schwüngenormale:  $Q$  diagonal  
Impulsdarstellung:  $P$  diagonal  
Kohärenzoperator  $d/dx$ :  $A$  diagonal

$$\langle q | n \rangle = \psi_n(q) \quad \langle n | k \rangle = e^{-\frac{k^2}{2m\omega}} \frac{1}{\sqrt{n!}}$$

$$\langle p | n \rangle = \psi_n(p) \quad \langle p, q \rangle = \langle 2m\hbar \rangle^{1/2} \psi_n(ipq)$$

$$u(t) = e^{-iHt/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\omega t} |n\rangle \langle n|$$

$$A(t) = e^{-i\omega t} A \quad \Rightarrow \quad Q(t) = Q \cos \omega t + \frac{P \sin \omega t}{m\omega}$$

$$A^\dagger(t) = e^{i\omega t} A \quad \Rightarrow \quad P(t) = -Q \sin \omega t m\omega + P \cos \omega t$$

$$H = -\frac{\Delta \hbar^2}{2m} + V(r)$$

Zentralkraft

$$\mathcal{X} = L^2(\mathbb{R}^3, dx)$$

$$= \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-l}^l \mathcal{X}_{lm}$$

$$\mathcal{X}_{lm} = \{ f(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \}$$

$l^2, l_z, H$  kommut. Integral der Bewegung

$$K = \frac{L^2}{\hbar^2} \quad [l_1, l_2] = i\hbar l_3$$

$$L^2 |l, m\rangle = l(l+1) \hbar^2 |l, m\rangle$$

$$L_z |l, m\rangle = m \hbar |l, m\rangle$$

Satz von Weyl, Heisenberg:

$V(r)$  lokale Integral  
 $V(r) = O(r^{-1-\epsilon}) \quad r \rightarrow \infty$   
 $V(r) = O(r^{-2+\epsilon}) \quad r \rightarrow 0$   
 $\forall l \exists \leq N_0$  reguläre, normale Lösungen  
 $g_l(k, r)$  d. Radialgleich.  $k = \sqrt{E}$   
 $\forall h \exists$  regul. Lösung  $g_l(k, r)$  mit Streukoeff.  $0 \leq k_l$  für jedes  $k$   
 $g_{lm} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{km} g_l(k, r) = \int c_{km}(k) g_l(k, r) dk$   
 $|u\rangle \leftrightarrow \text{com. } \text{com}(k)$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) \right) f(r) = E f(r)$$

$$f(r) = g(r)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 g}{dr^2} + U_0(r) g = E g \quad U_0(r) = V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$$

metrischer

regulär:  $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$   
normiert:  $\int_0^\infty |g(r)|^2 dr < \infty$

haben hier also eine eindeut. Schwächgleichung

Normierbarkeitsbedingungen:  $\int_0^\infty |g(r)|^2 dr < \infty$  für Eigenwert  
• Positivität und Null. im Unendlichen für exakt. Eigenwert

wann?  
 $U(r) = O(r^{-2+\epsilon}) \quad r \rightarrow \infty$   
 $V(r) = O(r^{-1-\epsilon}) \quad r \rightarrow \infty$

$$r \rightarrow \infty \quad -\frac{\hbar^2}{2m} g'' = E g \quad \Rightarrow \quad g = a e^{ikr} + b e^{-ikr} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$E < 0 \Rightarrow E$  normierbar falls  $b=0$

$$r \rightarrow 0 \quad -\frac{\hbar^2}{2m} g' + \frac{l(l+1)}{r^2} g = 0 \quad g = A r^{l+1} + B r^{-l}$$

$E > 0 \Rightarrow B=0$  d.h.  $g(r) \rightarrow 0 \quad r \rightarrow 0$   
 $E=0$  ...  $g(r) \rightarrow 0$

also reguläre Lösung:  
 $g \approx r^{l+1} \quad r \rightarrow 0$   
 $g \approx a e^{ikr} + b e^{-ikr} \quad r \rightarrow \infty$   
normierbar für  $l_0(E_n) = 0$

reguläre Lösung

Raum der Zustandsvektoren: separierbare Hilbertraum mit positiv definiten Metrik

$\Omega \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^x$

- Strahlen in  $\Omega$ : normalisierbare keine Zustände  $|\psi\rangle \langle \psi|$ ,  $\|\psi\| = 1$
- verallgemeinbare keine Zustände  $|\phi\rangle \langle \phi|$ ,  $P_\phi, |\phi\rangle$

$E_a$

hier können nur Verhältnisse von Erwartungswerten definiert werden.

Jede Observable  $A$  entspricht ein s.o. Operator  $A$  mit  $f(|\psi\rangle) \sim f(A)$  und  $\langle \psi | A | \psi \rangle$  ist der Erwartungswert d. Operators im Zustand  $\psi$

Spektralzerlegung v.  $A$ :  $A = \int a dE_a$   
 $\langle \psi | a | \psi \rangle = \langle \psi | E_a | \psi \rangle$  Wahrscheinlichkeit im Zustand  $\psi$  einen Wert  $a \in \mathbb{R}$  zu finden

Vektoren in  $\Omega$  heißen reguläre Zustände  $|\psi\rangle \langle \psi|$   
 Vektoren in  $\mathbb{R}^x$  heißen verallgemeinbare Zustände  $|\phi\rangle \langle \phi|$

Mischungen von Zuständen sind im normalisierbaren Fall  $\sum a_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ ,  $a_i > 0$ ,  $\sum a_i = 1$   
 im allgemeinen Fall  $\int f(a) |\psi\rangle \langle \psi| da$ ,  $\int |f(a)| da = 1$

Normalisierung d. verallgemeinbaren Zustände:  $\langle \phi | \phi \rangle = \delta(\phi' - \phi)$

Bei einer Messung einer Observable  $A$  im Zustand  $\psi$  muss man nachher mit einem gemischt von (verallgemeinbaren) Eigenzuständen von  $A$  weiterrechnen:  $\rho = \int a |\psi\rangle \langle \psi| da$  (sp.  $\rho = \sum a_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ )

diskrete Fall:  $|\psi\rangle \langle \psi| \rightarrow \sum_i |c_i a_i|^2 |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$   
 allg.  $|\psi\rangle \langle \psi| \rightarrow \int |c(a)|^2 |\psi\rangle \langle \psi| da$ ,  $\int |c(a)|^2 da = 1$

Genauere Analyse d. Messprozesses: Mittelstadi

1. Schritt: Zerlegung: Zustand  $|\psi\rangle$  wird nach Spektrum von  $A$  zerlegt:  $|\psi\rangle = \int |\psi\rangle \langle \psi| da$   
 $w_\psi(E_a) = \int |c(a)|^2 da$  Wahrsch. d. Messwert  
 diskret  $|\psi\rangle = \sum |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$   
 $= \sum c_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$

2. Schritt: Erweiterung  $|\tilde{\psi}\rangle = |\psi\rangle |\phi\rangle$ ,  $|\psi_i\rangle = |\psi_i\rangle |\phi\rangle$   
 $\rho_{|\tilde{\psi}\rangle} = |\tilde{\psi}\rangle \langle \tilde{\psi}| = \int \tilde{c}_{aa'} |\psi\rangle \langle \psi| |\phi\rangle \langle \phi| da da'$   
 dichte Matrix

$\rho_\psi = \sum |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \langle \psi_i | \psi_i \rangle$   
 $= \sum \langle \psi_i | \psi_i \rangle |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$

$|\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \int |c_1\rangle \langle c_1| |\psi\rangle \langle \psi| |\phi\rangle \langle \phi| da da'$   
 $c(c_1, c_2)$

3. Schritt: Aufnahme  $|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{iHt} |\tilde{\psi}\rangle$   
 $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  nicht mehr zerlegbar

Restaurierung prinzipiell möglich: Sein Gerlach

4. Schritt: Schnitt Korrelation vom Messapparat mit Subsystem des Systems, Entropiezunahme  $S = -k \cdot Sp(\rho \log \rho)$   
 $\rho_{|\psi\rangle} = \omega_\psi = \int \tilde{c}_{aa'} |\psi\rangle \langle \psi| da da'$ ,  $\int \tilde{c}_{aa} da da' = 1$

5. Schritt: Ableitung -- Entropie wird wieder 0

Der Preis  
Zeichnen

Der 3D-Formalismus:

Bewegen uns im Raum  $M_{1,3}$  (Minkowski-Raum) mit Koordinaten  $(ct, x^1, x^2, x^3) = \vec{x}$  und Minkowski-Metrik

$w = \frac{dx^i}{dt}$  Geschwindigkeit

Wirkung  $S = -mc \int_{t_1}^{t_2} dl = -mc \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - w^2} dt = -mc \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{1/2} dt$

Lagrange-Fkt  $L = -mc^2 \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{1/2}$  nehmen  $t$  als speziellen Parameter

Impuls  $p_\alpha = \frac{m \dot{x}_\alpha}{\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{dL}{dx^\alpha}$

Energie  $E = \langle \dot{x}, p \rangle - L = \frac{m w^2}{\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{1/2}} - mc^2 \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{1/2}}$

Impuls als 4er Vektor:  $P = \begin{pmatrix} E/c \\ cp_1 \\ cp_2 \\ cp_3 \end{pmatrix}$

$F^2 - c^2 p^2 = \frac{m^2 c^4}{\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)} - \frac{m^2 w^2 c^2}{\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)} = c^4 m^2$

$F^2 - c^2 p^2 = c^4 m^2$   
Masseerhaltungssatz d. Teilchens

Äquivalenter Formalismus:

Wirkung  $S = \frac{mc}{2} \int \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle dt$

Die Extremale zu dieser Wirkung stimmen mit den geodäten von oben überein

4er Impuls als kovektoren  $\tilde{p}_i = \frac{dL}{dx^i}$   
als kontraktoren  $\tilde{p}_0 = mc \dot{x}^0$   
 $\tilde{p}_\alpha = -mc \dot{x}^\alpha$

$L = \frac{mc}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle$  Lagrangefunktion

4er Impuls als Vektoren  $\tilde{p}^i = mc \dot{x}^i$

Wenn wir als Parameter  $\tau$  die Länge  $l$  nehmen

$dl = c \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} dt$

erhalten wir

$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dl}$

$\tilde{p}^0 = mc \dot{x}^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} = \frac{E}{c}$   $\tilde{p}^\alpha = mc \dot{x}^\alpha = \frac{m w^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} = p^\alpha$

Verallgemeinerung:

$g_{ij}$  beliebige Metrik auf einer Mannigfaltigkeit

$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j$

$p_i = g_{ij} \dot{\xi}^j$   $f_k = \frac{dL}{dx^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j$

Euler-Lagrange:

$\frac{dp_k}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j$

$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} g_{ki} \dot{\xi}^i = \frac{d}{dt} g_{ki} \dot{\xi}^i = \frac{\partial}{\partial x^e} g_{ki} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^e + g_{ki} \ddot{\xi}^i$

$g_{kj} \ddot{\xi}^j + \frac{\partial}{\partial x^e} g_{kj} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^e = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j$

$\ddot{\xi}^m + \left( \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) g^{km} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j = 0$

$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i} \right) \dot{\xi}^i \dot{\xi}^i$

$\ddot{\xi}^m + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) g^{km} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j = 0$

$\ddot{\xi}^m + \Gamma_{ij}^m \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j = 0$   
geodäten auf Mannigfaltigkeit

auch wenn wir

$L = \sqrt{g_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j}$  nehmen erhalten wir die

Euler-Lagrange Gln:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^k} = \frac{d}{dt} \frac{g_{ki} \dot{\xi}^i}{\sqrt{g_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j}} = \left( \frac{\partial L}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{g_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j}$

mit natürlicher Parametrisierung  $\sqrt{g_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j} = |\dot{x}| = \text{const.}$

$\frac{d}{dt} g_{ki} \dot{\xi}^i = \frac{d}{dt} g_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j$  was der obigen Euler-Lagrange Gleichung entspricht.

Einschätzung des elektromagnetischen Feldes

$L^{all}$  Lagrangefunktion die schon vorgegeben ist. definieren neue Lagrangefunktion

$L = L^{all} + \frac{e}{c} A_i \dot{x}^i$   $A_i$  Vektorpotential des elektromagn. Feldes die hier fest sein soll

die neuen Impulse:

$p_i = p_i^{all} + \frac{e}{c} A_i$

Euler-Lagrange Gln:  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L^{all}}{\partial \dot{x}^i} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_j \dot{x}^j}{\partial \dot{x}^i} = f_i + \frac{e}{c} F_{ij} \dot{x}^j$

wobei der elektromagnetische Feldtensor

$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}$  so definiert

und  $\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \dot{x}^j = 0$  vorausgesetzt

Im 3D-Formalismus haben wir

$A_0 = c\varphi$   $\varphi$  elektrisches Potential  
 $A_i = \vec{A}_i$   $\vec{A}$  Magnetisches Potential

Methodisches Variationsrechnung

F linearer Raum von Vektorfunktionen definiert auf  $D \subseteq \mathbb{R}^n$   $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$   
 $L(x^{\mu}; p^i, q^{\alpha}_i)$   $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$   $i, j \in \{1, \dots, k\}$  glatt.  
 $J(f) = \int_0^1 L dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_n}$   $L = L(x^{\mu}, f^i(x^{\mu}); f^{\alpha}_i(x^{\mu})) = L(t, f^i(t), f^{\alpha}_i(t))$  im 1dim Fall  
 $f \in F$  ist extremal für Funktional  $J$  genau dann, wenn  $\frac{\delta L}{\delta p^i} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{d}{dx^{\alpha}} \left( \frac{\delta L}{\delta q^{\alpha}_i} \right) = 0$

Der Energie-Impuls Tensor

Euler-Lagrange Gleichungen. wir suchen Erhaltungsgrößen

$$\frac{\delta L}{\delta p^i} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{d}{dx^{\alpha}} \frac{\delta L}{\delta q^{\alpha}_i} = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta x^i} = \frac{\delta L}{\delta f^{\alpha}_i} f^{\alpha}_i + \frac{\delta L}{\delta f^{\alpha}_k} \frac{df^{\alpha}_k}{dx^i} = \frac{d}{dx^{\alpha}} \left( \frac{\delta L}{\delta f^{\alpha}_k} f^{\alpha}_k \right)$$

$$\frac{d}{dx^{\alpha}} \frac{\delta L}{\delta x^i} = \frac{d}{dx^{\alpha}} \left( \frac{\delta L}{\delta f^{\alpha}_k} f^{\alpha}_k \right) \text{ ergibt } \frac{d}{dx^{\alpha}} \left( \frac{\delta L}{\delta f^{\alpha}_k} f^{\alpha}_k - L \delta^i_k \right) = 0$$

$\frac{d}{dx^{\alpha}} T_i^{\alpha} = 0$

Divergenz des Tensors verschwindet

$T_{ik} := g_{ke} f^{\alpha}_i \frac{\delta L}{\delta f^{\alpha}_k} - L g_{ik} = g_{ke} T_i^{\alpha}$

Energie-Momententensor

Der Energie-Impulstensor ist nicht eindeutig:

$$\hat{T}_{ik} = T_{ik} + \frac{d}{dx^e} \psi_{ike}$$

schief-symmetr. Tensor in  $k, e$

Eichtransformation

Bspweise:  $\frac{d}{dx^e} \psi_i^{ke} = \frac{1}{2} (T_i^k - T_k^i)$   
 bringt  $T_{ik}$  auf symmetrische Form

Impuls des Vektor

den Impuls des Vektor erhalten wir so:

$$dS_k := \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} dx^i dx^j dx^k$$

$P^i := \frac{1}{c} \int_{x^0=const} T^{ik} dS_k = \frac{1}{c} \int T^{i0} dS_0$

es gilt

$\frac{\delta T^{ik}}{\delta x^{\alpha}} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dx^0} = 0$

Annahme  $T_{ik} = O(\frac{1}{R^2})$   $R \rightarrow \infty$   
 Zylinder in  $\mathbb{R}^4$  mit Boden u. Deckel als Hyperflächen  $x^0 = x^1 = \dots = x^3 = \lambda$   
 Stokes:  $\int_{\partial \Sigma} T^{ik} dS_k = 0$   
 $\int_{\partial \Sigma} T^{ik} dS_k = \int_{\Sigma} d(T^{ik} dS_k) = \int_{\Sigma} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} dS_k = 0$   
 also  $P^i(x_1^0) = P^i(x_2^0)$

Der Impuls des Vektor bleibt unter der Eichtransformation die den Energietensor symmetrisch invariant.

$\int_{x^0=const} \frac{d\psi_{ike}}{dx^e} dS_k = 0$

$\psi_{i00} = 0$  nach voraus.

$dS_k \int_{x^0=const} = 0$  falls  $k \neq 0$  klar also

$\int_{S^3} \text{div} (\psi_{i01}, \psi_{i02}, \psi_{i03}) dx^1 dx^2 dx^3 = \int \langle \psi_i, n \rangle d\sigma$   
 $\int_{S^3} \rightarrow 0$   
 $\int_{S^3} \rightarrow 0$   
 $R \rightarrow \infty$

d.h. wir können von nun an den Energietensor symmetrisch annehmen o.B.d.A.

Drehmoment tensor

$$M^{ik} := x^i p^k - x^k p^i = \frac{1}{c} \int_{x^0=const} (x^i T^{ke} - x^k T^{ie}) dS_e = M^{ik}$$

es gilt  $T^{ik} = T^{ki} \Rightarrow \frac{d}{dx^0} M^{ik} = 0$  Drehimpulserhaltung

$M^{ik}(x_1^0) = \frac{1}{c} \int_{x^0=x_1^0} (x^i T^{ke} - x^k T^{ie}) dS_e = \frac{1}{c} \int_{x^0=x_2^0} (x^i T^{ke} - x^k T^{ie}) dS_e = M^{ik}(x_2^0)$

genügt  $\frac{d}{dx^e} (x^i T^{ke} - x^k T^{ie}) = 0$

das gilt aber wegen  $\frac{d}{dx^e} (x^i T^{ke} - x^k T^{ie}) = T^{ki} - T^{ik} = 0$

Die Gattungen des elektromagn. Feldes

Beobachten  $n$  Teilchen im Raum mit Masse  $m_i$  und Ladung  $e_i$ . Gesucht sind die Bahnen der Teilchen und die Felder.

$S_m$  Wirkung der Teilchen ohne Felder

$$- \sum_i m_i c \int_0^{b_i} d\tau$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}^4$   
Integration über Weltlinien d. Teilchen

$S_{m1}$  Wirkung der Interaktion der Teilchen mit dem Feld

$$- \sum_i \frac{e_i}{c} \int_0^{b_i} A_k^{(j)} dx^k$$

$A_k$  Vektorpotential des Feldes

$E = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi$   
 $H = \text{rot } \vec{A}$   $\vec{A}$  Vektorpotential

$S_f$  Wirkung des Feldes ohne Teilchen

$$- \frac{1}{16\pi} \int F_{ik}^2 d^4x$$

$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$  elektromagn. Feldtensor

$F_{ik}^2 = F_{ik} F_{ik} = 2(H^2 - E^2)$

$S = S_m + S_{m1} + S_f$  Wirkung d. ganzen Systems

$S = S_m + S_{m1}$

gehen  $A_k$  vor: Bewegung d. Teilchen in einem vorgegebenen Feld

$S = S_{m1} + S_f$

gehen  $j^k$  vor: Bewegung d. Feldes bei vorgegebener Ladungsverteilung und Stromverteilung - Maxwellgleichung

$S = S_f$

Bewegung d. freien elektromagnetischen Feldes

$S_{m1}'$  Wirkung d. Interaktion Strom, Feld

$$- \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d^4x$$

$j^i = \rho \cdot \frac{dx^i}{dt}$

$\int d^3x dx^4 = \int d^3x dt$

$d^3x$  als Distribution

$$\int_0^b e A_k dx^k = \int_{t_1}^{t_2} e A_k \frac{dx^k}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} e A_k \frac{dx^k}{dt} dt = \int \frac{d^3x}{S} e A_k \frac{dx^k}{dt} d^4x$$

$= \int A_k j^k d^4x$

$S_m'$

$$- c^2 \int \delta d^4x$$

$\delta$  Massendichte in  $\mathbb{R}^4$

Formale Uckerinsetzung analog zu  $S_{m1} \sim S_{m1}'$

könnten  $S = - \int \delta \delta + \frac{1}{c^2} A_i j^i + \frac{1}{16\pi} F_{ik}^2 d^4x$  schreiben

Speziell:

Ein Teilchen in einem vorgegebenen elektromagnetischen Feld

$L = mc \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + \frac{e}{c} A_k \dot{x}^k$   $\dot{x}^k \frac{dL}{d\dot{x}^k} = 2mc \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + \frac{e}{c} A_k \dot{x}^k$

$H = \dot{x}^k \cdot \frac{dL}{d\dot{x}^k} - L = mc \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle$  Die Geschwindigkeit bleibt also konstant.

Newton Gleichungen:  $\frac{dL}{dx^k} = \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{x}^k}$   $\frac{dL}{dx^k} = \frac{e}{c} \frac{\partial A_0}{\partial x^k} \dot{x}^i$

$\frac{dL}{d\dot{x}^k} = 2mc g_{ik} \dot{x}^i + \frac{e}{c} A_k$

$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{x}^k} = 2mc g_{ik} \ddot{x}^i$  falls das Feld konstant ist

ruhen also:  $2mc g_{ik} \ddot{x}^i = \frac{e}{c} \frac{\partial A_0}{\partial x^k} \dot{x}^i - \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t}$  falls Feld nicht konstant

$h=0$   $0 = \frac{\partial A_0}{\partial x^0} \dot{x}^i - \frac{\partial A_0}{\partial t} = v \cdot \vec{A}$

$h=1$   $-2mc \ddot{x}^k = -\frac{e}{c} E^k$

Eine Verallgemeinerung der Gravitations Theorie analog zur Theorie des elektromagnetischen Feldes, d.h.  $B = (\phi, \vec{B})$  = Gravitationspotential von Newton, mit der Wirkung

$S_{mg} = - \sum_i \frac{m_i}{c} \int B_k dx^k = \frac{1}{2} \int B_i g^i d^4x$  schlägt fehl, da  $B$  die Form  $(\phi, 0, 0, 0)$

haben müsste (nach Experimenten) und diese Theorie (wie schon Poincaré gezeigt hat) ungenau ist (Merker). Annahme  $\phi(x-ct)$  (Poincaré)

Bewegung des Feldes bei vorgegebener Strom und Ladungsverteilung

Haken Wirkung  $S = S_{M1} + S_1 = - \int \frac{1}{c^2} A_k j^k + \frac{1}{4\pi c} F_{ik}^2 d^4x$   
 $L = - \int \frac{1}{c^2} A_k j^k + \frac{1}{4\pi c} F_{ik}^2$

$$F_{ik} F^{ik} = \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) \left( \frac{\partial A^k}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^k} \right)$$

$$\frac{\delta F_{ik} F^{ik}}{\delta A^a_j} = -4 F^{ij} \delta^i_a$$

Euler-Lagrange Gl:  $\frac{\delta L}{\delta A^k} = \frac{\delta}{\delta x^\alpha} \frac{\delta L}{\delta A^k_\alpha}$  ergibt:  $\frac{1}{c^2} j^k = \frac{1}{4\pi c} \frac{\delta}{\delta x^\alpha} \left( 4 \frac{\delta A^k}{\delta x^\alpha} - 4 \frac{\delta A^\alpha}{\delta x^k} \right)$   
 $-\frac{1}{c^2} j^k = \frac{1}{4\pi c} \frac{\delta}{\delta x^\alpha} F^{\alpha k}$

$$\frac{\delta L}{\delta A^k} = -\frac{1}{c^2} j^k$$

$$\frac{-4\pi}{c} j^i = \frac{\delta F^{ik}}{\delta x^k} \quad \checkmark$$

Übersetzung in den dreidim. alten Formalismus:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

haben:  $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{A} - \text{grad} \phi$   
 $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{H}$$

$$\text{div} \vec{H} = 0 \quad \checkmark$$

homogener Maxwellgleichn.

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} & \frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2} & \frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3} \\ 0 & \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} & \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ 0 & +H_3 & -H_2 & 0 \\ 0 & 0 & +H_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{ik} = g^{il} g^{km} F_{lm}$$

$$F^{0k} = g^{0l} g^{km} F_{lm} = g^{0l} (-F_{lk}) \quad k=1,2,3$$

$$= -F_{0k} \quad k=1,2,3$$

$$F^{ik} = g^{il} g^{km} F_{lm} = F_{ik} \quad k=1,2,3$$

$$\text{also } F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\frac{\delta F^{ik}}{\delta x^k} = \begin{pmatrix} -\frac{E_1}{\partial x^0} - \frac{E_2}{\partial x^1} - \frac{E_3}{\partial x^2} \\ \frac{E_1}{\partial x^0} + \frac{H_3}{\partial x^1} - \frac{H_2}{\partial x^2} \\ \frac{E_2}{\partial x^0} - \frac{H_3}{\partial x^1} + \frac{H_1}{\partial x^2} \\ \frac{E_3}{\partial x^0} + \frac{H_2}{\partial x^1} - \frac{H_1}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{div} E \\ \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{H} - \text{rot} \vec{H} \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

inhomogen Maxwellgleichn.

$$\frac{\delta F^{ik}}{\delta x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

$$\frac{\delta F^{ik}}{\delta x^k} = \frac{\delta}{\delta x^k} \left( \frac{\partial A^k}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^k} \right) = -\frac{\delta^2 A^i}{\delta x^k \delta x^k} = -\square A^i$$

Da  $F^{ik}$  ein schlechter Tensor ist!

Behalten wir  $\frac{\delta F^{ik}}{\delta x^k \delta x^i} = 0$  und damit auch

$$\frac{\delta j^i}{\delta x^i} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

lokale Kontinuität:  $\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0$  Lorenzbedingung

also  $\square A = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$  ( $\square A = 0$  für freie Felder)

$$\square A^i = \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{1}{g^{kl}} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l}$$

d. Alembert Operator

Übersetzung in den dreidim. alten Formalismus:

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \quad \text{übersetzt sich } \frac{1}{c} \frac{d\phi}{dt} - \text{div} A = 0$$

und  $\square A = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$  heißt  $\square \phi = \frac{4\pi}{c} \rho$   
 $\square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$

haben folgende Funktionen  $L = -\frac{1}{16\pi} F_{ke} F_{le}$

$$T_{ik} = \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^j} - d^i L = -\frac{1}{16\pi} \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^j} + \frac{1}{16\pi} d^i L F_{ke} F_{le}$$

$$T_{ik} = -\frac{1}{16\pi} \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^j} + \frac{1}{16\pi} d^i L F_{ke} F_{le}$$

! ist noch nicht symmetrisch!

ableiten  $\frac{1}{16\pi} \frac{\partial L}{\partial x^i} F_{ke} = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial L}{\partial x^i} F_{ke}$  (was von der Form  $\frac{\partial L}{\partial x^i} F_{ke}$  ist)

$$T_{ik} = \frac{1}{16\pi} g^i F_{ke} F_{le} - \frac{1}{16\pi} g^i F_{ke} F_{le}$$

$$T_{ik} = \frac{1}{16\pi} g^i F_{ke} F_{le} - \frac{1}{16\pi} F_{ke} F_{le}$$

symmetrischer Tensor  
muss gilt  $T_{ik} = T_{ki} = 0$

$$= \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial x^j} = F_{le}$$

$$g^i_m \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial x^j} \right) = F_{le}$$

$$T_{ik} = \frac{1}{16\pi} \left( \frac{1}{4} d^i F_{ke} F_{le} - F_{ke} F_{le} \right) - \frac{1}{16\pi} \left( F_{ke} F_{le} - \frac{1}{4} d^i F_{ke} F_{le} \right)$$

$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^j} = \frac{1}{16\pi} d^j F_{ke} F_{le}$
$= -F_{le}$

mittlere

$$T_{ik} = \frac{1}{16\pi} \left( \frac{1}{4} d^i F_{ke} F_{le} - F_{ke} F_{le} \right) - \frac{1}{16\pi} \left( F_{ke} F_{le} - \frac{1}{4} d^i F_{ke} F_{le} \right)$$

gilt

$$-F_{le} = \frac{1}{16\pi} d^j F_{ke} F_{le}$$

maximaler Spannungstensor

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16\pi} F_{ke} F_{le} & \frac{1}{16\pi} d^j F_{ke} F_{le} \\ \frac{1}{16\pi} d^j F_{ke} F_{le} & \frac{1}{16\pi} F_{ke} F_{le} \end{pmatrix}$$

zum Diskussion von  $T_{ik}$

symmetrischer Spannungstensor

$$T_{ik} = \frac{1}{16\pi} \left( \frac{1}{4} d^i F_{ke} F_{le} - F_{ke} F_{le} \right) - \frac{1}{16\pi} \left( F_{ke} F_{le} - \frac{1}{4} d^i F_{ke} F_{le} \right)$$

$$T_{ik} = \frac{1}{16\pi} d^j F_{ke} F_{le}$$

$$T_{01} = \frac{1}{16\pi} (-F_{0e} F_{1e}) = E_2 \cdot H_3 - E_3 \cdot H_2$$

$$T_{02} = \frac{1}{16\pi} (-F_{0e} F_{2e})$$

$$T_{00} = \frac{1}{16\pi} (F_{0e} H^2) \cdot 2$$

Diskussion der mittlere:

$$T_{ik} = \frac{1}{16\pi} \left( \frac{1}{4} d^i F_{ke} F_{le} - F_{ke} F_{le} \right) - \frac{1}{16\pi} \left( F_{ke} F_{le} - \frac{1}{4} d^i F_{ke} F_{le} \right)$$

Ladungsverteilung:

$$\rho = 0 \text{ geiler}$$

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \rho dx = 0$$

Beziehung zur Erhaltung des Impulses  $\rho$

Will wir  $\rho$  durch  $\rho + \frac{d\rho}{dx}$  zeigen, bekommen wir im Wirkungsprinzip einen zusätzlichen Term  $\int \rho dx = \int \left( \rho + \frac{d\rho}{dx} \right) dx$  wegen Ladungserhaltung

Gauss: Integration über regionale Hypothese, Relationen mit dem Prozess

Integration des Energie Stroms:

$$-j^0 = \frac{dT^{0k}}{dx^k} = \frac{d}{dx^0} \left( \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) + \text{div } \vec{S}$$

$$-\oint S dt = \frac{d}{dt} \int \left( \frac{E^2 + B^2}{8\pi} + \epsilon_{kin} \right) dV$$

$$-\oint S dt = \frac{d}{dt} \int E_{feld} dV + \frac{d}{dt} \int \epsilon_{kin}$$

Energiefluss durch Hyperflächen

kinet. Änderung Energie der Felder

kin. Energieänderung der Teilchen

$\vec{S}$  Poyntingvektor  $\vec{E} \wedge \vec{B} \frac{c}{4\pi}$

$j^0$  Leistungsdichte  $-j \cdot \vec{E} = -\frac{d}{dt} \epsilon_{kin}$

kin. Energie dichte

Schiefsymm. Tensoren vom Rang 2 in pseudovekt. Notation

$F_{ik}$  helixtiger Tensor vom Typ (0,2)

$E_\alpha := F_{0\alpha}$   $\alpha=1,2,3$  "elektrisches Vektorfeld"

$H^1 = F_{23}$

$H^2 = F_{31}$

$H^3 = F_{12}$

"magnetisches Vektorfeld"

$$\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H^3 & -H^2 \\ -E_2 & -H^3 & 0 & H^1 \\ -E_3 & H^2 & -H^1 & 0 \end{pmatrix}$$

charakt. Polynom

$$P(\lambda) := \det(F_{ik} - \lambda g_{ik}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & \lambda & H^3 & -H^2 \\ -E_1 & -H^3 & \lambda & H^1 \\ -E_3 & H^2 & -H^1 & \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^4 + (|E|^2 - |H|^2)\lambda^2 + \langle E, H \rangle^2$$

$$F = F_{ij} dx^i dx^j = E_\alpha dx^0 dx^\alpha + H^1 dx^2 dx^3 + H^2 dx^3 dx^1 + H^3 dx^1 dx^2$$

Transformation von  $F_{ij}$  unter Lorentztrafos

$$\tilde{F}_{ik} = F_{ij} \frac{dx^j}{dx^k} \frac{dx^i}{dx^l}$$

$$x = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta & & \\ \sinh \eta & \cosh \eta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$B = \frac{v}{c} = \tanh \eta$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & & \\ \gamma \beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\tilde{F}_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & & \\ \gamma \beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H^3 & -H^2 \\ -E_2 & -H^3 & 0 & H^1 \\ -E_3 & H^2 & -H^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & & \\ \gamma \beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & & \\ \gamma \beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \gamma & E_2 \gamma & E_3 \gamma & E_3 \\ -E_1 \gamma & -E_2 \gamma & H^3 & -H^2 \\ -E_2 \gamma & -E_3 \gamma & 0 & H^1 \\ E_3 \gamma & H^2 \gamma & -E_3 \gamma & -H^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(E_1 - E_2 \beta) & \gamma(E_2 + H^3 \beta) & \gamma(E_3 - H^2 \beta) \\ & 0 & \gamma(E_2 \beta + H^3) & \gamma(E_3 \beta - H^2) \\ & & 0 & -H^1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{0\alpha} = -F_{\alpha 0}$$

$$F^{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$$

Metrische Identität

$$\begin{aligned} F &= E_\alpha dx^0 dx^\alpha + H^1 dx^2 dx^3 + H^2 dx^3 dx^1 + H^3 dx^1 dx^2 \\ *F &= -H^1 dx^0 dx^2 + E_1 dx^2 dx^3 + E_2 dx^3 dx^1 + E_3 dx^1 dx^2 \\ **F &= -F \end{aligned}$$

Inkludieren komplexe Struktur auf Schiefsymm. Rang 2 Tensoren

$$(a+bi)F := aF + b*F$$

erhalten so 3dim komplexen Raum  $\mathbb{C}^3$

schreiben jeweils

$$F = E + iH$$

$$z^\alpha = E_\alpha + iH^\alpha$$

$SO(1,3)$  agiert auf  $\mathbb{C}^3$  als Gruppe von komplexen Transformationen definiert quadr. Form welche von  $SO(1,3)$  erhalten wird.

$$(F \wedge (*F))_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} F_{ik} F^{kj}$$

$$(F \wedge F)_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{ij} F_{kl}$$

$$\langle F, F \rangle := -(F \wedge (*F)) + (F \wedge F)$$

$$= -|H|^2 + |E|^2 + 2i \langle E, H \rangle = \sum_{\alpha=1}^3 (z^\alpha)^2$$

nutzen hier  $O(3, \mathbb{C})$  welche diese Form erhält

Zur Tensoranalysis

Integration von Differentialformen

Integral vom ersten Typ

$f(z^1, \dots, z^k)$  auf Fläche  $x^i = x^i(z^1, \dots, z^k)$   
 über Region  $U$  auf Fläche

$$\int_U f(z^1, \dots, z^k) \sqrt{|g|} dz^1 \dots dz^k$$

$g_{ij}$  Metrik die auf Fläche induziert ist  
 $dz^1 \dots dz^k$  Volumenelement auf Fläche  
 Integral ist mit Riemannsche Geometrie verbunden.

Integral vom zweiten Typ

$T_{i_1 \dots i_k}$  in Schnittsymm. Tensor vom Rang  $k$  über Körper  $U$  d. Fläche  $x^i = x^i(z^1, \dots, z^k)$

$$\int_U T = \int_U \sum_{i_1, \dots, i_k} T_{i_1 \dots i_k} dz^1 \dots dz^k$$

$\sum_{i_1, \dots, i_k} T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \dots dx^{i_k}$   
 restringiert auf Fläche  $x^i(z^1, \dots, z^k)$   
 ist gegeben durch

$$\sum_{i_1, \dots, i_k} T_{i_1 \dots i_k} \left( \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^1} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial z^k} \right)$$

Bsp

$T_j$  covektiv  
 $\omega = T_j x^j$  assoz. Differentialform

$$\int_a^b T_j dz^j = \int_a^b T_j \dot{z}^j dt$$

Linienintegral vom 2. Typ  
 unabhängig von der Parametrisierung, wenn die Koordinatensystem!

$f(z)$  Skalarfunktion

$$\int_a^b f(z(t)) dt = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}^j dt$$

Integral vom 1. Typ

$T_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^1} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial z^k}$

Linienintegral unabhängig von der Parametrisierung:

$t = t(\tau)$

$$\int_a^b T_j \frac{\partial z^j}{\partial t} dt = \int_a^b T_j \frac{\partial z^j}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} dt$$

unabhängig von der Koordinatensystem

$\tilde{z}^j = z^j(\tau)$

$$\int_a^b T_j dx^j = \int_a^b \tilde{T}_k \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{z}^j} dx^j = \int_a^b \tilde{T}_k d\tilde{z}^k$$

$\tilde{T}_k(\tilde{z}) = T^k(\tilde{z}) \frac{\partial \tilde{z}^k}{\partial x^k}$

Integral vom 2. Typ ist immer unabhängig von Koordinaten Maps auf Fläche und auf  $n$ -dim Raum.

Im 3dim eukl. Raum reduziert sich das Integral vom zweiten Typ folgendermaßen zu einem Integral vom 1. Typ:

$$\iint_U T_{ij} dx^i dx^j = \iint_U \langle T, n \rangle \sqrt{|g|} dz^1 dz^2$$

Fläche  $x^i = x^i(z^1, z^2)$

wobei  $n = \frac{[\xi_1, \eta]}{|\xi_1, \eta|} = \frac{[\xi_1, \eta]}{\sqrt{|g|}}$

$\xi = \frac{\partial x^i}{\partial z^1}$  (Tangentenvektoren)  
 $\eta = \frac{\partial x^i}{\partial z^2}$

Differentialoperatoren

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$  Tensor (0,0)

grad  $f = \nabla_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$   $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$   
 zugleich Differentialform

allg.  $T_{i_1 \dots i_k}$   $(dT)_{i_1 \dots i_{k+1}} = \frac{\partial T_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^q} dx^q \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

kovarianter Gradient  $\nabla^i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} - g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$

$dx^i$  Basis für Quatraum  
 $dx^i_j = g^{ij} dx^j = e_j$   $e_i \cdot e_j = g^{ij} e_j \cdot e_j = g^{ij} \delta_{jj} = g^{ij}$   
 $dx^i(e_j) = \delta^i_j$

wenn wir nun  $\tilde{e}_i := e_i / \sqrt{|g_{ii}|}$  setzen

Bsp  $T_{ij}$  covektiv  
 $dT_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} dx^k$

vgl.  $A_i$  Potential d. Elektromagn. Felder  
 $F_{ij} = dA_{ij}$  Elektromagn. Feldtensor

Bilden des gradienten kann auf beliebige Tensoren  $T_{i_1 \dots i_p}$  erweitert werden: kovariante Differentiation mit  $\nabla_{i_1} \dots$

Die Basis  $\tilde{e}_i$  ist orthogonal bezüglich der gewöhnlichen Skalarprodukt.

deshalb sieht man z.B. in Kugelkoordinaten

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta$$

$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 \cos^2 \theta & \\ & & r^2 \end{pmatrix}$   $(r, \varphi, \theta)$



die  
Notation und  
die Divergenz  
eines Tensorkleters  
Laplace

$T_{i_1 \dots i_k}$  ein schief-symm. Tensor  
vom Typ  $(0, k)$

Definieren  $*T_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \sqrt{|g|} \epsilon_{i_1 \dots i_k} T_{i_1 \dots i_k}$

$*T_{i_1 \dots i_k}$  ist ein schief-symm. Tensor vom Typ  $(0, n-k)$

halten vorher die Operation d Gradteil  $d = \text{grad} = \nabla$

$\text{div} := x^{-1} d x = \delta$

$\text{rot} := *d$

$\Delta := x^{-1} d * d x$   
 $= \text{div grad}$

$\nabla$	$\text{grad} : T(0, k) \rightarrow T(0, k+1)$
$\delta$	$\text{div} : T(0, k) \rightarrow T(0, k-1)$
$\text{r}$	$\text{rot} : T(0, k) \rightarrow T(0, n-k-1)$
$\Delta$	$\Delta : T(0, k) \rightarrow T(0, k)$

vgl. rot für  
Vektoren im  $\mathbb{R}^3$   
gibt wieder Vektor

neue Schreibweise  
d. elektromagn. Felder.

$A_i$  Vektorpotential  
 $dA_{ij} = F_{ij}$  Feldtensor

Maxwellgl'n:  $dF = dF_{ijk} = ddA_{ijk} = 0$

$\delta F = \frac{4\pi}{c} j$

klar das zweifache  
kovariante Differentiation  
null ergibt.

$\frac{\delta F_{ij}}{\delta x^i} = \delta F$  vgl. S. 196...

der Laplaceoperator  
für Vektoren  $T^i$

$\Delta T_i = T_i \rightarrow \frac{dT_i}{dx^i} \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{|g|} \delta T \dots$

Die Differentialoperatoren  
im dreidim. Riemannschen  
Raum

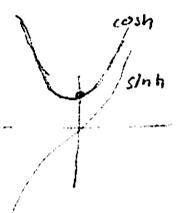
$\text{grad} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i}$

$\text{div} v = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^i} v^i$

$\text{rot} v = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x^i}$

$\Delta f = \text{div grad} f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j})$

Lorentztrafos



Poincarégruppe: Isometriegruppe von  $\mathbb{R}_s^4$

$\mathbb{R}_s^2$  zuerst.  $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

A welches  $g_{\mu\nu}$  invariant lässt, muss linear sein und  $A^T G A = G$  ( $a_i^j, a_j^i; g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ )  
 $\Rightarrow (\det A)^2 = 1 \quad \det A = \pm 1$

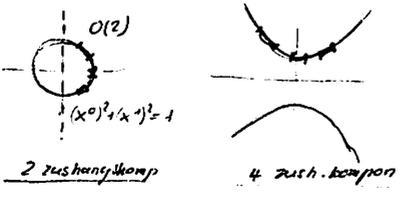
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} a^2 - c^2 = 1 \\ ab - cd = D \\ b^2 - d^2 = -1 \end{array} \right\} \quad \left( \frac{c}{a} \right) =: \beta \quad \left. \begin{array}{l} 1 - \beta^2 = \frac{1}{a^2} \\ b = \beta d \\ (\beta^2 - 1) \cdot d^2 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$   
 $d = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$   
 $b = \beta \cdot d$   
 $c = a \cdot \beta$

$A = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \pm \sinh \eta \\ \sinh \eta & \pm \cosh \eta \end{pmatrix} \quad \tanh \eta = \beta$

haben also 4 Typen

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$O(1,1)$  Gruppe der Isometrien von  $\mathbb{R}_s^2$  hat 4 Zusammenhangskomponenten



I und P ändern nicht die Richtung der Zeit

P Raumspiegelung  
 T Zeitspiegelung

$ct = ct' \cosh \eta + x' \sinh \eta$   
 $x' = ct' \sinh \eta + x'' \cosh \eta$

setzen  $x'' = 0$

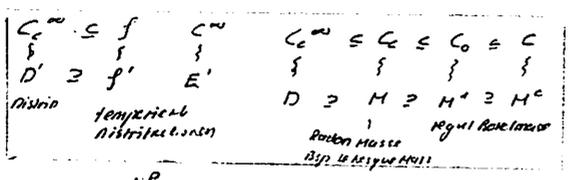
$ct = ct' \cosh \eta$   
 $x' = ct' \sinh \eta \quad \frac{x'}{ct} = \tanh \eta \quad \frac{v}{c} = \tanh \eta$

und  $\sinh \eta = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

also  $t = (t' + \frac{v}{c^2} x')$   
 $x' = (x'' + vt')$

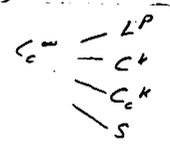
$dt = dt' + \frac{v}{c^2} dx'$   
 $dx' = (dx'' + v dt')$   
 $w = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx'' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx''} = \frac{v + w'}{1 + \frac{v w'}{c^2}}$

Distributionen



$U \subseteq V$  Banachräume  $\infty$  dimensional  
 $\Rightarrow V^* \subseteq U^*$

$f: V \rightarrow \mathbb{R}$  linear beschränkt  $f \in V^*$   
 $f \in U \rightarrow \mathbb{R}$  linear, beschränkt  $\Rightarrow f \in U^*$



alles dichte Injektionen in Räume, deren Dualräume als Unterräume von  $D'$  angesehen werden können.

Differentialoperatoren:  $D: U \rightarrow C^k, k_n \quad \frac{d}{dx^{k_1}} \dots \frac{d}{dx^{k_n}}$   
 $C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$   
 $a^{k_1, \dots, k_n} \in C^\infty$  oder  $L^\infty$

Magnetostatik

$\vec{H}$  Feld definiert durch Kraft auf Probemagneten  
 $\vec{M}$  Magnetisierung des Stoffes

$\text{rot } \vec{H} = 0$   
 $\text{div } \vec{H} = -4\pi \text{ div } \vec{M}$   
 $\vec{B} := \vec{H} + 4\pi \vec{M}$  erfüllt Maxwellgleichungen wobei  $\text{rot } \vec{H}$  als wirkliche Strom eingerechnet werden muss.

$\text{rot } \vec{B} = 4\pi \text{ rot } \vec{M} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

Stetigkeit  $\vec{D}$  Feld definiert durch Kraft auf Probemagneten  
 $\vec{P}$  Polarisierung d. Stoffes

$\text{div } \vec{D} = 0$   
 $\text{rot } \vec{D} = 0$   
 $\vec{E} = \vec{D} - 4\pi \vec{P}$  erfüllt Maxwellgleichungen wobei  $\text{div } \vec{P}$  als virtuelle Ladung eingerechnet werden muss.

$\text{div } \vec{E} = 4\pi \text{ div } \vec{P}$

Energiesatz  
 aus Maxwellgleichn.

haben  $\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = \frac{1}{c} F^{ik} j_k = -f^i$

$f^0 = \frac{1}{c} \vec{i} \cdot \vec{E} \frac{\partial T^{0k}}{\partial x^k} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) + \text{div} \frac{1}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{B}$

also  $-\frac{1}{c} \vec{i} \cdot \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) + \text{div} \frac{1}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{B}$

Herleitung aus zweidim. Maxwellgleichungen:

$\text{div} \frac{1}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{B})$   
 $= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{E} - \vec{E} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

$\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\nabla \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\nabla \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a}$

also  $\text{div} \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = -\vec{E} \cdot \vec{j} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + B^2)$

das freie Feld

ebene Wellen:  $\Delta f = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0$  also  $\frac{d}{dt} \frac{d}{dx} f = 0$   
 $\Rightarrow f = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$   
 $f = (t - \frac{x}{c}) \quad \eta = (t + \frac{x}{c}) \quad t = \frac{1}{2}(\eta + f) \quad x = \frac{c}{2}(\eta - f)$

Extremung  $\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial t^2} = 0$  also  $\frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const}$  setzen  $A_x = 0$  somit statische elektrodynam. Feld  
 Wellenpotential kann senkrecht zur Ausbreitungsrichtung gewählt werden.

$E = \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \quad B = \text{rot } A$

$\text{div } \vec{E} = (\vec{e} \cdot \vec{j})' = 0$  setzen  $\vec{e} \cdot \vec{j} = 0$

$-\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} = \vec{e} (\vec{e} \cdot \vec{j})'$

$\vec{B} = \vec{e} \wedge \vec{j} = \vec{e} \wedge \vec{E}$

$\vec{E} = \vec{f}(\vec{e} \cdot \vec{x} - ct)$   
 $\vec{B} = \vec{e} \wedge \vec{E}$

ebene ebene Wellen  
 monochromatisch  
 wellen

vgl. 8.11

$\vec{f}(r) = \vec{A} e^{i\omega t - ikx}$

$\vec{E}(r) = \vec{f} e^{i(kx - \omega t)}$   
 $\vec{B}(r) = \vec{e} \wedge \vec{A} e^{i(kx - \omega t)}$

$\vec{r} = \vec{e} \cdot \vec{x} - ct$   
 $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}$   
 Wellenvektor

$e^{i\omega t/c} = e^{i\omega(\vec{e} \cdot \vec{x} - ct)/c}$   
 $= e^{i(\frac{\omega}{c} \vec{e} \cdot \vec{x} - \omega t)}$   
 $= e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$

Physik. Folgerung: Realteil

$\vec{A} = \vec{A}_1 + i\vec{A}_2$  komplexe Amplituden mit  $\vec{A} \cdot \vec{e} = 0$

$\vec{A}_1 \perp \vec{A}_2$  lineare Polarisation

$|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2|$  zirkulare Polarisation

ergibt  $\vec{A}_2 = \pm \vec{e} \wedge \vec{A}_1$  rechts zirkulare Polarisation links

$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \end{pmatrix}$

Basis in  $\mathbb{C}^2$ : a)  $\vec{E}_1 = \vec{e}_1$   
 für  $\vec{A}$   $\vec{E}_2 = \vec{e}_2$   
 $\vec{A} = \vec{e} \wedge \vec{E}_1$

naturalerweise  $\vec{A}_2$  auf Notation von  $\vec{e}_3$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  Basis im  $\mathbb{R}^3$

b)  $\vec{E}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 \pm \vec{e}_2 i)$

Zerlegung in eine rechte und eine linke polaris. wellen ist sinnlos!

$\vec{E}_\pm = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t} \vec{E}_\pm$

Impuls, Kraft  
 Drehimpuls des  
 elektromagn.  
 Feldes

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi} (E^2 + B^2) & \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \\ \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{B}) & \frac{1}{4\pi} (-E_i E_k - H_i H_k + \frac{1}{2} \delta_{ik} (E^2 + B^2)) \end{pmatrix}$$

Energie, Impuls Tensor

$J = \frac{c}{8\pi} (E^2 + B^2)$  Intensität  
 $S = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{B}$  Poynting Vektor

$\frac{1}{c} T^{i0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8\pi c} (E^2 + B^2) \\ \frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \end{pmatrix} = p^i$  Impulsdichte  $p = \frac{1}{c^2} \frac{dI}{dt}$

$P^i = \frac{1}{c} \int T^{i0} dS_0$  Impuls  $= \frac{1}{c} \int T^{ik} dS_k$

$L = \frac{1}{c} \int \vec{j} \cdot \vec{E}$  Leistungsdichte  
 $F = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{B}$  Kraftdichte

$-\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} \\ \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \wedge \vec{B} \end{pmatrix} = f^i$  Kraftdichte  $f = \begin{pmatrix} L \\ F \end{pmatrix}$

$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = \frac{1}{c} F^{ik} \cdot j^k$

$\frac{\partial P^i}{\partial t} = f^i$

$\frac{d}{dt} (\frac{1}{4\pi} (E^2 + B^2)) = \frac{d}{dt} (\frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}))$   
 $\frac{d}{dt} \vec{E} = c \text{rot} \vec{B} + 4\pi \vec{j}$   
 $\frac{d}{dt} \vec{B} = -c \text{rot} \vec{E}$

$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = 2c \text{rot} \vec{B} \cdot \vec{E} + 4\pi \vec{j} \cdot \vec{E} - 2c \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{B}$   
 $\text{rot} \vec{B} \cdot \vec{E} - \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{B} = (\nabla \wedge \vec{B}) \cdot \vec{E} - (\nabla \wedge \vec{E}) \cdot \vec{B} = \text{rot} \vec{E} \wedge \vec{B}$

$\frac{d}{dt} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{d}{dt} \vec{E} \wedge \vec{B} + \vec{E} \wedge \frac{d}{dt} \vec{B}$   
 $= (c \text{rot} \vec{B} + 4\pi \vec{j}) \wedge \vec{B} - \vec{E} \wedge (c \text{rot} \vec{E})$   
 $= 4\pi \vec{j} \wedge \vec{B} + c (\text{rot} \vec{B} \wedge \vec{B} - \vec{E} \wedge \text{rot} \vec{E})$

$Q = \frac{1}{c} \int j^i dS_i$   
 $x_0 = \text{const}$

Maxwell

$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$   
 $\rho^{iklm} \frac{\partial F_{em}}{\partial x^k} = 0$

Wahrheit

$\frac{d j^i}{d x^i} = 0$

$M^{ik} := \int x^i dP^k - x^k dP^i = \frac{1}{c} \int_{x_0 = \text{const}} x^i T^{k0} - x^k T^{i0} dS_0$  Drehimpuls

$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = -f^i$

$i=0 \quad \frac{\partial T^{0k}}{\partial x^k} = \frac{d}{dt} \frac{1}{8\pi c} (E^2 + B^2) + \frac{d}{dx^k} \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{B})^k = -\frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}$

also: Energieerf.:  $\frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{d}{dt} \frac{1}{8\pi c} (E^2 + B^2) + \text{div} \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{B})$

$i=1,2,3 \quad \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = -f^i$

Integrieren über  $\mathbb{R}^3$

$\int_V \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = \int_V \frac{d}{dt} \frac{1}{c} \vec{S} + \frac{d}{dx^k} T^{ik} = - \int_V \rho \vec{E}_i + \frac{1}{c} (\vec{j} \wedge \vec{B})_i$

$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\vec{S}_i}{c^2} + \int_V \vec{T}^{ik} dS_k + \int_V \vec{f}_i = 0$

Intensitätsänderung

Impulsfluss durch Rand

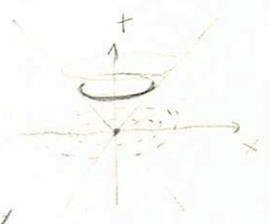
Impulsänderung

mechanische Drehimpuls

$L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$

$\frac{dp^\nu}{dt} = F^\nu$  4er Kraft

$\frac{dL^{\mu\nu}}{dt} = \frac{d}{dt} (x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu) + x^\mu F^\nu - x^\nu F^\mu = M^{\mu\nu}$  Drehmoment



Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes!

$\Theta^{\mu\nu\sigma} := x^\mu T^{\nu\sigma} - x^\nu T^{\mu\sigma}$  Drehimpulstensor

$\Theta_\sigma^{\mu\nu} = x^\mu T_\sigma^\nu - x^\nu T_\sigma^\mu = x^\mu f_\sigma^\nu - x^\nu f_\sigma^\mu$

$\Theta_\sigma^{\mu\nu} = x^\mu f_\sigma^\nu - x^\nu f_\sigma^\mu$

Drehmomentdichte  $u_{di}$

Integrieren über  $\mathbb{R}^3$

$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\Theta^{\mu\nu\sigma}}{c} d^3x + \int_V \Theta^{\mu\nu\sigma} dS_\sigma + \int_V (x^\mu f_\sigma^\nu - x^\nu f_\sigma^\mu) d^3x$   
 sein Drehmomentdichte

Drehimpulsstrom durch Rand

= 0 für freies Feld

Drehimpuls von Feldern und Teilchen

$$\frac{d}{dt} L^{nr} = \frac{d}{dt} \int_{x_0=const} \frac{1}{c} \Theta^{nr0} d^3x = 0 \Rightarrow L^{nr} \text{ ist zeitlich konstant.}$$

Invariant unter homogenen Lorentztransf.

Raumkomponenten:  $L^{ik} = \frac{1}{c} \int_{x_0=const} d^3x \Theta^{ik0} = \frac{1}{c} \int_{x_0=const} x^i T^{k0} - x^k T^{i0} = \int_{x_0=const} x^i \frac{S^k}{c^2} - x^k \frac{S^i}{c^2}$

mit Pseudovektoren  $\vec{L} = \int \vec{x} \wedge \vec{S} = \text{const}$

gemischte Komponenten:  $L^{0k} = \frac{1}{c} \int_{x_0=const} d^3x \Theta^{0k0} = \frac{1}{c} \int_{x_0=const} d^3x (t \cdot T^{k0} - x^k T^{00})$

$$= \frac{1}{c} \int_{x_0=const} d^3x \frac{S^k}{c^2} - \int_{x_0=const} x^k T^{00} = \text{const}$$

$\int T^{00} = P^0 \quad \frac{1}{T^{00}}$

$$c t \frac{\vec{P}}{P_0} = \frac{\int x^k T^{00}}{\int T^{00}} + \text{const}$$

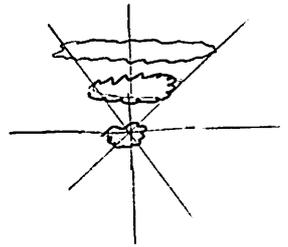
Schwerpunkt des Feldes bezüglich Energiendichte

Die Ausbreitung freier Felder

$$u_i(\vec{x}, 0) \quad \square u = 0$$

$$\frac{\partial u_i(\vec{x}, 0)}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad u_i(\vec{x}, t) \quad \text{Lösung der Wellengleichung}$$

vorgegeben



Kugelsymm. Lösung:  $u(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} f(r, t)$   
mit  $f(0, t) = 0 \quad t \in [0, \infty)$

$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} f(r, t) = \frac{1}{r} (g(ct-r) + h(ct+r))$  ist Lösung der Gleichung  $\square u = 0$

in Kugelkoordinaten  $\square = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$

$$\square u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r, t) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} (g(ct-r) + h(ct+r))$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} f(r, t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-h(ct+r) + r h'(ct+r))$$

$$= -\frac{1}{r^2} (h(ct+r) + h'(ct+r)r) + \frac{1}{r} h''(ct+r) = \frac{1}{r^2} h''(ct+r)$$

$$f(0, t) = g(ct) + h(ct) = 0$$

$$\Rightarrow g = -h$$

$$u(r, t) = \frac{1}{r} (g(ct-r) - g(ct+r))$$

$$D(\vec{x}, t) := \frac{1}{4\pi r} [\delta(ct-r) - \delta(ct+r)]$$

ist Lösung als Distribution und es gilt:

$$\begin{aligned} D(\vec{x}, 0) &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}(\vec{x}, 0) &= \delta(\vec{x}) \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}(\vec{x}, 0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} D(\vec{x}, t) f(\vec{x}) d^3x = \int_{K(ct)} f(\vec{x}) d^3x = K(ct)$$

Kugel mit Radius ct

$$= \int_{K_r} \frac{ct}{4\pi} f(\vec{x}) d^2\vec{e}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} D(\vec{x}, t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \int_{K_r} f(\vec{x}) d^2\vec{e} = f(0)$$

Lösung des Anfangswertproblems

$$u(\vec{x}, t) = \int d^3y \frac{1}{c} \frac{\partial D(\vec{x}-\vec{y}, t)}{\partial t} u(\vec{y}, 0)$$

$$+ \int d^3y \frac{1}{c} D(\vec{x}-\vec{y}, t) \frac{\partial u(\vec{y}, 0)}{\partial t}$$

$$\square u = 0 \quad u(\vec{x}, 0) = u(\vec{x}, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}, 0) = \frac{\partial u(\vec{x}, 0)}{\partial t}$$

direkter Beweis ohne Distributionen:

Lemma  $\int d^3e \Delta f(r\vec{e}) = \Delta \int d^3e f(r\vec{e})$

Laplaceoperat. über Ausw. mit Sphären- u. Kugelkoordin.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta f(\vec{x}) d^3x = r^2 \int_{\mathbb{S}^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r\vec{e}) d\Omega \quad \Big| \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_{\mathbb{S}^2} f(r\vec{e}) d\Omega = \int_{\mathbb{S}^2} \Delta f(\vec{x}) d^3x$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta f(\vec{x}) d^3x = r^2 \int_{\mathbb{S}^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Delta f(r\vec{e}) d\Omega$$

$$u(\vec{x}, t) = \int d^3y \frac{1}{c} D(\vec{x}-\vec{y}, t) \frac{\partial u(\vec{y}, 0)}{\partial t} = \int_{\mathbb{S}^2} \frac{ct}{4\pi} d\vec{e} \frac{1}{c} \frac{\partial u(\vec{x}-ct\vec{e})}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{S}^2} \frac{ct}{4\pi} d\vec{e} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u(\vec{x}-ct\vec{e})}{\partial t} = 0$$

$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{S}^2} \Delta f(\vec{x}) d^3x = \int_{\mathbb{S}^2} \Delta f(\vec{x}) d^3x$

Erzeugung elektromagn. Felder

Maxwell  $\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$  erhalten aus

$\frac{\partial F^{i0}}{\partial x^0} = -\frac{4\pi}{c} j^i$  und  $\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0$   
 (Maxwell) (Lorenzformung)  
 und  $\square = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_i}$

Green'sche Funktion  $\square D(x) = \frac{1}{4\pi r} \delta(x^0 - r)$   
 $\square D(x) = \delta(x)$

Fourier

$(\Delta + k^2) G_\pm(k, \gamma) = \delta(\gamma)$   
 $\Rightarrow G_\pm = \frac{1}{4\pi i} e^{\pm ikr}$

$\Gamma \square D(x) f := \int d^4x \square D(x) \square f(x) = f(0)$

$\int d^4x \square D(x) \square f(x) = \int d^4x \frac{1}{4\pi r} \delta(x^0 - r) \square f(x)$   
 $= \int d^3x \int dr \delta(x^0 - r) \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^0^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \frac{r}{4\pi} \int d^3x' f(x^0, r, \vec{x}')$   
 $= \int dr [g_{11}(r, r) - g_{22}(r, r)] = g_{12}(0, 0) - g_{12}(0, 0) = f(0)$   
 $\frac{d}{dr} [g_{11}(r, r) - g_{22}(r, r)] = \frac{d}{dr} [g_{11}(r, r) - g_{22}(r, r)]$

Retardiertes Potential

also ist  $A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4y \square D(x-y) j^\mu(y) = \int d^4y \frac{\delta(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} j^\mu(y) = \int d^3y \frac{j^\mu(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$

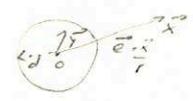
nehmen  $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} \int d^4y \square D(x-y) \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\nu}(y) = 0$   
 (kontin. = 0)

integrieren über Hyperefläche  $x_0 = ct \quad \vec{x} - \vec{y} = 0$

$A^\mu(\vec{x}, t) = \int d^3x \frac{j^\mu(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \Rightarrow$   
 $\varphi(\vec{x}, t) = \int d^3x \frac{\rho(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$   
 $\vec{A}(\vec{x}, t) = \int d^3x \frac{\vec{j}(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$

Ausstrahlung elektromagn. Felder

Ladung u strom in Innern d. Kugel  $\neq 0$   
 Es kommt zur Ausstrahlung freier Felder, da  $(\vec{E}, \vec{B})$  nur um  $\frac{1}{r}$  abnehmen  
 im gegensatz zum statischen fall:  $\frac{1}{r^2}$



$|\vec{x} - \vec{y}| = r - \vec{e}_r \cdot \vec{y} + O(\frac{y^2}{r})$   
 $|\vec{x} - \vec{y}| = r - \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t} + O(\frac{y^2}{r})$

Nur  $O(\frac{y^2}{r})$  im Zähler von  $A^\mu(\vec{x}, t) = \int d^3y \frac{j^\mu(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$  vernachlässigen, falls zeitliche Änderung in Zeit  $\frac{d^2}{dt^2}$  klein ist:  $j^\mu(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}) = j^\mu(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{y}}{c} + O(\frac{d^2}{r}))$

im harmonischen fall heisst das:  $\frac{d^2}{dt^2} \ll \frac{1}{\omega}$   $\omega$  Frequenz  $\frac{1}{\omega} = T$  Schwingzeit  
 $\frac{2\pi r c^2}{r} \ll \lambda \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  Wellenlänge

Falls  $r \gg d$  } wellenzone der strahlung  
 $r \gg \frac{2\pi d^2}{\lambda}$  }  
 erhalten wir in Näherung  $A^\mu(\vec{x}, t) = \int d^3y \frac{j^\mu(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{y}}{c})}{r}$   
 für die Berechnung der  $\frac{1}{r}$  gl. abfelder.

$\frac{1}{r}$  gl. abfelder Berechnung S. 282 Landau

also  $\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} \int d^3y \rho(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{y}}{c})$   
 $\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} \int d^3y \vec{e}(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{y}}{c})$

$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$   
 $\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$   
 $\vec{B} = -\frac{1}{c} \vec{e}_r \wedge \dot{\vec{A}}$   
 $\vec{E} = -\vec{e}_r \wedge \dot{\vec{B}} = \frac{1}{c} \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_r \wedge \ddot{\vec{A}})$

$\Gamma \vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r} \text{rot } \vec{A} = \left( \vec{A} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \dot{\vec{A}} \frac{\partial}{\partial r} \right) = -\frac{1}{c} \vec{e}_r \wedge \ddot{\vec{A}}$   
 vernachlässigt werden Terme  $\frac{1}{r^2}$   
 $\vec{E} = -\vec{e}_r \wedge \dot{\vec{B}}$

weil  $d \ll \lambda$  (zeitliche Änderung von  $\vec{y}$  klein in der Zeit  $\frac{d}{c}$ )

Elektrische und magnetische Dipolstrahlung

Betrachten Fall, wo nur kleine zeitliche Änderungen von  $\vec{r}$  in der Zeit  $\frac{d}{c}$  vorkommen.

$$\vec{r}(\vec{y}, t - \frac{r}{c}, \frac{\vec{e}_y}{c}) = \vec{r}(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) + \underbrace{\frac{\vec{e}_y}{c} \frac{d\vec{r}}{dt}(\vec{y}, t - \frac{r}{c})}_{\text{klein}} + \dots$$

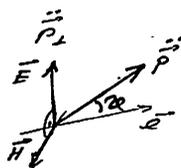
1. Term:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{rc} \int d^3y \vec{r}(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) = \frac{\vec{P}(t - \frac{r}{c})}{rc} \quad \text{wobei } P(t) = \int d^3y \rho(\vec{y}, t) \vec{y}$$

elektrisches Dipolmoment

$$\vec{P}(t) = \int d^3y \rho(\vec{y}, t) \vec{y} - \rho(\vec{y}, t) \vec{y} = \int \vec{r}(\vec{y}, t) d^3y$$

0 da  $\rho$  nicht mehr von  $t$  abhängig



Elektrische Dipolstrahlung

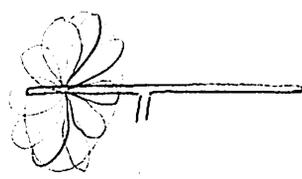
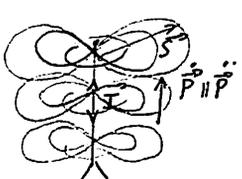
also  $\vec{E} = \frac{1}{c} (e_1 (e_1 \frac{\vec{P}(t - \frac{r}{c})}{rc}) = -\frac{1}{c^2 r} \ddot{\vec{P}}_{\perp}$   
 $\vec{B} = \vec{e}_1 \wedge \vec{E}$

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 \vec{e} = \frac{1}{4\pi r^2 c^3} \ddot{\vec{P}}^2 \sin^2 \vartheta \vec{e}$

Energiekechwindigkeit

Anwendung:

Antenne:



Die Intensität, die pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie:

$$I = \int_{\text{Kl.}} \vec{S} \cdot d\vec{s}_i = \frac{\ddot{\vec{P}}^2}{4\pi c^3} \int \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi d\vartheta d\varphi d\varphi = 2\pi \int \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \frac{\ddot{\vec{P}}^2}{c^3} = \frac{\ddot{\vec{P}}^2}{3c^3}$$

$\vec{P} = \vec{P}(t - \frac{r}{c})$

2. Form

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{rc} \int d^3y \frac{\vec{e}_y}{c} \frac{\partial \vec{I}}{\partial t}(\vec{y}, t - \frac{r}{c})$$

definieren:  $\vec{m}(t) = \frac{1}{2c} \int d^3y \vec{y} \wedge \vec{r}(\vec{y}, t)$   $m_{rs} = \frac{1}{2c} \int d^3y (y_r y_s - y_s y_r) = -m_{sr}$

magn. Dipol  $\vec{m}_{rs} = \frac{1}{2c} \int d^3y (y_r \frac{dj_s}{dt} - y_s \frac{dj_r}{dt})$

abhl. Quasimom.  $\vec{T}_{rs} := \frac{1}{2c} \int d^3y (y_r \frac{dj_s}{dt} + y_s \frac{dj_r}{dt})$

$\frac{1}{2} \int d^3y y_r \frac{dj_s}{dt} = m_{rs} + T_{rs}$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{cr} \vec{e}_1 \vec{m}^{\ddot{}}(t - \frac{r}{c}) \quad \text{magn. Dipolstrahlung}$$

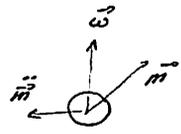
Magnetische Dipolstrahlung

$\vec{B} = \frac{1}{c^2 r} \vec{e}_1 \wedge (\vec{e}_1 \wedge \vec{m}^{\ddot{}})$   
 $\vec{E} = \frac{1}{c^2 r} \vec{e}_1 \wedge \vec{m}^{\ddot{}}$

$$(\vec{e}_1 \wedge \vec{m}^{\ddot{}}) = e_2 m_3 - e_3 m_2 = e_2 m_{12} - e_3 m_{21} = e_2 (y_1 i_2 - y_2 i_1) - e_3 (y_3 i_1 - y_1 i_3) = -(e_2 y_1 + e_3 y_3) i_1 + (e_2 y_1 i_2 + e_3 y_1 i_3) - e_3 y_2 i_3$$

Anwendung:

Pulsar



irrotational  
multivektor  
dies

Mittelung d. Felder  $\vec{f}(\vec{x}, t) = \int d^3y g(\vec{x}-\vec{y}') f(\vec{y}', t')$   
 $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x^k} \Rightarrow$  Maxwellgleich. für Mittelungsfelder gelten

$\int g(\vec{x}) d^3x = 1$   $g(\vec{x}) = \text{const}$   
 (für  $\vec{x}$  überall)

$\vec{f}(\vec{x}, t) = \int g(\vec{x}-\vec{\xi}) f(\vec{\xi}, t)$   
 $\vec{f}(\vec{x}, t) = \int g(\vec{x}-\vec{\xi}) \vec{f}(\vec{\xi}, t)$

$\vec{f} \equiv \rho_e - \text{div} \vec{P}$  entwickeln nach  $\vec{f}$   
 $= \underbrace{g(\vec{x}) \int d^3\xi \rho(\xi, t)}_{\rho_e} - \text{div} \underbrace{g(\vec{x}) \int d^3\xi \vec{f} \cdot \rho(\xi, t)}_{\vec{P}} + \dots$   
 $\vec{c}_m = \underbrace{g(\vec{x}) \int d^3\xi \vec{v}_m(\xi, t)}_{\vec{f}} - \text{div} \underbrace{g(\vec{x}) \int d^3\xi \xi \cdot \vec{v}_m(\xi, t)}_{c \cdot 101 H}$

$\vec{P} = \int d^3\xi \vec{f} \rho(\xi, t)$   
 $\rho = \int d^3\xi \rho(\xi, t)$   
 $\vec{f} = \int d^3\xi \vec{f}(\xi, t)$   
 $\vec{H} = \frac{1}{2c} \int d^3\xi \vec{f} \cdot \vec{v}$

$\vec{f} = \rho_e - \text{div} \vec{P}$   
 $\vec{f} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + c \cdot 101 H$

homog. Maxwellgl.  $\text{div} \vec{D} = c \rightarrow$  unverändert  
 $101 \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$   
 inhomog. Maxwellgl.  $\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho - 4\pi(\rho_0 - \text{div} \vec{P})$   
 $101 \vec{B} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 4\pi \vec{c} = 4\pi \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + 101 H + \vec{c} \right)$   
 $\vec{D} := \vec{E} + 4\pi \vec{P} \Rightarrow \text{div} \vec{D} = 4\pi \rho_e$   
 $\vec{H} := \vec{B} - 4\pi \vec{H} \Rightarrow 101 \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 4\pi \vec{c}$

$F^{jk} = \begin{pmatrix} 0 & -F_1 & -F_2 & -E_3 \\ 0 & B_3 & -B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\pi \begin{pmatrix} 0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ 0 & 0 & -M_3 & +M_2 \\ 0 & 0 & 0 & -M_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

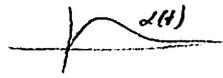
Statische Felder

isotrope Medien  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$   $\vec{H} = \sigma \cdot \vec{E}$   
 $\vec{H} = \mu \cdot \vec{B}$

nicht isotrope Medien  $\epsilon, \mu, \sigma$  Tensoren

rasch veränd. Felder

$\rightarrow$  Dispersion  $\vec{P}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau-t) \vec{E}(\tau) d\tau$   
Polarisierbarkeit - Stossantwort dann für  $\vec{E}(t) \propto \delta(t) \vec{E}$  erhalten  $\vec{P}(t) = \frac{1}{2\pi} \vec{E} \cdot \alpha(t)$



Fouriertrajo:

$\vec{P}(\omega) = \vec{\alpha}(\omega) \cdot \vec{E}(\omega)$

also für  $\vec{E}(t) = \vec{E} e^{-i\omega t}$  ist  $\vec{P}(t) = \vec{\alpha}(\omega) \cdot \vec{E} e^{-i\omega t}$

$\vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$   $\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi \vec{\alpha}(\omega)$  nicht mehr unbedingt reell  
 statische Felder:  $\epsilon(0) = 1 + 4\pi \vec{\alpha}(0) = 1 + 2 \int dt \alpha(t)$

Energieerf.:

$\frac{d}{dt} \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{B}) + \text{div} \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{B}) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$

wird erfüllt durch

$\frac{d}{dt} \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) + \text{div} \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{H}) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$

haben wir  
 mehr Seligheitsbeding. von

$\vec{B}_\perp$  und  $\vec{E}_\parallel$   
 $\vec{D}_\perp$  und  $\vec{H}_\parallel$   
 $\vec{S}_\perp = \vec{E}_\parallel \wedge \vec{H}_\parallel$  stetig

nach: Reflexion u. Brechung  
 weiter unten

Zur Lorentztransf.

1905 Lorentztransf. von Poincaré als Symmetrie der Maxwellgleichungen entdeckt.

relativ. Mechanik

Erhalte  $u^\mu u_\mu = c^2$   
 $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$

$\frac{d p^\mu}{d \tau} = -\frac{e}{mc} F^{\mu\nu} p_\nu$

$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{(c, \vec{v})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  falls  $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$   
 $p^\mu = m u^\mu = \frac{(mc, m\vec{v})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$\frac{d}{dt} \frac{m^2 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = e \vec{E} \cdot \vec{v}$  Leistungsgleichung

$\frac{d}{dt} \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \wedge \vec{B}$  Lorentzkraft

$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = -m^2 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e \varphi - \frac{e}{c} \vec{v} \wedge \vec{A} = -(mc^2 + \frac{e}{c} (\vec{v} \wedge \vec{A})) \frac{d\tau}{dt}$

Maxwellischer Spannungstensor

$T_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{80} (E^2 + B^2) & \dots & \frac{1}{4\pi} E_i B_j \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{4\pi} E_i B_j & \dots & \dots \end{pmatrix}$

$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = \frac{1}{c} F^{ik} j_k = -f^i$  räumliche Komponenten:  $\frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} = -f^i$

integrieren über Volumen V  $\int \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} = -F^i$

$\int \sigma^{ik} dS_k = -F^i$

Interpretation: für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  fallen  $\vec{E}, \vec{B}$  im skalaren Fall ab wie  $|\vec{x}|^{-1}$   $|\vec{x}|^{-2}$   
 $\sigma^{ik} \sim |\vec{x}|^{-4}$   $|\vec{x}|^{-6}$

d.h.  $\int \sigma^{ik} dS_k \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0 \rightarrow$  Gesamtkraft einer Ladung und Stromverteilung auf sich selbst geht nicht auf.

von invarianten  $F_{ik}$  unter  $\Lambda$

$F^2, B^2$   
 $E \cdot B$  sind einige Invarianten unter Lorentztr.

Betrachten  $F_{ik}$   $F_{ik} F^{ik}$  und  $\epsilon_{iklm} F_{ik} F_{lm}$  sind invariant  
 $H^2, E^2$   $E \cdot H$  (Pseudoskalar)

heißt: Orthogonalität und Betragsgleichheit wird erhalten.

$F^2 = E^2 - H^2$  Lorentzinvar. längs x Achse

$\begin{pmatrix} F_x^i \\ F_y^i \\ F_z^i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x^i \\ F_y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x^i \\ F_z^i \end{pmatrix}$

Gruppe der rein komplexen Drehungen ist isomorph  $SO(3)$  und dort nutzen wir nur Invarianten  $F^2 = E^2 - H^2 + 2i E \cdot H$

$F^2 \neq 0 \rightarrow F$  lässt sich in beliebiger Form  $\vec{n}$  drücken  $\vec{n}$  Einheitsvektor  
 Speziell  $\vec{n}$  reell d.h.  $F = (E + iH) \wedge \vec{E}, \vec{H}$  parallel

Ulysses d. d. d. d. d.

1960 Matrix  $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \dots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$  invariant

hängen Problem ins komplexe

$\begin{matrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$  Basis im  $\mathbb{R}^4 \sim \begin{matrix} \tilde{e}_0 \\ \tilde{e}_1 = ie_1 \\ \tilde{e}_2 = ie_2 \\ \tilde{e}_3 = ie_3 \end{matrix}$  Basis im  $\mathbb{R}^4$  Basiswechsel  $u^\mu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & i & & \\ & & i & \\ & & & i \end{pmatrix} \cdot U$

$\tilde{e}_k = u^\mu_k e_\mu$

neue Metrik  $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{ij} u^\mu_i u^\nu_j = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$  gewöhnliche euklidische Metrik

neue Gruppe:  $O(4)$

$R_2 \in SO(4)$   $R_4 U$

$\mathbb{R}_3^1 \xrightarrow{L} \mathbb{R}_3^1$   
 $U \downarrow \quad \quad \downarrow U$   
 $\mathbb{R}_4 \xrightarrow{R} \mathbb{R}_4$

$L_1 = U^{-1} R_1 U$   
 $L_2 = U^{-1} R_2 U$

$L_1 L_2^{-1} = U^{-1} R_1 R_2^{-1} U$

hat Determinante 1 falls  $R_1, R_2$  in der gleichen Drehkomp. und ist dazu nicht in Lorentzgruppe.

$L = U^{-1} R U$   
 $L = U R U^{-1}$

d.h. die Lorentzgruppe besteht aus 4 Zush.-Komponenten die (isomorph)  $SO(4)$  sind.

(andere Sicht:  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_0 - ix_1 \\ -x_1 + ix_2 & x_0 - ix_2 \end{pmatrix} = x_0 \cdot \delta_0 + x_1 \cdot \delta_1 + x_2 \cdot \delta_2 + x_3 \cdot \delta_3$   
 mit Determinante  $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

Diese Matrizen haben die Form  $x_0 \mathbb{1} + \mathbf{a}$   $\mathbf{a} \in \mathfrak{su}(2)$  bilden Gruppe  $L$ .  
 und unitäre Matrizen  $SU(2)$  operieren auf  $L$  und lassen Determinante invariant. Haben so eine Darstellung der Lorentzgruppe in  $SU(2)$ .

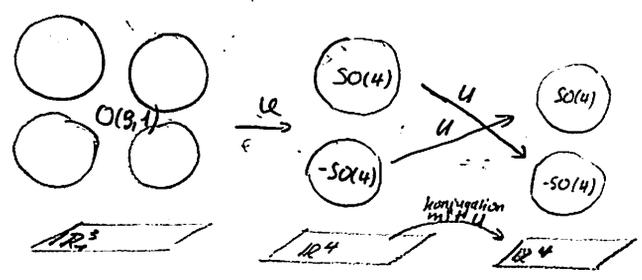
müssen zeigen:  $\varphi: O(3,1) \cong O(4)$   $U = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & i & & \\ & & i & \\ & & & i \end{pmatrix}$

$\varphi: L \mapsto U^{-1}LU$  Surjektiv:  $R$  vorgegeben  
 $URU^{-1} \in L$

injektiv  
 $U^{-1}L_1U = U^{-1}L_2U$   
 $\Rightarrow L_1 = L_2$

Wie sieht es mit den Zush. Komponenten aus:  $\varphi$  will landen entweder in  $SO(4)$  oder in  $O \cdot SO(4)$  je nachdem ob  $\det = 1$  oder  $\det = -1$ .

in  $U(4)$



haben auf  $O(4)$  einen Automorphismus  
 $U: R \rightarrow U^{-1}RU = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ & & & \dots \end{pmatrix} R$   
 der durch ein Element von  $O(4)$  gegeben ist

Nur auf  $\mathbb{R}^3$  zurück -  
 gewöhnliche Automorphismen  
 ist nicht durch ein Element aus  
 $O(3,1)$  gegeben.  $\varphi^{-1}(U): L \rightarrow U^{-1}LU$   
 $= L \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ & & & \dots \end{pmatrix}$

also zeigt  $O(3,1)$  in mindestens 4 Zush. Komponenten.  
 In mehr Zush. Komp. kann  $O(3,1)$  nicht zeigen, da nur  
 Automorphismen in  $O(4)$  die mit  $U$  zusammenhängen Automorphismen  
 auf  $O(3,1)$  induzieren.

Allgemein:  $O(n-m, m) \cong O(n)$   
 $O(n-m, m)$  hat  $n$  Zush. Komponenten

(genaugekl. -)

das Hamilton  
Jahodi Gekr.  
d. Kette.  
Mechanik

Klassische  
Mechanik

$$\star \frac{dS}{dt} + H\left(\frac{dS}{dq}, q, t\right) = 0$$

$$\frac{dS}{dt} = -H(p, q, t)$$

$$p = \frac{dS}{dq}$$

wobei  $S_{path}(q, t) = \int L dt$

$q = q, t$   
 $q$  extremal

$$gilt \quad dS = p dq - H dt$$

Beim: • Idee d. Hamilton Jahodi Methode:

zum integrieren des partiellen Gleichsystems greifen durch die Hamiltongleichungen  
müssen wir genügend viele Lösungen der Hamilton Jahodi Gleichung x

• In der Quantenmechanik wird diese Gleichung x zur Schwingungsgleichung

Quanten  
mechanik

$$\text{in } \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H \psi(t)$$

nichtrelativ-  
mechanik

$$\frac{dS}{dx_i} \frac{dS}{dx^i} = m^2 c^2$$

$$- \frac{dS}{dx^i} = p_i$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{dS^2}{dt^2} - \frac{dS^2}{dx_i^2} - \frac{dS^2}{dx^i^2} = m^2 c^2$$

$$S = S' - mc^2 t$$

Übergang zur klass. Mechanik

$$c \rightarrow \infty$$

ergibt  $\frac{1}{c^2} \left(\frac{dS'}{dt}\right)^2 + \frac{dS'}{dt} + m^2 c^2 - \left(\frac{dS'}{dx_i^2} + \frac{dS'}{dx^i^2}\right) = m^2 c^2$

$$\frac{dS'}{dt} + \frac{1}{2mc^2} - \frac{1}{2m} p^2 = 0$$

geometrische  
Optik

grenzfall kleine Wellenlängen  $\lambda \rightarrow 0$

+ Wellenfeld  $\psi = a e^{i(kr - \omega t + \alpha)}$

$$= a e^{-i(k_i x^i + \alpha)}$$

$$\text{allgemein} = a e^{i\psi}$$

4 Eikonal

$$\psi = \psi_0 + i \frac{\partial \psi}{\partial t} + i \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{für kleine Zeiten keine Ausbreit.}$$

also  $\vec{k} = \text{grad } \psi$   
 $\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$

vgl mit  $\vec{p} = \text{grad } S$   
 $H = -\frac{dS}{dt}$

$$k_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0$$

Eikonalgleichung  
 $(\text{grad } \psi)^2 = k^2$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$$

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$

$$k_i x^i = \omega t - kr$$

$$k^i k_i = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$k^i = -\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$$

Hamilton  
gleichung

$$\vec{r} = \frac{\partial \psi}{\partial \vec{k}}$$

Analogie zwischen Punktmechanik und geometrische Optik:

Wellenoptik  
Strahlenoptik  
analog  
Wellenmechanik  
Klass. Mechanik

Wellenfunkt.

$$Tik = \frac{\omega c^2}{\omega^2} k^i k^k \quad \text{für monochromatisches ebene Wellen}$$

$$p^i = \int T^ik ds_k = \frac{\omega c}{\omega^2} \int k^i k^k ds_k = \frac{\omega c}{\omega^2} \text{konst} \cdot k^i$$

konstant konstant = A k^i

$$p^i = A k^i \quad E = A \omega \quad \text{Einheit: } |E| = \hbar \omega$$

$$p^i = A k^i \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Maupertuis Prinzip:  $dS = \int \vec{p} d\vec{r} = 0$

Fermat Prinzip:  $d\psi = \int \vec{k} d\vec{r} = 0$

$$\vec{k} = -\frac{\partial \omega}{\partial \vec{r}} \quad \vec{p} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}$$

$$\vec{r} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \quad \vec{q} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$$

Hamilton  
funktion

De Rham Cohomologie:

$X$  glatte Mannigfaltigkeit  
 $Z^k(x, d)$  VR d. geschloss.  $k$ -Formen  
 $B^k(x, d)$  VR d. exakten  $k$ -Formen  
 $H^k(x, d) := Z^k(x, d) / B^k(x, d)$   $k$  te De Rham Cohomologiegruppe  
 hat endl. Dimension für kompakte  $X$ : Poincaré Zahl  
 sind topologische Invarianten  
 $C^\infty(X, \Lambda^{e-1}(X)) \xrightarrow{d} C^\infty(X, \Lambda^e(X)) \xrightarrow{d} C^\infty(X, \Lambda^{e+1}(X))$   
 $H^e(x, d) := \ker d / \text{Im } d$

abstrakte simplicialkomplexe  $(V, \Delta)$   
 $V$  Menge  
 $\Delta \in \mathcal{P}(V)$   
 (1)  $\forall v \in \Delta \exists v, v$   
 (2)  $a \in \Delta \implies b \in \Delta \implies a \rightarrow b \in \Delta$   
Gruppe Simplicialkomplex  
 der Dimension  $\leq 2$

Homologiegruppen für simplicialkomplexe

$k$  simplicialkomplex alle orientierten Simp  $k$   
 $C_e(k, \mathbb{Z}) = \langle (v_0, \dots, v_e) \rangle / \langle (v_0, \dots, v_e) + (v_1, v_0, \dots, v_e) \rangle$   
 repräsentierende Gruppe  
 Elemente dieser Gruppe haben Form  $\sum n_s \langle s \rangle$   
 $s$  simplex  
 $n_s \in \mathbb{Z}$

Gruppe der  $k$  Ketten ist  $\sigma = (v_0, \dots, v_e)$   $e$  Simplex geordnet  
 $\sigma \in K$   
 orient 1 Simplex  $\rightarrow$   
 orient 2 Simplex  $\rightarrow$

Homologie (heute)  
implizit  
explizit

allg:  $C_e(k, G)$  mit Elementen der Form  $\sum g_s \langle s \rangle$   
 $G$  abelsche Gruppe  
 $C_e(k, F)$  ist VR der Dim. #  $e$  Simplex von  $k$   
 $F$  Körper

BSP

$k = \{1, 2, 3\}$   
 $q_1 := \langle 123 \rangle$   $b_1 = 11$   $c_1 = 1$   
 $q_2 := \langle 213 \rangle$   $b_2 = 21$   $c_2 = 7$   
 $b_3 = 22$   $c_3 = 3$   
 $b_4 = 21$   
 $b_5 = 31$   
 $b_6 = 23$

$C_0(k, \mathbb{Z}) = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle \cong \mathbb{Z}^3$   
 $C_1(k, \mathbb{Z}) = \langle b_1, \dots, b_6 \rangle \cong \mathbb{Z}^6$   
 $C_2(k, \mathbb{Z}) = \langle a_1, q_1 \mid q_1 + a_1 = 0 \rangle$   
 $a_1 = -q_1$

Randabbildung:  $\delta$

$C_e(k, G) \xleftarrow{\delta} C_{e+1}(k, G)$   
 $\delta(\sum g_s \langle s \rangle) = \sum g_s \delta \langle s \rangle$   
 $\delta^2 = 0$  (mehrfach)

Rand einer Simplex  $s$   
 $\langle s \rangle = \langle v_0, v_1, \dots, v_{e+1} \rangle$   
 $\delta \langle s \rangle = \sum_{j=0}^e (-1)^j \langle v_0, \dots, v_j, \dots, v_{e+1} \rangle$

BSP  $\langle 0 \rangle = \langle 1, 2 \rangle = \langle 0, 1, 2 \rangle$   
 $\delta \langle 0 \rangle = \langle -1, 2 \rangle + \langle 2, 0 \rangle + \langle 0, 1 \rangle$

$Z_e(k, G) = \langle c \in C_e(k, G) \mid \delta c = 0 \rangle$  Zyklen  
 $B_e(k, G) = \langle \delta c \mid c \in C_{e+1}(k, G) \rangle$  Ränder  
 $H_e(k, G) = Z_e(k, G) / B_e(k, G)$

$e$  te Homologiegruppe vom  $k$  mit Koeffiz. in  $G$

$H_0(k, \mathbb{R}) = \text{VR mit dim: \# zush Komponenten: } k = \{ \langle 0 \rangle, \langle 0 \rangle, \dots, \langle 0 \rangle \}$   
 $Z_0(k, G) = \langle \sum_{v \in V(k)} g_v \langle v \rangle \rangle / \sim$

$C_1(k, G) =$   
 $C_0(k, G) = Z_0(k, G)$   
 $Z_1 \sim Z_2$  falls  $\exists \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \sigma_1$

$\beta_e := \dim H_e(k, \mathbb{R})$  Poincaré Zahl von  $k$   
 $\chi(k) = \sum_{e=0}^{\dim k} (-1)^e \beta_e$  Euler charakteristik

$\alpha_e := \#$   $e$  Simplexe in  $k$

Satz

$\chi(k) = \sum_{e=0}^{\dim k} (-1)^e \alpha_e$

$\chi(k) = \sum_{e=0}^{\dim k} (-1)^e \beta_e = \sum_{e=0}^{\dim k} (-1)^e \dim H_e(k, \mathbb{R})$   
 $= \sum_{e=0}^{\dim k} (-1)^e (\dim Z_e(k, \mathbb{R}) - \dim B_e(k, \mathbb{R}))$   
 $= \sum_{e=0}^{\dim k} (-1)^e \dim Z_e(k, \mathbb{R}) + (-1)^{e+1} \dim B_e(k, \mathbb{R})$   
 $= \sum_{e=0}^{\dim k} (-1)^e \dim Z_e(k, \mathbb{R}) + \sum_{e=1}^{\dim k} (-1)^{e-1} \dim B_{e-1}(k, \mathbb{R})$   
 $= \sum_{e=0}^{\dim k} (-1)^e (\dim Z_e(k, \mathbb{R}) + \dim B_{e-1}(k, \mathbb{R}))$   
 $\alpha_e$

$\dim B_e = 0$   
 $e = \dim k$   
 da  $\dim B_{-1} = 0$

$C^e(k) := [C_e(k, \mathbb{R})]^*$  Co Ketten

$\delta^*: C^e(k) \rightarrow C^{e+1}(k)$  adjungiertes von  $\delta: C_{e+1}(k, \mathbb{R}) \rightarrow C_e(k, \mathbb{R})$   
 $\delta^*(\omega)(c) = \omega(\delta c)$  definiert Cotrandoperator

$\dots C_{e+1}(k, \mathbb{R}) \xleftarrow{\delta} C_e(k, \mathbb{R}) \xleftarrow{\delta} C_{e-1}(k, \mathbb{R}) \leftarrow \dots$   
 $\dots C^{e-1}(k) \xrightarrow{\delta^*} C^e(k) \rightarrow C^{e+1}(k) \rightarrow \dots$

Cozyklen  
 $Z^e(k) = \{ \omega \in C^e(k) \mid \delta^* \omega = 0 \}$   
 $B^e(k) = \{ \omega^* \omega \mid \omega \in C^{e-1}(k) \}$   
Cotrand  $H^e(k) = Z^e(k) / B^e(k)$

$H^e(k) \cong [H_e(k, \mathbb{R})]^*$

Homologie  
implizit  
explizit

glatte Triangulation  
von glatten Mannigfalt.  
durch Simplicialkomplex

glatte Triangulation:  $(X, h, \mathcal{h})$   $X$   $C^\infty$  Mannigf.  
 $K$  Simplicialkomplex

$h: [k] \rightarrow X$  Homomorphism

$h|_{[i,j]} \rightarrow X$  hat extension

$h_S: U \rightarrow X$  glatte Untermannigfaltigkeit

Jede kompakte glatte  
Mannigfaltigkeit kann  
glatt trianguliert werden

Folgerung: Klassifizierung d. 2 dim  
glatten kompakten Mannigfaltigkeiten  
durch Klassifizierung von Graphen

Ziel: De Rham Kohomologie von  $X$   
ist isomorph zu  
simplicial Kohomologie von  $K$

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(X, \Lambda^e(X)) & \xrightarrow{d} & C^\infty(X, \Lambda^{e+1}(X)) \rightarrow \\ \downarrow f_e & & \downarrow f_{e+1} \\ C^e(K) & \xrightarrow{\delta^e} & C^{e+1}(K) \rightarrow \\ & & H^e(K) \end{array}$$

"Anhebung"  
Konkretisierung von  $K$

$[k]$   
 $\downarrow h$   
 $X$

wollen Isomorphismus von  $H^e(X, d)$  und  $H^e(K)$   
müssen zeigen:  $\delta^e \circ f_e = f_{e+1} \circ d \quad \forall e$

machen das mit Stokes:

$$\delta^e \circ f_e = \int_{\partial S} \circ d$$

$$f_e = \int: C^\infty(X, \Lambda^e(X)) \rightarrow C^e(K) \quad \text{da } \omega \in C^\infty(X, \Lambda^e(X))$$

$\int \omega$  ist lineares Funktional auf  $C_e(K)$

$$\int (\omega) \langle S \rangle := \int \langle S \rangle h_S^*(\omega)$$

$$h_S^*(\omega) = g \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_e$$

De Rham  
Theorem

$$\int_S: H^e(X, d) \xrightarrow{\cong} H^e(K)$$

Simplicialkohomologiegruppe

De Rham Kohomologiegruppe

Strukturen

$M$  Menge mit Funktionen  $f_0, \dots, f_m$  der Wertigkeit  $a_0, \dots, a_m$   
 und mit Prädikaten  $P_0, \dots, P_n$  der Wertigkeit  $b_0, \dots, b_n$   
 heisst Struktur  $(M, f_0, \dots, f_m, P_0, \dots, P_n)$  vom Typus  $\langle \langle a_0, \dots, a_m \rangle, \langle b_0, \dots, b_n \rangle \rangle$   
 Ein Isomorphismus  $\varphi: M \rightarrow M'$  ist definiert für Strukturen vom selben Typus  
 1)  $\varphi$  ist bijektiv  
 2)  $\forall f_i \varphi(f_i(d_1, \dots, d_{a_i})) = f_i'(\varphi(d_1), \dots, \varphi(d_{a_i}))$   
 3)  $\forall P_k P_k(d_1, \dots, d_{b_k}) = P_k'(\varphi(d_1), \dots, \varphi(d_{b_k}))$

Sprache d. Prädikatenlogik

Alphabet  $A = \{P, f, x, \forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow, \vdash, \ulcorner, \lrcorner\} \cup \{a, \dots, z\}$   
Zeichenketten aus  $A$   $(a_1 \dots a_n) \quad a_i \in A$   
Variablen  $x_i$  Ziffernfolge  $x[u_i]$  Variable  
Relationszeichen  $P_i \quad i \in I$   
Funktionszeichen  $f_i \quad i \in J$   
Konstanten  $c_k \quad k \in K$   
Terme  $T_0$  Terme 0ter Stufe Variablen u. Konstanten  
 $T_{n+1}$  Terme n-ter Stufe  $T_{n+1} = \{f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \mid t_i \in T_n \quad i \in I\}$   
 $T = \bigcup_n T_n$   
Formeln  $F_0$  Primformeln  $t_1 = t_2 \quad P_i(t_1, \dots, t_{b_i}) \quad t_1, \dots, t_{b_i}$  Terme  
 $F_{n+1} = \{ \forall x \phi, \exists x \phi, \neg \phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi, \phi \leftrightarrow \psi \mid \phi, \psi \in F_n \}$   
 $F = \bigcup_n F_n$   
Aussagen  $\phi$  Formel  $F_v(\phi)$  Menge d. Variablen, die in  $\phi$  frei vorkommen  
 $A = \{ \omega \mid F_v(\omega) = \emptyset \}$

Semantische Definition von Ausdr.

$M$  Menge für Strukturen  $\Sigma$  Menge d. Strukturen auf  $M$   
 $c \in M^M$   
 $I: T \times \Sigma \rightarrow M^{(M^M)}$  d.h.  $I(t, \gamma)(c) \in M$   
 induktiv definiert:  
 $I(x, \gamma, \gamma) = c_x$   
 $I(f_j(t_1, \dots, t_{a_j}), \gamma) = f_j(I(t_1, \gamma), \dots, I(t_{a_j}, \gamma))$   
 $J: F \times \Sigma \rightarrow \{0, 1\}^{M^M}$   
 induktiv definiert:  
 $J(t_1 = t_2, \gamma)(c) = \delta(I(t_1, \gamma)(c), I(t_2, \gamma)(c))$   
 $J(P_i(t_1, \dots, t_{b_i}), \gamma)(c) = P_i(I(t_1, \gamma)(c), \dots, I(t_{b_i}, \gamma)(c))$   
 $J(\psi_1 \wedge \psi_2, \gamma)(c) = J(\psi_1, \gamma)(c) * J(\psi_2, \gamma)(c)$   
 $J(\neg \psi, \gamma)(c) = \neg J(\psi, \gamma)(c)$   
 $J(\forall x \psi, \gamma)(c) = \min_{u \in M} J(\psi, \gamma)(c_0, u, c_2)$   
 $J(\exists x \psi, \gamma)(c) = \max_{u \in M} J(\psi, \gamma)(c_0, u, c_2)$

Semantische Folgerungskonzept

$\gamma \models \phi$  falls  $\forall c \quad J(\phi, \gamma)(c) = 1$   
 $\phi$  allgemeingültig:  $\forall \gamma \in \Sigma \quad \gamma \models \phi$   
 $A_1, \dots, A_m \models B$  heisst  $\forall \gamma \in \Sigma \quad \gamma \models A_1, \dots, \gamma \models A_m \Rightarrow \gamma \models B$   
 semantische Folgerungskonzept aus  $A_1, \dots, A_m$  folgt semantisch

Duktionsregeln

$\models \phi \rightarrow \psi \Rightarrow \models \phi \vdash \psi$   
 $\phi$  Aussage, dann  
 $\phi \vdash \psi \Rightarrow \models \phi \rightarrow \psi$

$\Gamma, \forall x \exists z \gamma \models \phi \rightarrow \psi$  d.h.  $J(\phi, \gamma)(c) \leq J(\psi, \gamma)(c) \quad \forall c$   
 Es sei nun  $J(\phi, \gamma)(c) = 1$  dann ist  $J(\psi, \gamma)(c)$  notwendigerweise auch 1  
 •  $\phi$  Aussage, dann  $J(\phi, \gamma)(c) = J(\phi, \gamma)(c')$   
 •  $\forall x \forall y \quad J(\phi, \gamma)(c) = 1 \Rightarrow \forall y \forall x \quad J(\psi, \gamma)(c) = 1$   
 $\forall x \forall y \quad (J(\phi, \gamma)(c) = 1 \Rightarrow J(\psi, \gamma)(c) = 1)$   
 $\forall x \forall y \quad (J(\phi, \gamma)(c) \leq J(\psi, \gamma)(c))$   
 • Falls  $\psi$  eine freie Variable hat ist zweiteil falsch:  
 wir können nicht schliessen:  $\forall y \forall c \quad [J(\phi, \gamma)(c) = 1 \Rightarrow J(\psi, \gamma)(c) = 1]$   
 $\Rightarrow \forall y \forall c \quad [J(\phi, \gamma)(c) = 1 \Rightarrow J(\psi, \gamma)(c) = 1]$

Syntaktische Folgerungskonzept

$\Gamma$  Formelmeng. in Sprache  $\Sigma$   
 $\Gamma \vdash B$  B ist aus  $\Gamma$  beweisbar syntaktisch folgerbar.  $\exists \phi_1, \dots, \phi_n$  Folge von Formeln aus  $\Sigma$  mit  
 $I \vdash B = \phi_n$   
 $II \quad \forall i$  gilt (1) v (2) ... v (6)

<b>AXIOME</b>	(1) $\phi_i \in \Gamma$	<b>GLEICHHEIT</b>	(4) $\phi_i \in \forall x_0 \quad x_0 = x_0$
<b>AUSSAG. LOG. IDENTIT.</b>	(2) $\forall \gamma \quad \gamma \models \phi_i$ Nullstellen, Prädikaten können durch Formeln ersetzt werden	<b>SCHEMA DER GLEICHHEIT SUBSTITUTION</b>	(5) $\exists \phi_i \quad \phi_i \in \forall x_1, \forall x_2 (x_1 = x_2 \rightarrow \text{sub}(\phi_i, x_0, x_1) \rightarrow \text{sub}(\phi_i, x_0, x_2))$ (6) $\exists j \in i$ Term $t \quad \phi_i \in \text{sub}(\phi_j, x_0, t)$
<b>QUANTIFIERN</b>	(3) $\exists \psi \quad \psi \in (\forall x_1 \psi) \rightarrow \psi$ $\forall \psi \quad \psi \in \psi \rightarrow (\exists x_1 \psi)$	<b>ALLOQUANTOR EXISTENZQUANT.</b>	(7) $\exists j \in i \quad \phi_j \in \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2 \quad \phi_i \in \mathcal{R}_1 \rightarrow \forall x_1 \mathcal{R}_2 \quad x_2$ nicht frei in $\mathcal{R}_2$ (8) $\exists j \in i \quad \phi_j \in \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2 \quad \phi_i \in \exists x_1 \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2 \quad x_1$ nicht frei in $\mathcal{R}_1$
		<b>MODUS PONENS</b>	(9) $\exists h, j \in i \quad \phi_h \in \phi_j \rightarrow \phi_i$

$$\Gamma \vdash B \Rightarrow \Gamma \Vdash B$$

$\Gamma$  Sei  $\phi_1, \dots, \phi_n$  ein Beweis  
 $\gamma$  Struktur in der  $\mathcal{J}(A, \gamma)(c) = 1 \forall A \in \Gamma$   
 Müssen zeigen  $\mathcal{J}(B, \gamma)(c) = 1$  mit Induktion

Deduktionstheorem  
 für syntaktischer  
 Folgerungskonzept  
 Herbrand, 1930

$$\Gamma \text{ Formelmenge}$$

$$\phi \text{ Formel ohne freie Variablen}$$

$$\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$$

$\Gamma \Vdash$  Modus Ponens  
 $\Rightarrow$  Sei  $\phi_1, \dots, \phi_n$  ein Beweis von  $\psi$  aus  $\Gamma \cup \{\phi\}$   
 dann ist  $(\phi \rightarrow \phi_1) \dots (\phi \rightarrow \phi_n)$   
 ein Beweis von  $\psi \rightarrow \psi$  aus  $\Gamma$

Der Gödelsche  
 Vollständigkeits-  
 Satz

$$\Gamma \Vdash \phi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \phi$$

$\Gamma$  Beweis des ööd. Vollständigkeitsatzes  
 aus dem Lemma  
 o.E.d.A.  $\phi$  habe keine freien Variablen  
 Beweisen Kontraposition:

Lemma  $\Gamma \Vdash \perp \Leftrightarrow \Gamma \vdash \perp$

$\exists$  Modell für  $\Gamma \Rightarrow \Gamma$  ist widerspruchsfrei  
 $\Gamma$  widerspruchsfrei  $\Rightarrow \Gamma$  hat Modell

$\perp$  aussagenlogisch falsche Formel  
 $\top$  aussagenlogisch richtige Formel

$\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg \phi\} \vdash \perp$   
 $\Gamma \cup \{\neg \phi\}$  widerspruchsfrei  
 $\Gamma$  dann andererseits  $\Gamma \cup \{\neg \phi\} \vdash \perp$   
 mit Ded. Theorie  $\Gamma \vdash (\neg \phi \rightarrow \perp)$   
 $\Gamma \vdash \phi$   
 $\Gamma \cup \{\neg \phi\} \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg \phi\} \vdash \perp$   
 mit Sem. Ded. Theorie  $\Rightarrow \Gamma \Vdash (\neg \phi \rightarrow \perp)$   
 $\Gamma \Vdash \phi$  qed

Idee zum beweisen des Lemmas:  
 Erweitern Sprache  $\Sigma \subseteq \Sigma'$   
 Führen für alles Namen ein. Diese Namen  
 sind dann das gesuchte Modell

Lemma  
 zusätzliche  
 Namen  
 verstehen  
 Beweisverfahren  
 nicht

$$\Gamma, \phi \text{ in Sprache } \Sigma$$

$$\Sigma' \text{ Sprache mit } a \notin \Sigma$$

$$\Gamma \vdash_{\Sigma} \phi / a \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\Sigma'} \phi$$

$$\phi / a^x \Leftrightarrow \text{Sub}(\phi, x, a)$$

$\Gamma \Vdash$  trivial  
 $\Rightarrow \Delta_1, \dots, \Delta_m$  sei ein Beweis von  $\phi / a^x$  in  $\Sigma'$   
 $x_k$  komme in  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$  nicht vor  
 ersetze  $a$  durch  $x_k$

Satz

$$\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp \Rightarrow \Gamma \cup \{\exists x_1 \phi \rightarrow \phi / a^x\} \vdash_{\Sigma'} \perp$$

können  
 Dingen, die  
 existieren  
 neue Namen  
 geben  
Henkin

$\Gamma \vdash_{\Sigma} \exists x_1 \phi \rightarrow \phi / a^x \vdash_{\Sigma'} \perp$  Ded. Theor.  
 $\Gamma \vdash_{\Sigma'} \exists x_1 \phi \rightarrow \phi / a^x \rightarrow \perp \Rightarrow$   
 $\Gamma \vdash_{\Sigma'} \neg(\exists x_1 \phi \rightarrow \phi / a^x) \Rightarrow$   
 $\Gamma \vdash_{\Sigma'} \phi / a^x \rightarrow \forall x_2 \neg \phi$  Lemma  
 $\Gamma \vdash_{\Sigma} \phi \rightarrow \forall x_2 \neg \phi \Rightarrow \Gamma \vdash_{\Sigma} \phi \rightarrow \perp \Rightarrow \Gamma \vdash_{\Sigma} \perp$

Lemma

$\Gamma$  widerspruchsfrei  
 $\phi$  Aussage  
 $\Gamma \cup \{\neg \phi\}$  od.  
 $\Gamma \cup \{\phi\}$  widerspruchsfrei

$$\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\phi\} \vdash_{\Sigma} \perp \vee \Gamma \cup \{\neg \phi\} \vdash_{\Sigma} \perp$$

Erweitern der o.h.  
 herausfindet, ist eine  
 andere Frage)

$$\Gamma \cup \{\phi\} \vdash_{\Sigma} \perp \stackrel{Ded.}{\Rightarrow} \Gamma \vdash \phi \rightarrow \perp \Rightarrow \Gamma \vdash \neg \phi$$

$$\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg \phi\} \vdash_{\Sigma} \perp$$

Satz

$\exists$  einer  
 vollständigen  
 Erweiterung

$$\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp \rightarrow \exists \Gamma^* \text{ in } \Sigma$$

- 1)  $\Gamma \subseteq \Gamma^*$
- 2)  $\Gamma^* \vdash \perp$
- 3)  $\Gamma^*$  vollständig d.h.  
 $\phi$  Satz  $\Rightarrow \Gamma^* \vdash \phi$   
 oder  $\Gamma^* \vdash \neg \phi$

$\Gamma$  Sätze in  $\Sigma$  sind abzählbar

$$\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp \Rightarrow \exists \Gamma^* \supseteq \Gamma \text{ Erweiterung in } \Sigma' \text{ die Henkinsche}$$

$\Gamma$  Sätze d. Form  $\exists x \phi$  werden in  
 Sprache  $\Sigma'$  abgezählt  
 neuindizierung d. Konstanten

Henkinsche Erweiter.  
 $\Gamma^* \vdash \exists x_1 \phi \rightarrow \phi / a^x \forall \phi$

Bew des Lemmas: konstruieren ein Modell über den natürlichen Zahlen von  $\Gamma$   
 Sei  $\Gamma^*$  die vollständige Henkinsche Erweiterung von  $\Gamma$   
 Definierten Äquivalenzklassen auf  $\mathbb{N}$

$i \sim j \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash a_i = a_j$  Äquivalenzrelation  
 $M$  sei nun  $M/\sim$  unser Modell  
 erklären auf diesem Modell Prädikats- und Funktionszeichen  
 $\cdot P(x, y) \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash P(a_i, a_j)$  ist d. j. s. b. ist wohldefiniert  
 $\cdot \tilde{f}(x) := y \Leftrightarrow \exists i \in \alpha \exists j \in \beta \Gamma^* \vdash f(a_i) = a_j$  ist wohldefiniert  
 Damit Struktur  $\tilde{\gamma} = (M, P, \tilde{f})$  definiert  
 $\top$  ohne freien Variablen  $\Rightarrow \exists x \vdash \Rightarrow$  Henkin  $\exists j \Gamma^* \vdash a_j \quad C1(t) = a_j$   
 Klasse

Beh  $\mathcal{I}(t, \tilde{\gamma})(\bar{k}) = C1(t_{\bar{k}})$

$t_{\bar{k}}$  in  $t$  ist substituiert  $x_0$  durch  $a_i$   
 induktiv

$\phi$  Satz ohne freie Variablen

$$\Gamma \vdash \phi \quad \beta(\phi) = 1$$

$$\Gamma \Vdash \phi \quad \beta(\phi) = 0$$

$$\beta(\phi) = \mathcal{J}(\phi, \tilde{\gamma})$$

Beh  $\mathcal{J}(\phi, \tilde{\gamma})(\bar{k}) = \beta(\phi)$

induktiv

Axiom. Aussagenlogik

I	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$ $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$	III	$A \rightarrow A \vee B$ $B \rightarrow A \vee B$ $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
II	$A \wedge B \rightarrow A$ $A \wedge B \rightarrow B$ $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$	IV	$A \leftrightarrow B \rightarrow (A \rightarrow B)$ $A \leftrightarrow B \rightarrow (B \rightarrow A)$ $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$
		V	$A \rightarrow B \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ $A \rightarrow \neg \neg A$ $\neg \neg A \rightarrow A$

Axiomensystem für Aussagenlogik kann so erprobt werden

Zurückführen auf Hand

$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$
$(A \wedge B) / (A \wedge B)$	$(A \wedge A) / (B \wedge B)$	$A / (A \vee B)$	$A / (A \rightarrow B)$	$B / (A \rightarrow B)$

$\models \neg A$

System ist vollständig (Hilbert) aus Normalform Folgerungen

einiges System wird ersetzt durch  
 $((A / (B \wedge C)) / ((D / (D \wedge D)) / ((D \wedge B) / ((A \wedge D) / (A \wedge D))))$

Kompaktheitsatz

$$\Gamma \vdash \phi \rightarrow \exists \Gamma_0 \subseteq \Gamma \text{ endl. } \Gamma_0 \vdash \phi$$

$\Gamma \vdash \phi$   
 $\Gamma \vdash \phi$   $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \phi$   
 $\Gamma_0 = \{ \phi_i \}$   
 $\Gamma_0 \vdash \phi$   
 $\Gamma_0 \vdash \phi$

Anw.

Endl. Axiomensystem für Körper d. Charakter. 0

$\Gamma = \{ \text{Körperaxiome}, \neg(A+1)=0, \neg(1+1)=0, \dots \}$   
 Annahme:  $\exists$  endl. Axiomensystem  $A_1, \dots, A_m$   
 Kompaktheitsatz:  $\exists \Gamma_0 \subseteq \Gamma \text{ endl. } \Gamma_0 \vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_m$   
 aber auch Körper hinterl. gewisse Charakter. erfüllen  $\Gamma_0 \not\vdash \dots$

Besitzt  $\Gamma$  für jedes  $n$  ein Modell mit mind.  $n$  Elementen so besitzt  $\Gamma$  ein unendl. Modell

Anw.

Existenz von Nichtstandardmodellen d. Zahlentheorie

Wir können erst in der Prädikatenlogik 2. Stufe Endlichkeit ausdrücken.  
 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \dots$  alles widerspruchsfrei  $\rightarrow \Gamma = \bigcup \Gamma_n$  widerspruchsfrei  
 $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, < \rangle$  Struktur  $\mathcal{T}_2$  alle gültigen Formeln dieser Struktur erweitern Struktur:  
 $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, <, a \rangle$   $\{ a=0, a=1, \dots \} \cup \mathcal{T}_2$  widerspruchsfrei denn je endlich viele neuen Zügen Axiome haben ein Modell.  
 ( $a_1, a_2$  prim nicht entscheidbar, bevor Primzahlzweifel von Gödel)

PA

$(\forall x_0) \neg x_0 + 1 = 0$ $(\forall x_1)(\forall x_2) x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ $(\forall x_1) \neg x_1 = 0 \Rightarrow \exists x_2 x_1 + 1 = x_2$ $x_0 + 0 = x_0, x_1 \cdot 0 = 0$ $x_0 + (x_1 + 1) = (x_0 + x_1) + 1$ $x_0 \cdot (x_1 + 1) = x_0 \cdot x_1 + x_0$	PA für Zahlentheorie ( $\mathbb{N}, 0, +, \cdot, <$ ) ist Modell $\Gamma_P$ System d. Peanoaxiome $\phi / \exists x_0 \quad \forall x_0 \phi \rightarrow \phi / \exists x_0$ $\forall x_0 \phi$	neues Beweis-schemata (sind hier in Prädikatenlogik 2. Stufe)
--	---	--

modellst. Satz von Gödel

$\Gamma_P$  nicht vollständig  
 $\exists \phi \quad \Gamma_P \vdash \phi \quad \Gamma_P \not\vdash \neg \phi$   
 aber  $\Gamma_P \not\vdash \phi$

ob  $\Gamma_P$  widerspruchsfrei ist, kann innerlich d. Systems nicht gezeigt werden. 3. unvollst. Satz  
 wenn: Widerspruchsfreiheitsbeweis durch unangem. unendl. Induktion

Lemma

Rekursive Berechnungen (wie z.B.  $2^n = x$  oder  $x = m!$ ) sind durch codierten d. Berechnung darstellbar

$\Gamma_{\text{Gödel}}$  um folgt der Länge  $k$  zu kodieren ( $a_1, \dots, a_n$ ) suchen wir 2 Zahlen ( $d, n$ ) so dass  
 $a_1 \equiv n \pmod{d}$   
 $a_2 \equiv n \pmod{d}$   
 $a_n \equiv n \pmod{d}$

$\Gamma$  unvollst. Satz

erweitern PA zu  $PA^* = PA + \text{primit. rekurs. Funkt.}$  erweiterte Arithm.

wähle d prim grösser als  $\max\{d, k\}$  Chines. Restsatz existiert

Schema d. prim. Rekursion

$g, g, g, n$  in  $19^1$  mit stetige Funktionen  
 $\exists f$  mit stetige Funktionen  
 $f(p_1, \dots, p_m) = g(p_1, \dots, p_m)$   
 $f(m_1, p_1, \dots, p_m) = h(m_1, f(p_1, \dots, p_m), p_1, \dots, p_m)$

$$f(0) = g$$

$$f(n+1) = h(n, f(n))$$

codierten Formales System es gibt primitiv rekursive Funktionen

Zeichenkette  $Z_1, \dots, Z_m \sim Z_1 b^m \dots + Z_m b^0 = \Gamma Z_1 \dots Z_m \Gamma$   
 $g: g(\Gamma Z \Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{Z ist prim} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$   
 $h: h(\Gamma Z \Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{Z Formel} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

bew:  $\text{bew}(\Gamma Z_1 \Gamma, \Gamma Z_2 \Gamma) = \begin{cases} 1 & Z_1 = \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m \text{ ist Beweis von } Z_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$s: s(m, n) =$  Nummer der Formel mit Nummer  $m$  in der für  $x_0$   $Z_n$  substitu. wird

$$m_0 := \Gamma \neg (\exists x_1) \text{Bew}(x_1, s(x_1, x_0)) \Gamma$$

$$n_0 := \Gamma \neg (\exists x_1) \text{Bew}(x_1, s(m_0, m_0)) \Gamma = \Gamma B \Gamma \quad B_1 := (\exists x_1) \text{Bew}(x_1, n_0) \quad n_0 = 1 \text{ S. } (m_0, m_0)$$

$$PA^* \vdash B \rightarrow B_1 \text{ klar} \quad PA^* \vdash B \Rightarrow PA^* \vdash \text{Bew}(e, n_0) \rightarrow PA^* \vdash (\exists x_1) \text{Bew}(x_1, n_0) \Rightarrow PA^* \vdash \neg B_1 \quad \Leftarrow$$

$$\frac{PA^* \vdash \neg B}{x} \Rightarrow PA^* \vdash B \Rightarrow PA^* \vdash (\exists x_1) \text{Bew}(x_1, s(m_0, m_0)) \rightarrow PA^* \vdash (\exists x_1) \text{Bew}(x_1, n_0) \Rightarrow PA^* \vdash B \quad \Leftarrow$$

$x$  1. Widerspruchsfreiheit sonst nämlich  $\neg \text{Bew}(0, n_0)$   $\neg \text{Bew}(1, n_0)$

[Elimination der  $\omega$  Widerspruchsfreiheit von Rosser geföhrt]

Lemma

$A()$  Formel rekursiv (oder  $PA^+ \vdash A(n)$  oder  $PA^+ \vdash \forall n A(n)$ )  
 $PA^+ \vdash \exists x_1 x_1 \in \mathbb{N} \wedge A(x_1) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} PA^+ \vdash A(k)$

mit Induktionsschema  
 $PA \vdash \exists x_1 x_1 \in \mathbb{N} \wedge A(x_1)$   
 $PA \vdash \exists x_1 x_1 \in \mathbb{N} \wedge A(x_1) \vee A(x_1+1)$   
 $PA \vdash A(n+1)$  oder  $PA \vdash \neg A(n+1)$  rekursiv  
 $PA \vdash \neg A(n+1) \Rightarrow \exists x_1 x_1 \in \mathbb{N} A(x_1)$   
 oder  $PA \vdash A(n+1)$

Bew Gödel

$m_0 = \Gamma \forall x_1 Bew(x_1, S(x_0, x_0)) \rightarrow (\exists x_2) x_2 \in x_1 \wedge Bew(x_2, neg \neg S(x_0, x_0)) \Gamma$   
 $C : \forall x_1 Bew(x_1, S(m_0, m_0)) \rightarrow (\exists x_2) x_2 \in x_1 \wedge Bew(x_2, neg \neg S(m_0, m_0))$   
 $C_1 : \forall x_1 Bew(x_1, n_0) \rightarrow (\exists x_2) x_2 \in x_1 \wedge Bew(x_2, neg \neg(n_0))$   
 $PA^+ \vdash C \leftrightarrow C_1$   
 $PA^+ \vdash C \Rightarrow \begin{cases} PA^+ \vdash C_1 & (\Rightarrow PA^+ \vdash Bew(k_0, n_0) \rightarrow \exists x_2 x_2 \in x_1 \wedge Bew(x_2, neg \neg(n_0))) \\ PA^+ \vdash Bew(k_0, n_0) \end{cases}$   
 $\stackrel{HP}{\Rightarrow} PA^+ \vdash \exists x_2 x_2 \in x_1 \wedge Bew(x_2, neg \neg(n_0)) \stackrel{Lemma}{\Rightarrow} PA^+ \vdash Bew(k_0, neg \neg(n_0)) \quad PA^+ \vdash \neg C$   
 $PA^+ \vdash \neg C \Rightarrow (PA^+ \vdash Bew(k_0, neg \neg(n_0)) \wedge PA^+ \vdash \neg C_1)$   
 $\Rightarrow PA^+ \vdash \exists x_1 [Bew(x_1, n_0) \wedge \neg (\exists x_2) x_2 \in x_1 \wedge Bew(x_2, neg \neg(n_0))]$   
 $\Rightarrow PA^+ \vdash \exists x_1 x_1 \in k_0 \wedge Bew(x_1, n_0)$   
 $\Rightarrow PA^+ \vdash Bew(k_0, n_0) \Rightarrow PA^+ \vdash C \quad \square$

Completter Satz von Tarski

Sei  $w()$  eine Formel in d. Sprache  $PA^+$ , sodass für jede Zahl  $n$  gilt:  $w(n)$  wahr in der Zahlentheorie genau dann wenn  $n$  Gödelnummer eines wahren Satzes ist.  $w(x) \notin \mathbb{N}$

$\Gamma m_0 = \Gamma \neg w(S(k_0, x_0)) \Gamma$   
 $n_0 = \Gamma \neg w(S(m_0, m_0)) \Gamma = S(m_0, m_0)$   
 $w(n_0) \leftrightarrow \neg w(S(m_0, m_0))$  nach Def.  
 $w(n_0) \leftrightarrow w(S(m_0, m_0))$  da  $n_0 = S(m_0, m_0) \quad \square$

Das ZF Axiomensystem

erweiterte Sprache um $\in$	
ZF	1) <u>Extensionalitätsaxiom</u> $\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$
	2) <u>Vereinigungsaxiom</u> $\forall x \exists y \forall z [\forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (t \in x \wedge z \in t))] \Gamma$
	3) <u>Potenzmengenaxiom</u> $\forall x \exists y \forall z [\forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)]$
	4) <u>Ersetzungsaxiom</u> $\forall x \forall y \forall z (\varphi(x, y, z) \wedge \varphi(x, y_1, z) \rightarrow y_1 = y_2) \rightarrow \forall a \exists b \forall y [\forall y \in a \rightarrow \exists x \exists s \varphi(x, y, s)]$
	5) <u>Unendlichkeitsaxiom</u> $\exists x [\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \exists z \varphi(y, z, x))]$
AC	6) <u>Fundierungsaxiom</u> $\forall x [x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \forall z (z \in y \rightarrow z \in x))] \Gamma$
	7) <u>Auswahlaxiom</u> $\forall a \exists f [\forall x (x \in a \rightarrow x \neq \emptyset) \wedge \forall x \forall y (x \in a \wedge y \in a \rightarrow x \neq y \vee x \cap y = \emptyset) \rightarrow \exists b \forall x \exists u (x \in a \rightarrow b \cap x = \{u\})]$

Nullmengenaxiom

$\exists b \forall y y \in b$   
 $\Gamma \varphi(x, y) : y \neq \emptyset$   
 (u)  $\forall x \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2)$   
 $\Rightarrow \forall a \exists b \forall y (y \in a \rightarrow \exists x (x \in a \wedge y \in x))$   
 $\Leftrightarrow \forall a \exists b \forall y (y \in a \rightarrow \exists x (x \in a \wedge y \in x))$   $d_1 := \{b \mid \forall y (y \neq \emptyset) \text{ singleton}\} \Gamma$

Potenzmengenaxiom

$\forall x \forall y \exists z \forall t [\forall z (z \in t \leftrightarrow t = x \vee t = y)] \Gamma$   
 $\Gamma \varphi(u, v) : u = \emptyset \wedge v = S \vee u = \{ \emptyset \} \wedge v = t$   
 $\forall x \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2)$   
 $a := P(P(\emptyset)) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$  (Potenzmengenaxiom)  
 $\exists b \forall y (y \in b \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x, y)))$   
 $b := \{ S, t \} \quad \Gamma$

Aussonderungsaxiome

$\forall a \exists b \forall y (y \in b \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x, y))) \Gamma$   
 $\Gamma \varphi(u, v) : \varphi(u) \wedge u = v$   
 $\forall x \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2)$   
 $\Rightarrow \forall a \exists b \forall x (x \in a \rightarrow \exists y (y \in a \wedge \varphi(x, y)))$   
 $\Leftrightarrow \forall a \exists b \forall x (x \in a \rightarrow \exists y (y \in a \wedge \varphi(x, y)))$   
 $\Rightarrow \forall a \exists b \forall y (y \in b \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x, y))) \quad \Gamma$

ein vereinfachtes Aussonderungsaxiom?

$\exists x_1 (\forall x_2) x_0 \in x_2 \leftrightarrow \emptyset \in x_0$  Widerspruch  
 $\exists x_2 (\forall x_0) x_0 \in x_2 \leftrightarrow \neg x_0 \in x_0$   
 $\exists x_2 (\forall x_0) x_0 \in x_2 \leftrightarrow \exists x_2 x_2 \in x_2$   
 $\exists x_2 x_2 \in x_2 \leftrightarrow \neg x_2 \in x_2 \quad \square$   
 $\Gamma \forall a_0 x_0 \exists x_2 \rightarrow x_0 \in x_2$   
 $\forall x_0 x_0 \in x_2 \rightarrow x_2 \in x_2$   
 $x_2 \in x_2 \rightarrow \exists x_2 x_2 \in x_2$   
 $\forall x_0 x_0 \in x_2 \rightarrow \exists x_2 x_2 \in x_2$   
 $\exists x_2 \forall x_0 x_0 \in x_2 \rightarrow \exists x_2 x_2 \in x_2 \quad \Gamma$

Russellsche Paradoxie

Leuten: 1. unvollst. Satz

$Con(ZF) \Leftrightarrow \{ \emptyset \mid ZF \vdash \emptyset \}$  ist nicht rekursiv  
d.h.  $\exists \phi \ ZF \vdash \phi \wedge ZF \vdash \neg \phi$

folgen aus

$\Gamma$  syntaktisch widerspruchsfrei  
 $\Rightarrow \Gamma$  hat Modelle

2. unvollst. Satz

$T$  rekurs. konsist. Erweiterung von  $ZF$   
 $\Rightarrow T \not\vdash Con(T)$

Unentscheidb. Leitsatz

$\exists \phi \ \Gamma \vdash \phi \wedge \Gamma \vdash \neg \phi$

Syntaktische Unvollständigkeit der Zahlentheorie, falls PA syntaktisch widerspruchsfrei

1. Vollst. Satz

In Prädikatenlogik 1. Stufe  
 $\Gamma \models \phi \Leftrightarrow \Gamma \Vdash \phi$

Für jedes Axiomensystem  $\Gamma$  1. Vollständigkeitsatz d. Prädikatenlogik syntaktische od. semantische Beweismethoden stimmen überein  
Logische Vollständigkeit

Church'sche unvollst. Satz

Die Menge der Modelle d. element. Prädikatenlogik ist unentscheidbar  
Die Menge d. Theoreme von PA ist unentscheidbar

Sie sind wohl aufzählbar aber nicht entscheidbar  
Die Aussagenlogik ist entscheidbar

Satz von Skolem

PA ist in der Sprache d. Prädikatenlogik nicht monomorph

folgt direkt aus dem 1. unvollst. Satz und aus dem Vollst. Satz (Nichtstandardmodelle)

Wird die Zahlentheorie in einer Prädikatenlogik höherer Stufe formuliert erhalten sich wieder syntaktische Unvollständigkeit d. PA monomorph woraus dann die semantische Vollständigkeit folgt.

Satz von Löwenheim-Skolem

$\Gamma$  erfüllbar  $\Rightarrow \Gamma$  bereits in abzählbaren Modell erfüllbar

andere Formulier. d. Unvollst.

Die Menge der beweisbaren Sätze in PA sind aufzählbar  
Die Menge der wahren Sätze in PA sind nicht aufzählbar

Semantisches Endlichkeitstheorem

Ist jede endl. Teilmenge von  $\Gamma$  erfüllbar so auch  $\Gamma$

$R \subseteq \mathbb{N}$  rekursiv  $\Leftrightarrow \exists \chi_P(x)$  Formel  $m \in R \Leftrightarrow ZF \vdash \chi_P(m)$   $\wedge n \notin R \Leftrightarrow ZF \vdash \neg \chi_P(n)$

Theorem Gödel

$\forall \Delta$  Formeln  $\phi(x)$  ( $\exists!$  4 Sätze)  
 $ZF \vdash \phi \Leftrightarrow \phi(\Gamma\Delta)$

$\Gamma \delta(v) := \phi(v(\Gamma\Delta))$   $\dots \emptyset \vdash \emptyset(\Gamma\emptyset)$  rekurs. Abb. von endl. Folgen  
 $v$  Formel  
 $ZF \vdash \delta(\Gamma\emptyset) \Leftrightarrow \phi(\Gamma\emptyset(\Gamma\emptyset))$   
 $ZF \vdash \delta(\Gamma\emptyset) \Leftrightarrow \phi(\Gamma\delta(\Gamma\emptyset))$   
 $ZF \vdash \phi \Leftrightarrow \phi(\Gamma\Delta)$   $\Delta = \delta(\Gamma\emptyset)$

Erläuterung:  $\emptyset \vdash \emptyset(\Gamma\emptyset)$  ist eine rekursive Abbildung von Endlich Folgen  $\emptyset$  Formel mit einer Stellenvertauschung

d.h.  $\exists \chi \ \emptyset(\Gamma\emptyset) \Leftrightarrow ZF \vdash \chi(\Gamma\emptyset, \Gamma\emptyset(\Gamma\emptyset))$   
 $\delta(v) := \exists w (\chi(v,w) \wedge \phi(w))$   
 $ZF \vdash \delta(\Gamma\emptyset) \Leftrightarrow \exists w (\chi(\Gamma\emptyset, w) \wedge \phi(w))$   $ZF \vdash \phi w (\chi(\Gamma\emptyset, w) \Leftrightarrow w = \Gamma\emptyset(\Gamma\emptyset))$   
 $ZF \vdash \delta(\Gamma\emptyset) \Leftrightarrow \phi(\Gamma\emptyset(\Gamma\emptyset))$

Tarski

$\chi(x) := "x \text{ ist ein wahrer Satz}"$   
 $ZF \vdash \phi \Leftrightarrow \neg \chi(\Gamma\phi)$

$T \vdash \phi \Leftrightarrow ZF \vdash \chi_{PA}^T(\Gamma\phi, \Gamma\phi) \Leftrightarrow \phi$  ist formal. Bew. von  $\phi$  in  $T$   
 $\not\vdash \omega \Leftrightarrow \neg \exists v \ \chi_{PA}^T(\Gamma v, \Gamma v) \Leftrightarrow \omega$  ist nicht beweisbar.  
 $Con(T) \Leftrightarrow \not\vdash T(\Gamma \exists v (v \neq v))$

$T \not\vdash Con(T)$

$\Gamma \exists! \phi$  Satz  $ZF \vdash \phi \Leftrightarrow \emptyset \vdash T(\Gamma\phi)$

zeigen:  $Con(T) \Rightarrow T \not\vdash \phi$

$\Gamma T \vdash \phi \Rightarrow ZF \vdash \chi_{PA}^T(\Gamma\phi, \Gamma\phi)$

$\Rightarrow ZF \vdash \neg \emptyset \vdash T(\Gamma\phi) \Rightarrow ZF \vdash \neg \phi$

Gödel

$\{ \phi : T \vdash \phi \}$  nicht rekursiv

$\Gamma$  sonst  $\exists! \chi \ T \vdash \phi \Rightarrow ZF \vdash \chi(\Gamma\phi)$   
 $T \vdash \phi \Rightarrow ZF \vdash \neg \chi(\Gamma\phi)$

oder  $\exists \phi \ T \vdash \phi \Leftrightarrow \neg \chi(\Gamma\phi)$

unvollst. Satz von Gödel

$\exists! \phi \ T \not\vdash \phi \wedge T \not\vdash \neg \phi$

$\Gamma$  sonst ist  $\{ \phi : T \vdash \phi \}$  nicht rekursiv

Extensionalität  $\exists x_0 \forall x_1 (\exists x_2 x_3 \rightarrow \phi(x_0))$   $x_0$  nicht frei  $\phi$  stratifiziert:  $S(x_0) \in \mathbb{Z}$   
 $x_i \in x_j \rightarrow S(x_i) + 1 = S(x_j)$   
 $x_i = x_j \rightarrow S(x_i) = S(x_j)$   
 $S(x_0) = 0$  Normierung

$\text{End}(x_0) : (\forall x_1) (\neg \exists x_2 \wedge \forall x_3 \forall x_4 (x_2 \in x_1 \rightarrow x_0 \cup \{x_3, x_4\})) \rightarrow x_0 \in x_1$

$x_0$  5-mächtig:  $(\exists x_2) x_2 \in x_0 \wedge (\forall x_3) (\forall x_4) x_2 \in x_0 \rightarrow (x_4 \in x_0 \leftrightarrow (\forall x_1) (\phi(x_1) \wedge x_3 \in x_1) \rightarrow x_4 \in x_1))$

natür. Zahl:  $x_0$  enth. endl. andl. Mengen und ist 5-mächtig

Aussagenlogik

1st x to  
vollständig

$\phi(A_1, \dots, A_n) \in \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$   
jede Abbild. ist möglich

$\neg \phi(x) = \begin{cases} 1 & x \neq \bar{x} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$   
 bsp:  $x = (1, 0, 0, 1)$   
 $\neg \phi(x) = 1, 1, 1, 1 = \neg \phi(x)$

$A_i \rightarrow A$  Literal  $\vee (\neg) A_i$  Klauseln  
 $\vee A_i (\neg) A_j$  disjunkt Normalform  
 $\wedge \vee (\neg) A_i$  konjunkt. Normalform

Klauselmengen erfüllbar  
 $\rightarrow \neg \phi$  Folgerung

$\phi \rightarrow \psi$  Klauseln

Normalform

Zu Formel  $\phi$  (in  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ ) exist.  $\psi$  in Normalform  
 $\psi$  höchst linear Länge als  $\beta$ , so dass gilt  
 $\phi$  erfüllbar  $\iff \psi$  erfüllbar  
 $\psi$  mit zusätzl. Hilfsvariablen  
 keine Erfüllung von  $\phi$  kann zu Erfüllung von  $\psi$  erweitert werden

$\neg$  Negation wird nach innen gezogen  
 subst.  $\{ \begin{aligned} F(\phi \rightarrow \psi) &\leftrightarrow (\neg \phi \vee \psi) \\ F(\phi \wedge \psi) &\leftrightarrow (\neg \phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg \psi) \end{aligned}$   
 regel:  $F \neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg \phi \wedge \neg \psi)$   
 $F \neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg \phi \vee \neg \psi)$   
 $F \neg \neg \phi \leftrightarrow \phi$

$A \wedge B \leftrightarrow H \iff (\neg A \vee \neg B \vee H) \wedge (\neg H \vee A) \wedge (\neg H \vee B)$   
 $A \vee B \leftrightarrow H \iff (\neg H \vee A \vee B) \wedge (\neg A \vee H) \wedge (\neg B \vee H)$

Frage geg. Klauselmengen, wann ist eine Klauselmengen erfüllbar?

Resolutionsmethode: Resolutionsherleitung d. Klausel  $\psi$  aus Klauselmengen  $\phi_1, \dots, \phi_n$   
 $\text{Res}(\phi_1, \phi_2, A) = \psi_1 \vee \psi_2$   $\phi_1 = A \vee \psi_1$   
 $\phi_2 = \neg A \vee \psi_2$

Eine Erfüllung von  $\phi_1, \phi_2$   
 erfüllt auch  $\text{Res}(\phi_1, \phi_2, A)$

vollständig  
d. Resolutionsherleit.

Falls  $\phi_1, \dots, \phi_n$  unerfüllbar ist, so ist die leere Klausel  $\perp$  herleitbar aus  $\phi_1, \dots, \phi_n$

$\neg$  Indukt. nach # Variablen  
 voraus:  $A_i \rightarrow A \iff \perp$   
 indukt. schritt:  $A$  Konjunkt. oder  
 $A = \bigwedge_{i=1}^m (A_i \vee \Gamma_i)$   
 $\neg A = \bigvee_{i=1}^m (\neg A_i \wedge \neg \Gamma_i)$   
 $H_1, \dots, H_p$   
 1. Fall  $A$  wahr:  $A_1, \dots, A_m$   
 $H_1, \dots, H_p$  zu erfüllen  
 2. Fall  $A$  falsch:  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  zu erfüllen  
 $H_1, \dots, H_p$   
 im 1. Fall nutzen Resol. herleit. aus von  $\perp$   
 $A_1, \dots, A_m, H_1, \dots, H_p : \perp, \neg H$   
 im 2. Fall nutzen Resol. herleit. von  $\perp$   
 aus  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m, H_1, \dots, H_p : \perp, A$

Satz  $\phi_1, \dots, \phi_n \Vdash \psi \iff \exists \psi$  Teilklausel von  $\psi$ , welche aus  $\phi_1, \dots, \phi_n$  herleitbar ist

$\perp$  trivial  
 $\iff$  inkonsistent

Konjunktions: Formeln mit Klausellänge  $\leq 2$  ZSAT polynomial quadr.  
Konjunktions: Klauseln mit höchstens einem posit. Literal: algebra. log. Resolution HORNSAT Polynomial linear  
 SAT und ZSAT sind NP vollständig

Regul. Herleitung: Es wird nicht zweimal dieselbe Klausel eliminiert  
 $\perp$  herleitbar  $\iff \perp$  regulär herleitbar

Isilio

Es gibt eine Folge  $\mathcal{E}_n$  von unerfüllbaren Klauselmengen,  
 und posit. Konstanten  $c_1, c_2$  mit  
 ①  $|\mathcal{E}_n| \leq c_1 n^2$   
 ② regul. Herleit. von  $\perp$  aus  $\mathcal{E}_n$   
 enthält mind.  $c_2 c_1 n$  Klauseln

präzise Fassung

Zu jedem Satz d. Prädikatenlogik existiert eine dazu äquivalente präzisere Fassung

(alle Quantoren nach vorne schieben!)

Skolemisieren

Einsetzen von Skolemfunktionen an Stelle der Existenzquantoren  
Skolemfunktion ist  $k$  möglich, wenn bei dem  $\exists$  erscheinenden  $\exists$  Quantor  $k$  Allquantoren stehen

$$\forall x \exists y R(x, y) \rightsquigarrow \forall x R(f(x)) \rightsquigarrow \bigwedge \forall a_k$$

Falls wir Modell von  $\forall x R$  haben, so ist Formelmengi erfüllbar.

Satz von Skolem Löwenheim

Jede Theorie d. Prädikatenlogik 1. Stufe welche ein Modell hat hat ein abzählbares Modell

Skolem

Ein Satz  $\phi$  der Prädikatenlogik ist genau dann beweisbar, falls die zur Skolemisierten, präzisieren Fassung gehörige konjunktive Normalform erfüllbar ist.

Ein Satz  $\phi$  der Prädikatenlogik ist genau dann falsch, falls die zur Skolemisierten, konjunktiven Normalform unerfüllbar ist, d.h. d. mit Resolutionsmethode herleitbar ist.

Idee von Heibrand

$\phi$  Satz d. Prädikatenlogik  
 $\phi_1, \phi_2, \dots$  Formeln der Prädikatenlogik  
 $\phi$  unerfüllbar  $\iff \exists n \phi_n$  unerfüllbar  
 $\implies \phi_1, \dots$  unerfüllbar

$\phi$  erfüllbar  $\iff \neg \phi$  allgemeingültig  
 $\phi$  unerfüllbar  $\iff \neg \phi$  allgemeingültig

wenn von allen Personen inspektiert wird, ist ein König Arthur wird von allen Personen inspektiert

Bsp Arthur ist ein König

$$\forall x \exists y (Ry \wedge \neg r(y, x)) \vee k(x)$$

$$\forall x P(f(x)) \wedge \neg r(f(x), x) \vee k(x)$$

$$(\forall z) P(z) \rightarrow r(z, \text{Arthur})$$

$P(f(x) \vee k(x))$   
 $\neg r(f(x), x) \vee k(x)$   
 $\neg P(z) \vee r(z, \text{Arthur})$

Resolution

- c:  $k(\text{Arthur})$ ?
- c:  $r(f(\text{Arthur}), \text{Arthur})$ ?
- c:  $P(f(\text{Arthur}))$ ?
- e:  $r(f(\text{Arthur}), \text{Arthur})$
- e:  $k(\text{Arthur})$

$$\forall x (\forall y (Ry \rightarrow r(y, x))) \rightarrow k(x)$$

$$\forall z P(z) \rightarrow r(z, \text{Arthur})$$

Zum syntakt. Folgerungs begriff: Kurzform der Beweisregeln:

$\Gamma$	Axiome	
$T$	Tautologien	
$\forall x (x=x)$		} Gleichheit
$\frac{}{\forall x \forall y (x=y) \rightarrow \text{sub}(4, z, x) \rightarrow \text{sub}(4, z, y)}$		
$\frac{}{\text{sub}(4, x, t)}$	+ term	} Subst.
$\frac{A_1 \rightarrow A_2 \quad A_2 \rightarrow A_3}{A_1 \rightarrow A_3}$		
$\frac{}{\forall x A \rightarrow A}$		} Quantoren
$\frac{}{A \rightarrow \exists x A}$		
$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$		} Modus Ponens
$\frac{}{A}$		

BSP  $\exists x \forall y P(x) \rightarrow P(y)$   
 $P(t) \rightarrow P(y)$

$\phi$  unerfüllbar  $\iff \neg \phi$  allgemeingültig

BSP  $A \wedge \neg A$   
 $\Delta$  unerfüllbar

$A \vee \neg A$  allgemeingültig

BSP  $\neg \exists x \forall y P(x) \rightarrow P(y)$

$\forall x \exists y \neg (P(x) \rightarrow P(y))$

Skolem normalform  $\forall x \neg (P(y(x)) \wedge \neg P(x))$

$\neg P(y(x))$   
 $\neg \neg P(x)$  } Klausurübung

$P(x)$   
 $\neg P(y(x))$   
 $P(y(x))$  }  $\Delta$  unerfüllbar

$\neg \neg P(y(x))$

Prinare Normalform

I	$\vdash ((\forall x) A(x)) \rightarrow B \iff \exists y (A(y) \rightarrow B)$
II	$\vdash ((\exists x) A(x)) \rightarrow B \iff \forall y (A(y) \rightarrow B)$
III	$\vdash A \rightarrow \forall x B(x) \iff \forall y (A \rightarrow B(y))$
IV	$\vdash A \rightarrow \exists x B(x) \iff \exists y (A \rightarrow B(y))$
V	$\vdash \neg(\forall x) A \iff \exists x \neg A$

Mit diesen Regeln kann jedes waf in prinare Normalform gebracht werden.

$$\forall A \quad \vdash A \iff \vdash P(A)$$

$P(A)$  in prinare Normalform

Skolemnormalform

Jede Prinare Normalform kann in eine Skolemnormalform gebracht werden, wo die Existenzquantoren vorne stehen mit folgend Verfahren:

$$\begin{aligned} &\forall x \exists z C(x, z) \\ &\forall x ((\exists z C(x, z)) \rightarrow A(x)) \rightarrow (\forall x (A(x))) \\ &\exists x ((\exists z C(x, z)) \rightarrow A(x)) \rightarrow A(x) \\ &\exists x \forall z (C(x, z) \rightarrow A(x)) \rightarrow A(x) \end{aligned}$$

Skolemisation:

$$\forall x C(x, f(x))$$

Mit Skolemfunktionen sind wir in Prädikatenlogik 2. Stufe!

$A_1, \dots, A_n$  Aussagenvariable  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \iff$  Formel aufgebaut aus  $A_1, \dots, A_n, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \iff$

$$\phi: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

wahr:  $\phi = 1$

erfüllbar  $\exists \vec{x} \in \{0, 1\}^n \quad \phi(\vec{x}) = 1$

Pos jede Funktion  $\phi$  ist darstellbar

Bsp

$$(A_1, 0, 1) \quad (A_1 \rightarrow A_2 \wedge \neg A_3 \rightarrow A_4)$$

$A_i \rightarrow A$  literals

$\forall A (\rightarrow) A_i$  disjunktive Normalform

$\wedge V (\rightarrow) A_i$  konjunktive Normalform

Klauselnorm:

Klauselnorm  $\in \mathbb{Z}$

Formelnorm:

Klauselnorm mit höchst einer positiven Literal

$\phi$  Formel  
 $\exists \vec{x}$  nicht wasserichtig  
 $\phi$  erfüllbar  $\iff \phi$  erfüllbar

Bsp

$$\begin{aligned} &A \vee \neg B \\ &A \vee \neg B \iff H_1 \\ &A \wedge \neg B \rightarrow H_1 \quad \wedge \quad A \wedge B \iff H_1 \\ &(\neg(A \wedge B) \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee (A \wedge B)) \\ &(\neg A \vee B \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee A) \wedge (\neg H_1 \vee B) \end{aligned}$$

Klauselnorm: Disjunktionen

Resolutionsmethode zur Bestimmung ob Klauselnmenge erfüllbar

$\phi_1, \dots, \phi_n$  unerfüllbar  $\iff \neg A$  herleitbar

$$\text{res}(\phi_1, \phi_2, A) : \psi_1 \vee \psi_2$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= A \vee \psi_1 \\ \phi_2 &= \neg A \vee \psi_2 \end{aligned}$$

$\phi_1, \dots, \phi_n \Vdash \psi \iff \exists \psi' \subseteq \psi \quad \psi'$  herleitbar

Formelnorm sind linear entscheidbar

$$(A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \neg A_4) \wedge (A_3 \vee A_2 \vee A_3) \wedge \dots$$

$\Gamma$  ohne positiv. Variable: setzt alles falsch  $\rightarrow$  erfull

A als Klausel: setzt A wahr  $\rightarrow \neg A$  falsch

Unfahren führt zu A oder erfüllung

Reguläre Herleitung

nur einmal eine Variable eliminiert in Resolutionsregeln: nur eine Klausel hat beide

ist exponentiell ko. (Zeitlich)

Herleitung

Setz in skolemisierte prinare Form zugehörige konjunktive Normalform

Setz herleitet  $\iff$  konjunktive Normalform erfüllbar

Formale Zahlentheorie

Primo Arithmetik

Skolemer ( $M, ', +, \cdot, =$ ) = S  
mit Axiomen (S)

Mit diesem System kann (fast) die ganze Zahlentheorie aufgeführt werden

Es gibt Modelle von jeder Kardinalität  $\aleph_n$   
Skolem'sche Paradoxie:  $\exists$  No nicht-kontinuell Modelle

ohne Axiome 7,8 ohne - Pierburggarantiertheit

(S1)	$x_1 + x_2 = (x_1 + x_2) \rightarrow x_2 + x_1$
(S2)	$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
(S3)	$0 \neq x_1$
(S4)	$x_1 = x_2 \rightarrow x_1 + x_3 = x_2 + x_3$
(S5)	$x_1 + 0 = x_1$
(S6)	$x_1 + x_2 = k_1 + x_2$
(S7)	$x_1 \cdot 0 = 0$
(S8)	$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$
(S9)	$\neg \exists x (x + x = x) \rightarrow \forall x (x + x = x)$

Auf neue Namen:  $x_1, \dots, x_n \equiv \bar{x}$

$R(x_1, \dots, x_n)$  Zahlen/numerische Relation  
heißt in S ausdrückbar, falls  $\exists A(x_1, \dots, x_n)$  auf  $x_1, \dots, x_n$  freie Variablen

$(S) \models R(x_1, \dots, x_n) \iff (S) \models A(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

Bsp  $= 1 \leq x, x+y = z$

$f(x_1, \dots, x_n)$  Zahlentheoret. Funktion  
heißt in S darstellbar, falls  $\exists A(x_1, \dots, x_n, y)$  auf  $x_1, \dots, x_n, y$  frei

$(S) \models f(k_1, \dots, k_n) = k_{n+1} \iff (S) \models A(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n, \bar{k}_{n+1})$

$(S) \models \exists! x_{n+1} A(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, x_{n+1})$

Bsp.  $(S) \models \exists! x_{n+1} A(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  stark darstellbar

Bem Falls wir eine Funktion stark darstellen können, können wir auch im System, dass zu jedem  $x_1, \dots, x_n$  ein  $x_{n+1}$  finden können.

Bem können Zahlentheoret. Relation auf Zahlentheor. Funktionen zurückführen:  $C_R(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} 0 & R(x_1, \dots, x_n) \text{ falsch} \\ 1 & R(x_1, \dots, x_n) \text{ richtig} \end{cases}$   
es gilt dann  $R(x_1, \dots, x_n)$  ausdrückbar  $\iff C_R(x_1, \dots, x_n)$  darstellbar

wir werden also im folgenden OF. A nur mit Funktionen arbeiten.

! Eine Funktion ist rekursiv genau sie darstellbar ist.  
Eine Funktion ist primitiv rekursiv genau sie stark darstellbar ist.

$\rightarrow$  Mendelson

Arithmetisierung der Sprache  
Coordinationen

$z_1, \dots, z_m$  Zeichenreihe  $\Gamma(T=3 \Gamma) \Gamma = S \Gamma, \Gamma = 7 \dots \Gamma x[k] \Gamma = S+8k \dots$   
 $\Gamma z_1, \dots, z_m \Gamma = 2 \Gamma z_1 \Gamma 3 \Gamma z_2 \Gamma \dots p_m \Gamma z_m \Gamma$   
 $e_1, \dots, e_r$  seq von Zeichenreihe  
 $\Gamma e_1, \dots, e_r \Gamma = 2 \Gamma e_1 \Gamma 3 \Gamma e_2 \Gamma \dots p_r \Gamma e_r \Gamma$

Namen für primitive rekursive Funktionen:

$g$ :  $g \Gamma z \Gamma = 1 \iff z$  Term sonst 0  
 $h$ :  $h \Gamma z \Gamma = 1 \iff z$  Formel sonst 0  
 Bew:  $\text{bew}(\Gamma z_1, \Gamma z_2) \iff z_1 = \Phi_1 \dots \Phi_n$  ist Beweis von  $z_1$  sonst 0  
 $S$ :  $S(m, n) =$  Zahl der Formel mit Nummer  $m$  in der für  $\forall \exists$  die Zahl  $n$  substituiert wird  
 $PA \vdash \text{Bew}(\Gamma z_1, \Gamma z_2) \iff$  Formel  $z_1$  ist beweisbar  
 $\text{neg}(n)$ : Gödelnummer der Negation des Satzes mit Nummer  $n$

Gödel's Beweis:

$m_0 := \Gamma \neg (\exists x_1) \text{Bew}(x_1, S(x_0, \wedge \bar{x})) \Gamma$   
 $n_0 := \Gamma \neg (\exists x_1) \text{Bew}(x_1, S(m_0, m_0)) \Gamma = \Gamma B \Gamma$   
 $n_0 = S(m_0, m_0)$   
 $B_1 := \neg (\exists x_1) \text{Bew}(x_1, n_0)$   $B := \neg (\exists x_1) \text{Bew}(x_1, S(m_0, m_0))$   
 $PA \vdash B \iff B_1$  da  $PA \vdash n_0 = S(m_0, m_0)$   
 $PA \vdash B \iff PA \vdash \text{Bew}(e, n_0) \iff PA \vdash (\exists x_1) \text{Bew}(x_1, n_0) \rightarrow PA \vdash \neg B_1 \iff$   
 $PA \vdash \neg B \iff PA \vdash (\exists x_1) \text{Bew}(x_1, S(m_0, m_0)) \iff PA \vdash \text{Bew}(e, n_0) \rightarrow PA \vdash B \iff$

$\Omega$  Widerspruch

Beweis von Rosser

Lemma

A einseitige rekursive Formel  
 (d.h.  $PA \vdash A(n) \vee PA \vdash \neg A(n)$ )  
 $PA \vdash \exists x, x \leq n \wedge A(x)$   
 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} PA \vdash A(k)$

$\Gamma$  induktiv

$PA \vdash (\exists x_1) x_1 \in \mathbb{N} \wedge A(x_1)$   
 $PA \vdash ((\exists x_1)(x_1 \in \mathbb{N} \wedge A(x_1)) \vee A(x_{n+1}))$   
 $PA \vdash A(x_{n+1}) \vee A(x_{n+1})$   
 $\exists k \in \mathbb{N} PA \vdash A(k) \quad \perp$

Bew Rosser

$m_0 = \Gamma (\forall x_1) (Bew(x_1, S(x_0, x_0)) \rightarrow (\exists x_2) x_2 \leq x_1 \wedge Bew(x_2, neg(S(x_0, x_0)))) \quad \top$   
 $C : (\forall x_1) Bew(x_1, S(m_0, m_0)) \rightarrow (\exists x_2) x_2 \leq x_1 \wedge Bew(x_2, neg(S(m_0, m_0))) \quad m_0 = \Gamma C \quad \top$   
 $PA \vdash m_0 = S(m_0, m_0)$   
 $C_1 : (\forall x_1) Bew(x_1, m_0) \rightarrow (\exists x_2) x_2 \leq x_1 \wedge Bew(x_2, neg(m_0))$   
 $PA \vdash C \leftrightarrow C_1$   
 $PA \vdash C \Rightarrow PA \vdash C_1 \wedge PA \vdash Bew(l_0, m_0) \Rightarrow PA \vdash (\exists x_2) x_2 \leq l_0 \wedge Bew(x_2, neg(m_0)) \xrightarrow{\text{Lemma}} \exists k \leq l_0 PA \vdash Bew(k, \dots)$   
 $\Rightarrow PA \vdash \neg C$   
 $PA \vdash \neg C \Rightarrow PA \vdash \neg C_1 \wedge PA \vdash Bew(m_0, neg(m_0)) \Rightarrow PA \vdash (\exists x_1) Bew(x_1, m_0) \wedge \neg (\exists x_2) x_2 \leq x_1 \wedge Bew(x_2, neg(m_0))$   
 $\wedge Bew(m_0, neg(m_0))$   
 $\Rightarrow PA \vdash (\exists x_1) x_1 \leq m_0 \wedge Bew(x_1, m_0)$   
 $\Rightarrow \exists l_0 PA \vdash Bew(l_0, m_0) \Rightarrow PA \vdash C$   
 $\perp$

Satz von Tarski

$\exists \omega(n)$  eine Formel in Sprache PA, sodass  
 $\forall n$  gilt  $\omega(n) \Leftrightarrow$  Satz mit Gödelnummer n ist wahr

$\Gamma m_0 = \Gamma \neg \omega(S(x_0, x_0)) \quad \top$   
 $n_0 = \Gamma \neg \omega(S(m_0, m_0)) \quad \top = S(m_0, m_0)$   
 $\omega(n_0) \Leftrightarrow \neg \omega(S(m_0, m_0)) \Leftrightarrow \neg \omega(n_0) \quad \perp$

Der zweite unvollständigkeitsatz von Gödel

$PA \vdash CON(PA)$

Lemma Gödel

A einseitige Formel  
 $\Rightarrow \exists \psi PA \vdash \psi \Leftrightarrow A(\Gamma \psi \Gamma)$

$\Gamma$  Sei  $\theta$  eine Formel in einer Variable  
 Es gibt eine Formel  $\sigma$ , sodass  
 $PA \vdash \sigma(\Gamma \theta \Gamma) \Leftrightarrow A(\Gamma \theta(\Gamma \theta \Gamma) \Gamma) \quad *$   
 speziell:  
 $PA \vdash \sigma(\Gamma \sigma \Gamma) \Leftrightarrow A(\Gamma \sigma(\Gamma \sigma \Gamma) \Gamma)$   
 $PA \vdash \psi \Leftrightarrow A(\Gamma \psi \Gamma) \quad \perp$

\*  $\theta \mapsto \theta(\Gamma \theta \Gamma)$  ist eine rekursive Abbild. von Formeln  
 wird also durch Funktion  $\chi(v, w)$  repräsentiert, für die gilt:  
 $PA \vdash \chi(\Gamma \theta \Gamma, \Gamma \psi \Gamma) \Leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \theta(\Gamma \psi \Gamma)$   
 $PA \vdash \forall v \exists w \chi(v, w)$   
 also  
 $PA \vdash \forall w \chi(\Gamma \theta \Gamma, w) \Leftrightarrow w = \Gamma \theta(\Gamma \theta \Gamma) \Gamma$   
 $\sigma(v) := \exists w \chi(v, w) \wedge A(w)$   
 $PA \vdash \sigma(\Gamma \theta \Gamma) \Leftrightarrow \exists w \chi(\Gamma \theta \Gamma, w) \wedge A(w)$   
 $PA \vdash \sigma(\Gamma \theta \Gamma) \Leftrightarrow A(\Gamma \theta(\Gamma \theta \Gamma) \Gamma)$

Bew 2. unvollst. Satz

Sei  $\psi$  so dass  $PA \vdash \psi \Leftrightarrow A(\Gamma \psi \Gamma)$   $A(x) : \neg \exists y Bew(y, x)$   $CON(PA) : A(\Gamma \exists v (v = v))$

$CON(PA) \rightarrow PA \vdash \psi$  Bew:  
 $\neg PA \vdash \psi$   
 $\exists l PA \vdash Bew(l, \Gamma \psi \Gamma)$   
 $PA \vdash \neg A(\Gamma \psi \Gamma)$   
 $PA \vdash \neg \psi$   
 $PA \vdash \psi \wedge \neg \psi$   
 $PA \vdash \neg CON(PA)$

Diese Beweis kann in PA formalisiert werden

$PA \vdash CON(PA) \rightarrow A(\Gamma \psi \Gamma)$   
 $PA \vdash CON(PA) \rightarrow \psi$   
 $PA \vdash CON(PA)$  wurde richtigem  $PA \vdash \psi$   
 also  $PA \vdash CON(PA)$

Struktur  $\mathcal{M} = \langle M, f_1, \dots, f_n, \dots, P_1, \dots, P_m, \dots \rangle$   $M \neq \emptyset$   $f_n^{op}: M^{op} \rightarrow M$   $v: S \rightarrow S'$  isomorphieren  
Typus  $\tau(\mathcal{M}) = \langle \langle a_1, \dots, a_n, \dots \rangle, \langle b_1, \dots, b_m, \dots \rangle \rangle$   $P_m^{dm}: M^{dm} \rightarrow \{0,1\}$   $v: M \rightarrow M'$  bijektiv  
Sprache d. Prädikatenlogik erster Stufe zu Struktur vom Typus  $\tau$   
 $f_n, P_m$  Funktions und Prädikats zeichen  
 $\{x, y, \dots\}$  Variablen  
 $\wedge, \neg, \dots$  logisch Zeichen  
Wahrheitsinkoppel:  $I: \Sigma \times T \rightarrow M$   
 $I(\gamma, x[k]) (c) = c_k$   
 $I(\gamma, f^i(t_1, t_2)) (c) = f^i(I(\gamma, t_1)(c), I(\gamma, t_2)(c))$   
 $J: \Sigma \times F \rightarrow \{0,1\}$   
 $J(\gamma, t_1 = t_2) (c) = \delta(I(\gamma, t_1)(c), I(\gamma, t_2)(c))$   
 $J(\gamma, \forall x \phi) (c) = \max_{c_i} J(\gamma, \phi)(c_0, c_1, c_2, \dots)$   
 $\mathcal{L}_\tau$  Sprache zur Struktur vom Typus  $\tau$   
 $T$  Theorie in  $\mathcal{L}_\tau$  besteht aus einer Klasse von Sätzen  
 $\Sigma$  Klasse d. Strukturen auf  $M$

Elementare Äquivalenz

$\mathcal{M}_1 \equiv_{\mathcal{L}} \mathcal{M}_2 : \forall \phi \mathcal{M}_1 \models \phi \iff \mathcal{M}_2 \models \phi$   
 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  Strukturen vom selben Typus

Endliche Strukturen von endlichem Typ sind genau dann isomorph, wenn sie elementar äquivalent sind

Äquivalenz

$\langle a_1, \dots, a_m \rangle \equiv_n \langle b_1, \dots, b_m \rangle$   
 wird induktiv definiert:  
 $\langle a_1, \dots, a_m \rangle \equiv_0 \langle b_1, \dots, b_m \rangle$  gdw  $\exists i \in \{1, \dots, m\} a_i = b_i$   
 $\langle a_1, \dots, a_m \rangle \equiv_{n+1} \langle b_1, \dots, b_m \rangle$  gdw  $\forall a_{m+1} \exists b_{m+1} (\langle a_1, \dots, a_{m+1} \rangle \equiv_n \langle b_1, \dots, b_{m+1} \rangle)$   
 $\forall b_{m+1} \exists a_{m+1} (\langle a_1, \dots, a_{m+1} \rangle \equiv_n \langle b_1, \dots, b_{m+1} \rangle)$   
 $\mathcal{M}_1 \equiv_n \mathcal{M}_2 : \langle \rangle \equiv_n \langle \rangle$

Modem

welche  $n$  Äquivalenzklassen existieren bei Graphen?

Endlichkeitsaufg.

Falls Struktur von endl. Typ, existieren nur endlich viele  $n$  Äquivalenzklassen

Interpretation is Spiel

Spiel  $\Gamma(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, n)$   $I$  spielt auf Struktur  $\mathcal{M}_1$   
 $II$  spielt auf Struktur  $\mathcal{M}_2$   
 $n$  Züge geht das Spiel

$I$  will so spielen, dass  $II$  nicht mehr ziehen kann. Gelingt ihm das, so hat  $I$  gewonnen.

$\mathcal{M}_1 \equiv_n \mathcal{M}_2$   $II$  hat Gewinnstrategie in  $\Gamma(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, n)$   
 $\mathcal{M}_1 \not\equiv_n \mathcal{M}_2$   $I$  hat Gewinnstrategie in  $\Gamma(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, n)$

$\mathcal{M}_1 \equiv_{\mathcal{L}} \mathcal{M}_2 \iff \forall n \mathcal{M}_1 \equiv_n \mathcal{M}_2$

$\mathcal{M}_1 \equiv_n \mathcal{M}_2 \iff \forall \phi$  mit Quantifiz.  $\neq n$   
 $\mathcal{M}_1 \models \phi \iff \mathcal{M}_2 \models \phi$

Canbr

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  abzählbare Strukturen vom selben Typus  
 $\langle \rangle_{\mathcal{M}_1} \equiv_n \langle \rangle_{\mathcal{M}_2}$   
 $\langle a_1, \dots, a_m \rangle_{\mathcal{M}_1} \equiv_n \langle b_1, \dots, b_m \rangle_{\mathcal{M}_2} \iff \langle a_1, \dots, a_m \rangle_{\mathcal{M}_1} \equiv_{n-1} \langle b_1, \dots, b_m \rangle_{\mathcal{M}_2}$   
 $\implies \mathcal{M}_1 \text{ iso } \mathcal{M}_2$

Kategorialität

$T$  eine Theorie vom Typus  $\tau$   
 $T$  heisst  $\aleph_0$  kategorisch, falls alle abzählbaren Modelle d. Mächtigkeit  $\aleph_0$  isomorph sind.

$\aleph_1$  kategorisch  $\implies \aleph_2$  kategorisch was lange ungelöst

Struktur

$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$  falls beide Strukturen gleichen Typus  
 $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$  Prädikate u. Funktionen abgeschrieben auf Teilraum

Elementare Isomorphie

$\mathcal{M}_1 \subseteq_{el} \mathcal{M}_2 : J(\mathcal{M}_1, \phi)(c) = J(\mathcal{M}_2, \phi)(c) \quad \forall c \text{ in } \mathcal{M}_1$

Satz von Löwenheim Skolem

Jede unendliche Struktur besitzt eine abzählbare elementar äquivalente Teilstruktur

$\exists \mathcal{J}, \mathcal{J}'$  Strukturen vom selben Typus  
 $\forall \mathcal{M} \exists \mathcal{M}' \text{ mit } \mathcal{J} = \cup \mathcal{M}$   
 $\Rightarrow \mathcal{J} \equiv \mathcal{J}'$

$\Gamma$  Struktur vom Typus  $\tau$   $\mathcal{J}$  unendlich  
 $\phi$  Satz in pränexer Form  $\Rightarrow \phi^*$  Skolemisierte Satz in Struktur  $\mathcal{J}$   
 $\phi^*$  wahr in  $\mathcal{M}$  können Funkt. Werte finden (Auswertung)  
 $M_0$  abzählbare Teilmenge von  $M^*$   
 Bilden  $M'$   $M_0 \subseteq M' \subseteq M^*$   $M'$  abzählb. abgeschl. bez. allen Funkt.  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}' \subseteq \mathcal{J}^*$   
 Allsätze  $\phi$  aus  $\mathcal{J}$  gelten in  $\mathcal{J}'$   $\phi^*$  gilt in  $\mathcal{J}'^*$   
 $\mathcal{J}$  gilt in  $\mathcal{J}$   
 $\mathcal{J}'$  gilt in  $\mathcal{J}'$   
 $\mathcal{J}^*$  gilt in  $\mathcal{J}^*$   
 $\mathcal{J}$  gilt in  $\mathcal{J}'^*$  —

vollständig Theorien

$T$  Menge von Sätzen vom Typus  $\tau$  (Theorie in  $\mathcal{L}_\tau$ )  
 ①  $T$  besitzt Modelle  
 ②  $\phi$  Satz  $\phi$  gilt in allen Modellen oder in keinem Modell  
 $\Rightarrow T$  heißt collst. Theorie

Cor von LS

$T$  Theorie mit (1)  $T$  besitzt nur unendl. Modelle  
 (2) zwei abzählb. Modelle sind isomorph  
 $\Rightarrow T$  ist collständig

Ultraprodukte:

Motivation: neue Modelle evtl. Nichtstandard Modelle aus allen Modellen  
 Konstruktion:  $J$  Menge mit Ultrafilter  $U$   
 $\mathcal{J}_i \in J$  Struktur vom Typus  $\tau$   
 $\mathcal{J} := \prod_{i \in I} \mathcal{J}_i / U$  Struktur vom Typus  $\tau$   
 Bsp  $U = U_0 : \prod \mathcal{J}_i / U_0 \cong \mathcal{J}_0$   
 Lemma  $\phi$  Satz in  $\mathcal{L}_\tau$   
 $\mathcal{J}(\mathcal{J}_i, \phi)(c) = 1 \Leftrightarrow \{c \mid \mathcal{J}_i(\mathcal{J}_i, \phi)(c) = 1\} \in U$

Kompaktheitsatz:

$\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, \dots$  abzählb. Folge von Sätzen in  $\mathcal{L}_\tau$  geschl.  
 Für  $\forall n \exists \mathcal{J}_n(\tau)$  Modelle für  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$   
 $\Rightarrow \exists \mathcal{J}$  Modell, worin alle Sätze gelten

Löwenheim Skolem  $\uparrow$

$\mathcal{J}$  unendl. Struktur  
 $\aleph$  Kardinalzahl  $> \mathcal{J}$   
 $\Rightarrow \exists \mathcal{J}'$  Struktur d. Mächtigkeit  $\aleph$ , worin gleiche Sätze gelten

Ultralimites

$\mathcal{J}$  Struktur  
 $M_n$  Mengen mit  $U_n$  Ultrafiltern  
 $\mathcal{J}_0 := \mathcal{J}$   
 $\mathcal{J}_{n+1} := \mathcal{J}_n / U_n$   $\mathcal{J}_n \equiv \mathcal{J}_{n+1}$   
 $\mathcal{J}_\omega := \cup \mathcal{J}_n$  Ultralimites

Satz von Keisler

elementar äquivalente Strukturen besitzen isomorphe Ultrapotenzen

elementare Klassen

$\tau$  Typus  $\phi$  Satz geschrieben in der  $V(\tau)$  Klasse d.  $\tau$  Strukturen  
 $Mod(\phi)$  Klasse der  $\tau$  Strukturen, welche  $\phi$  erfüllen  
 $T$  Menge von Sätzen geschrieben in  $\mathcal{L}_\tau$  ( $T$  Theorie in  $\mathcal{L}_\tau$ )  
 $Mod(T)$  Klasse der  $\tau$  Strukturen in denen Sätze von  $T$  gelten  
 ( $Mod(T) \subseteq V(\tau)$  definieren)

Problem  $k \in V(\tau)$  gegeben  
 können wir Theorie  $T$  finden, sodass  $k \in Mod(T)$   
 oder gar  $\phi$  sodass  $k \in Mod(\phi)$

EC Klasse der  $k$  für die  $\exists \phi \quad k \in Mod(\phi)$  elementare Klasse  
EC<sub>A</sub> Klasse der  $k$  für die  $\exists T \quad k \in Mod(T)$

$K$  Klasse von Strukturen in  $V(\tau)$   
 $Th(K)$  Klasse der Sätze, die in allen Strukturen gültig sind  
Theorie für alle Strukturen  $K$  Klasse von Strukturen

$k \in EC \Rightarrow \neg k \in EC$

$\neg k \in Mod(\phi) \Rightarrow k \in Mod(\neg \phi)$

können Topologie auf  $V$  einrichten

$\underline{I} = \{K\}$   
 $EC$  ist eine Mengenalgebra auf  $V$   $k_1, k_2 \in EC \Rightarrow k_1 \cup k_2, k_1 \cap k_2 \in V, \neg k_1 \in EC$   
 $EC_A$  ist eine  $\sigma$  Algebra auf  $V$  und ist eine Topologie auf  $V$  die größer ist als die diskrete Topologie  $\underline{I}$

$k \in EC \iff k, \neg k \in EC_A$

$EC$  ist die Mengenalgebra der offenen und abgeschlossenen Elemente der Topologie  $EC_A$

$\Gamma$  müssen wir zeigen:  $k, \neg k \in EC_A \Rightarrow k \in EC$

$k = Mod(T_1)$   
 $\neg k = Mod(T_2)$   
 $T_1 \cup T_2$  besitzt keine Modelle  
 Sei  $\phi_1$  Konj. von Sätzen aus  $T_1$  Kompatibilitätsatz  
 $\phi_2$  Konj. von Sätzen aus  $T_2$   
 $\phi_1 \wedge \phi_2$  besitzt kein Modell  
 d.h.  $\phi_1 \rightarrow \neg \phi_2$  gilt in allen Strukturen  
 $k = Mod(\phi_1)$  dann  $\exists \gamma \Rightarrow \gamma \in Mod(T_1) \Rightarrow \gamma \in Mod(\phi_1)$   
 $\neg \exists \gamma \Rightarrow \gamma \in \neg k = Mod(T_2) \Rightarrow \gamma \in Mod(\phi_2) \Rightarrow \gamma \notin Mod(\phi_1)$

$EC_A$  ist eine kompakte Topologie

$\Gamma \bigcup Mod(T_i) = V$   
 $\Rightarrow \exists$  endl. Teilmenge  $E \subseteq I \quad \bigcup_{i \in E} Mod(T_i) = V$   
 $\bigcup Mod(T_i) = V$   
 $\Rightarrow Mod(\bigvee T_i) = V$

$K$  abgeschl. gegem. Element. Äquivalenz und ultraproduktionen  
 $\Rightarrow k \in Mod(Th(K))$

$k \in Mod(Th(k))$  trivial

• FIN finite Analysis u. Mycielski

"analysis without  
actual infinity"  
JSL 46 625-633

Logik  
Sprache

PL 1. Stufe mit =  
 $\{0, \omega_1, \aleph_1, \dots, \aleph_\alpha, \dots\}$

5 Axiomoperat.  
w.p. abzählbare Mengen u. konst. w.p.

- Sji finite Modelle d. Kardinalzahltheorie u. Kaluza
- HST alternative Mengenlehre u. Vopenka
- SFT algorithm Models von Engeler (1984)
- Fgp finite Geometrien von Kuratowski

Approximation d. Geometrie  
durch endl. Geometrien

1951 'A note on a  
finite Approximation of  
the euclidean plane Geometry'

Societas Scientiarum Fennica.  
Commentationes Physico Mathematicae 15 Nr. 19. S. 1-11

1951 Järnefelt

QM finitistisch: QMP

$$f(x) = \sum_{y=0}^{p-1} M(x,y) g(y)$$

Integralen

$$d(x) = 1 - x^{p-1}$$

Diracsche Deltafunktion

# Numerische Algorithmen

## Allgemeine Probleme

- Algorithmus *finit* → Diskretisationsfehler
- $M_c$  ist kein Körper → Rundungsfehler

Effekte: Auslöschung Subtraktion beinahe gleich grosser Zahlen  
Verschmierung relativ grosse Teilsummen, kleines Resultat  
Numerische Instabilität Fortpflanzung der Rundungsfehler  
kondition  $\delta(\varepsilon)$  möglichst klein

$y(x_n)$  math. exakte Werte  
 $y_n$  ideale num. Werte m. unendl. vielen Stellen  
 $\tilde{y}_n$  mit endl. Stellenzahl berechnete Werte

Rundungsfehler  $r_n = \tilde{y}_n - y_n$   
 Diskretisationsfehler  $e_n = y_n - y(x_n)$

Tricks: - kleine Partialsummen den zuerst  
 - Differenz beinahe gleich grosser Zahlen durch Umformen vermeiden  
 - backward error analysis  $\tilde{y} = \tilde{P}x$   
 $\tilde{x} = \tilde{Q}y$

## Mittelwert und Varianz

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{Mittelwert}$$

$$\delta_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \mu_n)^2 \quad \text{Varianz}$$

$$\mu_0 = 0 \quad \delta_0^2 = 0$$

$$\mu_n = \frac{n-1}{n} \mu_{n-1} + \frac{1}{n} x_n$$

$$\delta_n^2 = \frac{n-1}{n} \delta_{n-1}^2 + \begin{cases} 0 & n=1 \\ \frac{1}{n-1} (x_n - \mu_n)^2 & n>1 \end{cases}$$

## Iterationsverfahren

### gewöhnliche Iteration

$$x_0 ; x_{n+1} = f(x_n)$$

linear, geometrisch  $f'(s) \neq 0$   
 quadratisch  $f'(s) = 0 \quad f''(s) \neq 0$

$|f'(s)| \geq 1$  Konvergenz nur in Ausnahmefällen

### Aitken'sches $\Delta^2$ Verf.

$$x_0 ; x_n' = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

linear aber  $\frac{x_n' - s}{x_n - s} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$

$f'(s) = 0$  keinen Vorteil  
 $x_0 \neq s$  Scheinkonvergenz bei Hin und Herpendeln

### Steffensen Iteration

$$\begin{array}{cccc} x_0^{(0)} & \rightarrow & x_0^{(1)} & \rightarrow & x_0^{(2)} & \rightarrow & \dots \\ x_1^{(0)} & \rightarrow & x_1^{(1)} & \rightarrow & x_1^{(2)} & \rightarrow & \dots \\ x_2^{(0)} & \rightarrow & x_2^{(1)} & \rightarrow & x_2^{(2)} & \rightarrow & \dots \end{array}$$

quadratisch auch für  $f'(s) > 1$   $f'(s) = 1$  geht nicht  
 lokal konvergentes Verfahren!

### Newton Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

$g'(s) \neq 0$  quadratische Konvergenz

### Regula falsi

$$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_{n-1})$$

$x_n, x_{n-1}$  relativ gute Näherungen

### Bernoulli Verfahren

$x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  Startwerte

$$x_n = -(a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k}) \quad q_n = \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

bei dominanten Nullstellen

$$\left. \begin{aligned} a_n &= -\left(1 + \frac{\Delta q_n}{\Delta q_{n-1}}\right) \cdot q_n \\ b_n &= \frac{\Delta q_n}{\Delta q_{n-1}} q_{n-1} q_n \end{aligned} \right\} z^2 + a z + b$$

bei 2 dominanten Nullstellen

bessere Startwerte:

$$\begin{aligned} x_0 &= -a_1 \\ x_1 &= -(2a_2 + a_1 x_0) \\ x_2 &= -(3a_3 + a_2 x_0 + a_1 x_1) \\ &\vdots \\ x_k &= -(k+1 a_{k+1} + a_k x_0 + a_{k-1} x_1 + \dots + a_2 x_{k-2}) \end{aligned}$$

### gestrafftes Bernoulli V.

Startwerte:

$$q_1 = -\left(a_1 - \frac{2}{a_1} a_2\right)$$

$$q_2 = -\left(a_1 + \frac{1}{q_1} \left(a_2 - \frac{3}{a_1} a_3\right)\right)$$

$$q_3 = -\left(a_1 + \frac{1}{q_2} \left(a_2 + \frac{1}{q_1} \left(a_3 - \frac{4}{a_1} a_4\right)\right)\right)$$

$$q_n = -\left(a_1 + \frac{1}{q_{n-1}} \left(a_2 + \frac{1}{q_{n-2}} \left(a_3 + \frac{1}{q_{n-3}} a_4\right)\right)\right) \dots$$

### Horner Algorithmus

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = p(x)$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & & \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n = p(x) & & \\ c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} = p'(x) & & & \\ d_0 & d_1 & \dots & d_{n-1} = \frac{p''(x)}{2!} & & & \\ \vdots & & & & & & \end{array}$$

$b_n = 0 \Rightarrow b_0 \dots b_{n-1}$  koef. d. durch  $x - x_0$  divid. Polynoms für Deflation w.



**Tschubischaf Ausgleichung**

- Startreferenz z.B.  $i_1=1, i_2=(m+1) \div 2, i_3=m$
- Referenz bezgl.  $(x_1, x_2, x_3)$
- Referenzabweich Residuen  $r_1 \dots r_m$
- $\rho = |r_i| = \max |r_i|$
- neue Ref mit  $i_0$  und zalten Stellen so dass bunte Reihe

**Austausch Algorithmus**

- $a'_{pq} = \frac{1}{a_{pq}}$  Pivot
- $a'_{pj} = -a_{pq} a_{pj}$  Pivotzeile ohne Pivot
- $a'_{ij} = a_{ij} + a'_{pj} a_{iq}$  Tableau ohne Pivotzeile u. l.
- $a'_{iq} = a_{pq} a_{iq}$  Pivotkolonne ohne Pivot
- Matrizeninversion  $\sim n^3 \mu$

**Gauss-Jordan Algorithmus**

- Inversion aber jeweils eine Kolonne weglassen
- $\sim \frac{n^3}{2} \mu$

**Simplex Algorithmus**

- Pivot Element negativ
- Pivot Element oberhalb positivem z Element
- p so wählen, dass charakterist. Koeffizienten am negativsten

	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	1
$y_1$					
$\vdots$					
$y_m$					
z					

- Minimierung:
- Umkehrung d. Vorzeichen
- Vorbereitungsschritt:
  - Kolonne q so, dass  $\forall a_{iq} > 0$
  - Zeile p so, dass  $\frac{a_{pq}}{a'_{pq}} = \max \frac{a_{pq}}{a'_{pq}}$

$$V = X \cdot A$$

$$A^T A = X^T A^T A$$

$$V^T (I - T A^T (A^T A)^{-1} A^T) V = 0$$

Minimierung d. minimalen quadratischen

# Approximationsalgorithmen

## Lagrange Interpolation

Stützstellen  $x_0 \dots x_n$   $p(x_i) = f_i$

$$p(x) = \sum_{m=0}^n \left( \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{x - x_k}{x_m - x_k} \right) f_m$$

Baryzentrische Darstellung

$$p(x) = \frac{\sum_{m=0}^n \frac{\omega_m}{x - x_m} \cdot f_m}{\sum_{m=0}^n \frac{\omega_m}{x - x_m}} ; \omega_m = \frac{1}{l'(x_m)}$$

$$l(x) = \prod_{k \neq m} (x - x_k)$$

gleichabständige Stützstellen:

$$p(x) = \frac{\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{f_m}{x - x_m}}{\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{1}{x - x_m}}$$

Tschebyscheff Punkte:

$$p(x) = \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k \sin \varphi_k \frac{f_k}{x - \cos \varphi_k}}{\sum_{k=0}^n (-1)^k \sin \varphi_k \frac{1}{x - \cos \varphi_k}} ; \varphi_k = \frac{2k+1}{2n+2} \pi$$

## Hermite Interpolation

$p(x_i) = f_i$   $i = 0 \dots n$

$p'(x_i) = f'_i$   $i = 0 \dots n$

$$p(x) = (l(x))^2 \sum_{k=0}^n \frac{\omega_k^2}{x - x_k} \left\{ \left( \frac{1}{x - x_k} - u_k \omega_k \right) f_k + f'_k \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} l(x) &= (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \\ \omega_k &= \frac{1}{l'(x_k)} \quad u_k = \frac{1}{l''(x_k)} \end{aligned} \right\} k = 0 \dots n$$

baryzentrische Darstellung

$$p(x) = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{\omega_k^2}{x - x_k} \left\{ \left( \frac{1}{x - x_k} - u_k \omega_k \right) f_k + f'_k \right\}}{\sum_{k=0}^n \frac{\omega_k^2}{x - x_k} \left\{ \frac{1}{x - x_k} - u_k \omega_k \right\}}$$



# Integrationsalgorithmen

## Trapezregel

$$T(h) = h \left( \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right)$$

## Mittelpunktsregel

$$M(h) = h \left( f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + \dots + f(x_{n-1/2}) \right)$$

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} T(h) + \frac{1}{2} M(h)$$

## Rombergalgorithm.

$$T_{n,0} = T\left(\frac{b-a}{2^n}\right)$$

$$T_{n,m} = \frac{4^m T_{n,m-1} - T_{n-1,m-1}}{4^m - 1}$$

## klassisches Runge-Kutta-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot F(x_n, y_n, h)$$

$$F(x, y, h) = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x, y)$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = f(x+h, y+h \cdot k_3)$$

entspr. für Diffgl. Systeme

Reduktion v. Dgl. höherer Ordnung auf Dgl. Systeme u. Ordnung.

$$y'' = f(x, y, y') \quad \begin{array}{l} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{array}$$

$$y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} z \\ f(x, y, z) \end{pmatrix}$$

## Trapezverfahren

implizite Gl.

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2} \left( f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right)$$

geringere Genauigkeit als Rk.  
absolute Stabilität

Handwritten text at the top right of the page.

$$x|y = \frac{1}{\sum_{x'} p(x', y)} p(x, y)$$

Handwritten text in a box on the right side.

$$p(x, y) = \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i)$$

Handwritten text in a box on the right side.

$$p(x, y) = \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i)$$

$$p(x, y) = \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i)$$

Handwritten text in a box on the right side.

Handwritten text in a box on the right side.

$$p(x, y) = \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i)$$

Handwritten text below the boxed equations.

Handwritten text below the boxed equations.

$$p(x, y) = \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i)$$

$$p(x, y) = \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i)$$

Handwritten text in a box on the right side.

$$p(x, y) = \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i)$$

Handwritten text below the boxed equations.

# Sätze

## Iterationsverfahren

- I  $f(I) \subseteq I$   
 II  $f$  auf  $I$  stetig  
 III  $(\exists L) (\forall x_1, x_2 \in I) |L| < 1 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$
- $\Rightarrow$
- a)  $\exists!$  Fixpunkt  $s$   
 b)  $(\forall x_0 \in I) \{x_n\} \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$   
 c)  $|x_n - s| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$

## Approximationsatz von Weierstrass

- I  $[a, b]$  endliches, abgeschl. Intervall  
 II  $f$  auf  $[a, b]$  stetig
- $(\forall \varepsilon > 0) (\exists p) |f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in [a, b])$

## Taylor'scher Satz

$$p(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!} (x - \xi) + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - \xi)^{n+1} \quad \xi_x \in [\xi, x]$$

## Interpolationspolynom

$\exists!$  Polynom  $p$  mit Grad  $p \leq n$  welches an  $n+1$  verschiedenen Stellen  $x_k$  vorgegebene Werte  $f_k$  annimmt

## Fehler vom Interpolationspolynom

$p$  obiges Interpolationspolynom

$$(\forall x \in I) (\exists \xi_x \in I \cup [x_n, x] \cup [x_0, x]) f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

## Satz von Powell

Werden bei der Interpolation eine auf  $[-1, 1]$  stetigen Funktion  $f$  durch ein Polynom vom Grade  $n$  als Stützstellen die T-Punkte gewählt, so ist für  $n \leq 20$  der Approximationsfehler höchstens 4 mal und für  $n \leq 100$  höchstens 5 mal so groß wie bei der Approximation von  $f$  durch irgend ein Polynom vom Grade  $n$ .

The first part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is continuous at  $x_0$ . To do this, we need to show that for any  $\epsilon > 0$ , there exists a  $\delta > 0$  such that if  $|x - x_0| < \delta$ , then  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

The second part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is differentiable at  $x_0$ . To do this, we need to show that the limit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  exists.

The third part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is twice differentiable at  $x_0$ . To do this, we need to show that the limit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2}$  exists.

The fourth part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is three times differentiable at  $x_0$ . To do this, we need to show that the limit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2}{h^3}$  exists.

The fifth part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is four times differentiable at  $x_0$ . To do this, we need to show that the limit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3}{h^4}$  exists.

The sixth part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is five times differentiable at  $x_0$ . To do this, we need to show that the limit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 - \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4}{h^5}$  exists.

The seventh part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is six times differentiable at  $x_0$ . To do this, we need to show that the limit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 - \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 - \frac{1}{120}f^{(5)}(x_0)h^5}{h^6}$  exists.

The eighth part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is seven times differentiable at  $x_0$ . To do this, we need to show that the limit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 - \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 - \frac{1}{120}f^{(5)}(x_0)h^5 - \frac{1}{5040}f^{(6)}(x_0)h^6}{h^7}$  exists.

The ninth part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is eight times differentiable at  $x_0$ . To do this, we need to show that the limit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 - \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 - \frac{1}{120}f^{(5)}(x_0)h^5 - \frac{1}{5040}f^{(6)}(x_0)h^6 - \frac{1}{362880}f^{(7)}(x_0)h^7}{h^8}$  exists.

The tenth part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is nine times differentiable at  $x_0$ . To do this, we need to show that the limit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 - \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 - \frac{1}{120}f^{(5)}(x_0)h^5 - \frac{1}{5040}f^{(6)}(x_0)h^6 - \frac{1}{362880}f^{(7)}(x_0)h^7 - \frac{1}{2520000}f^{(8)}(x_0)h^8}{h^9}$  exists.

The eleventh part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is ten times differentiable at  $x_0$ . To do this, we need to show that the limit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 - \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 - \frac{1}{120}f^{(5)}(x_0)h^5 - \frac{1}{5040}f^{(6)}(x_0)h^6 - \frac{1}{362880}f^{(7)}(x_0)h^7 - \frac{1}{2520000}f^{(8)}(x_0)h^8 - \frac{1}{18144000}f^{(9)}(x_0)h^9}{h^{10}}$  exists.

The twelfth part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is eleven times differentiable at  $x_0$ . To do this, we need to show that the limit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 - \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 - \frac{1}{120}f^{(5)}(x_0)h^5 - \frac{1}{5040}f^{(6)}(x_0)h^6 - \frac{1}{362880}f^{(7)}(x_0)h^7 - \frac{1}{2520000}f^{(8)}(x_0)h^8 - \frac{1}{18144000}f^{(9)}(x_0)h^9 - \frac{1}{132710400}f^{(10)}(x_0)h^{10}}{h^{11}}$  exists.

The thirteenth part of the proof is to show that the function  $f(x)$  is twelve times differentiable at  $x_0$ . To do this, we need to show that the limit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 - \frac{1}{24}f^{(4)}(x_0)h^4 - \frac{1}{120}f^{(5)}(x_0)h^5 - \frac{1}{5040}f^{(6)}(x_0)h^6 - \frac{1}{362880}f^{(7)}(x_0)h^7 - \frac{1}{2520000}f^{(8)}(x_0)h^8 - \frac{1}{18144000}f^{(9)}(x_0)h^9 - \frac{1}{132710400}f^{(10)}(x_0)h^{10} - \frac{1}{950400000}f^{(11)}(x_0)h^{11}}{h^{12}}$  exists.

# Heuristik

## Iterationsbeschleunigung

"Man benützt die Kenntnis des ungefähren Verhaltens des Fehlers zur ungefähren Elimination des Fehlers"

$$e_n := x_n - s \quad g := f'(s) \quad \text{Def.}$$

$$e_n \sim c \cdot g^n \quad \text{gefunden}$$

$$x_n \sim s + c \cdot g^n$$

$$\left. \begin{aligned} x_n &= s + c \cdot g^n \\ x_{n+1} &= s + c \cdot g^{n+1} \\ x_{n+2} &= s + c \cdot g^{n+2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

## Anwendung d. Iteration

Kettenbrüche:

$$x = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_{n+2}}$$

Schachtelungen  $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

Auflösen v. Gleichungen  $x = \sin x \cdot \cos x$

$$x_{n+1} = \sin x_n \cdot \cos x_n$$

Iteration  $\rightarrow$  Gleichungen

$$s = f(s)$$

$$s - f(s) = 0$$

Gleichungen  $\rightarrow$  Iteration

$$g(s) = 0$$

$$s = s + k \cdot g(s)$$

## Rekursionsformeln

Dominante Nullstelle manifestiert sich als Grenzwert der Quotienten aufeinanderfolgender Glieder der Folge. Bernoulli

$$p(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k = 0$$

$$x^k \cdot p(x^{-1}) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k = 0$$

$\rightarrow$  kleinste Nullstelle

## Barzentrische Darstellung

Lagrange: 
$$p(x_k) = \sum_{m=0}^n l_m(x_k) f_m$$

$$l_m(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^n \frac{x - x_k}{x_m - x_k}$$

Zähler  $l(x)$

Nenner von  $l_m(x)$ :

$$\prod_{k \neq m} (x_m - x_k) = \lim_{x \rightarrow x_m} \prod_{k \neq m} (x - x_k) = \frac{l(x)}{(x - x_m)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_m} \frac{l'(x) - l'(x_m)}{(x - x_m)} = l'(x_m)$$

$$w_m := \frac{1}{l'(x_m)}$$

$$l_m(x) = \frac{l(x) \cdot w_m}{x - x_m}$$

$$p(x) = l(x) \cdot \sum_{k=0}^n \frac{w_k f_k}{x - x_k}$$

Clou:  $f(x) \equiv 1$

$$1 = l(x) = \sum_{m=0}^n \frac{\omega_m}{x-x_m} \quad \text{"Eindeutigkeit"}$$

$$\Rightarrow l(x) = \frac{1}{\sum_{m=0}^n \frac{\omega_m}{x-x_m}}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{\sum_{m=0}^n \frac{\omega_m}{x-x_m} f_m}{\sum_{m=0}^n \frac{\omega_m}{x-x_m}}$$

**Verbesserung der Integration (Romberg)**

Wieder: Resultatverfeinerung durch Kenntnis des Fehlerverhaltens

Partielles Integrieren:

$$\Rightarrow \int_0^n g(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} g(t) dt$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} g(0) + g(1) + g(2) + \dots + g(n-1) \right\}$$

$$- \frac{1}{12} (g'(n) - g'(0))$$

$$+ \frac{1}{120} (g''(n) - g''(0))$$

$$+ \sum_{k=0}^n \int_0^1 p_4(t) g^{(4)}(t+k) dt$$

$$T(h) = I - C_1 h^2 + O(h^4)$$

$$T_n := \frac{b-a}{2^n}$$

$$T_n = I + D_1 \cdot 2^{-2n} + O(2^{-4n})$$

Clou:  $T_n^* = \alpha \cdot T_n + \beta T_{n-1}$

$$T_n^* = \underbrace{(\alpha + \beta)}_1 \cdot I + \underbrace{\alpha \cdot D_1 \cdot 2^{-2n} + \beta \cdot D_1 \cdot 2^{-2(n-1)}}_0$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{matrix} \right\} \alpha = \frac{4}{3} \quad \beta = -\frac{1}{3}$$

$$T_n^* := \frac{4}{3} T_n - \frac{1}{3} T_{n-1} \quad \text{(Simpson)}$$

$$\Rightarrow T_{n,0} = T\left(\frac{b-a}{2^n}\right)$$

$$T_{n,m} = \frac{4^m T_{n,m-1} - T_{n-1,m-1}}{4^m - 1}$$

**Stirling'sche Formel**

$$\int_1^n g(t) dt = \left[ \frac{1}{2} g(1) + g(2) + \dots + \frac{1}{2} g(n) \right] - A [g'(n) - g'(1)] + \int_0^1 [p_2(t) \sum_{k=1}^{n-1} g''(t+k)] dt$$

$$\log n! = \frac{1}{2} \log 1 + \log 2 + \dots + \frac{1}{2} \log n + \frac{1}{2} \log n$$

$$\int \log t dt = t \cdot \log t - t \Big|_1^n = n \cdot \log n - n + 1$$

$$g(t) = \log t \quad g'(t) = \frac{1}{t} \quad g''(t) = -\frac{1}{t^2}$$

$$\begin{aligned} \log(n!) &= n \cdot \log n - n + 1 + \frac{1}{2} \log n + A \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] + \int_0^1 p_2(t) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n+t)^2} dt \\ &= n (\log n - \log e) + \frac{1}{2} \log n + 1 + A \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] + \int_0^1 p_2(t) \cdot r_n(t) dt \\ &= \log \left\{ \left( \frac{n}{e} \right)^n \sqrt{n} \right\} + 1 + A \left[ \frac{1}{n} - 1 \right] + \int_0^1 p_2(t) r_n(t) dt \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n!}{\sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n} = \log C = 1 - A + \int_0^1 p_2(t) r(t) dt$$

$$n! \approx C \sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n$$

Wallis'sches Produkt:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \quad ; \quad w_n = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots (2n)(2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2 \cdot 2^{2n} \cdot n!^2}{(2n)!^2 (2n+1)} = \frac{2^{4n} \cdot (n!)^4}{(2n)!^2 (2n+1)}$$

$$\approx \frac{2^{4n} \cdot c^4 n^2 \left( \frac{n}{e} \right)^{4n}}{c^2 \cdot 2n \left( \frac{2n}{e} \right)^{2n} (2n+1)} = \frac{c^2 n^2}{2n(2n+1)} \rightarrow \frac{c^2}{4} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \left. \vphantom{\frac{c^2 n^2}{2n(2n+1)}}} \right\} C = \sqrt{2\pi}$$

$$\rightarrow n! \approx \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n$$

**Runge Kutta**



Simulation des Taylorpolynoms durch ineinanderschichten von Funktionswerten

Integrationsverfahren:  $y_{n+1} = y_n + h \cdot F(x_n, y_n, h)$

Euler:  $F(x, y; h) = f(x, y)$

Taylorwert:  $F(x, y; h) = f(x, y) + \frac{h}{2} f_2(x, y) + \dots + \frac{h^{m-1}}{m!} f_m(x, y, n)$

$m=2$ :  $F(x, y; h) = f(x, y) + \frac{h}{2} f_2(x, y) = f(x, y) + \frac{h}{2} \{ f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot f(x, y) \} = f(x, y) + \frac{h}{2} \{ f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot f(x, y) \}$

Schwierige Berechnung macht Taylor-Verfahren verwerflich.

Ansatz:  $F(x, y; h) = a \cdot f(x, y) + b \cdot f(x + \alpha h, y + \beta h) + \dots$

$$f(x + \alpha h, y + \beta h) =$$

$$= f(x, y) + f_x(x, y) \cdot \alpha h + f_y(x, y) \cdot \beta h + O(h^2)$$

$$F(x, y; h) = (a + b) f(x, y)$$

$$+ [b \cdot \alpha f_x(x, y) + b \beta f_y(x, y)] \cdot h$$

$$+ O(h^2)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = 1 \\ b \alpha = \frac{1}{2} \\ b \beta = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \alpha = \beta = \frac{1}{2b} \quad a = 1 - b$$

$$b = 1 \quad : \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$$

Verbessertes Euler Verfahren

$$b = \frac{1}{2} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h f(x_n, y_n))]$$

Vereinfachtes Runge-Kutta Verfahren

### Trapezformel

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Idee: Integration

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

implizite Gleichung durch Iteration lösen

$$y^{(k+1)} = F(y^{(k)}) = y_n + \frac{h}{2} f(x_{n+1}, y^{(k)})$$

Konvergenz gewährleistet wenn  $|F'(y)| \leq k$

$$\frac{dF}{dy} = \frac{h}{2} f_y(x_{n+1}, y)$$

$$h \leq \frac{1}{2L} \text{ w\u00e4hlen}$$

Beginn d. Iteration  $y_{n+1}^0 = y_n + h f(x_n, y_n)$

absolut stabil!

# Definitionen

## Festkommadarstellung

$$x = \pm \sum_{i=m}^{n-1} x_i \cdot b^i \quad \begin{matrix} m < 0 \\ n \geq 0 \end{matrix}$$

$$(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{n-1})$$

## Gleitkommadarstellung

$$y = \sum_{i=1}^{-m} y_i \cdot b^i$$

$$x = \pm y \cdot b^z$$

b Basis  
y Mantisse  
z Exponent

## Mittelwert und Varianz

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{Mittelwert}$$

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \mu_n)^2 \quad \text{Varianz}$$

## stabiler Algorithmus

Bei Zwischenergebnissen geringere Fehler haben verschwindenden Einfluss auf Endergebnis.  
z.B. bei Iteration

## backward error analysis

$$\hat{y} = \tilde{P} x$$

$$? \tilde{x} \quad \hat{y} = P \tilde{x}$$

Voraussetzung  $P$  stetig

$$|\tilde{x} - x| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |P\tilde{x} - Px| < \epsilon$$

## kondition

kondition gut, falls  $\delta(\epsilon)$  tetet gross gewählt werden kann

inverse Funktion betrachten  $\epsilon(\delta)$

## Rekursionsformel

$$x_n = \sum_{i=k}^{n-1} a_i x_i$$

## Iterationsfolge

durch  $x_n = f(x_{n-1})$  erzeugte Folge

## Fixpunkt

Fixpunkt d. Funktion  $x = f(x)$

## kontinuierlich

Lipschitz bedingung

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad L \in [0, 1]$$

## lineare Konvergenz

$\log |\epsilon_n|$  lineare Funktion der Anzahl Iterationsschritte  $n$

## quadratische Konvergenz

Fehler beim  $(n+1)$  Schritt annähernd proportional zum Quadrat des Fehlers beim  $n$

Differenzoperator

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$
$$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta(x_n))$$

Deflation

Weg dividieren von gefundenen Nullstellen eines Polynoms

Lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$x_{n+1} + a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k+1} =$$

homogen bilden Vektorraum

Fibonacci Folge

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

Pivotelement

Element durch welche bei Eliminationsverfahren durchdividiert wird

Residuenvektor

$$A \cdot x^{(0)} - y = \underline{r^{(0)}}$$

Schlupfvariable

bei lin. Optimierung Überschuss

Tschebyscheff Polynom

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$$
$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Footproof

Möglichst einfache Anwendbarkeit

quasi kontrahierend

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

absolute Stabilität

einer Integrationsmethode (Nifgl.) heißt die Eigenschaft dass kein Modellproblem  $y' = qy$  mit  $q < 0$  die num. Lösung  $\rightarrow 0$  steht  $n \rightarrow \infty$  für jedes  $h > 0$ .

Rundungsfehler

$$r_n = \tilde{y}_n^{\text{exakt}} - y_n^{\text{unexakt}}$$

Diskretisationsfehler

$$e_n = y_n^{\text{unexakt}} - y(x_n)^{\text{exakt}}$$

lokale Diskretisationsfehler

$$d_n = y_{n+1} - z(x_{n+1})$$

$z(x)$  durch  $(x_n, y_n)$  generiert

$$d_n \sim \frac{1}{1-2^{-p}} (y_{n+1} - y_{n+1}^*)$$

1 Schritt      2 Schritte

Lineare Gleichungen

Interpretation

- Schneiden von  $m$  Hyperebenen
- Abbildung linear
- Lösungsraum kern d. Abb.
- Orthogonales Komplement d. Zeilenraumes

	$Ax=b$	$Ax=0$
$Rg(A,b) \neq Rg(A)$	unlösbar	unmögl.
$Rg(A,b) = Rg(A) = n$	eindeutig	triviale L
$< n$	nichteind.	nichttriv. L

Verfahren

- Zeilenstufenform (Gauss) Trapez, kan. Form
- Elimination
- Cramersche Regel  $x = A^{-1} b$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{\det A} (A_{1i} b_1 + A_{2i} b_2 + \dots + A_{ni} b_n) = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii-1} & b_i & a_{ii+1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \end{vmatrix}$$

Körper

$(K, +, \cdot)$

- $(K, +)$  abelsche Gruppe
- $(K^*, \cdot)$  abelsche Gruppe
- Distributivgesetz

alg. abgeschlossen: jedes Polynom aus  $K[x]$  (Polynomring) zerfällt in Linearfaktoren

Vektorraum

$(V, \oplus; K, +, \cdot; *)$   $(V, \oplus)$  VR über  $(K, +, \cdot)$

- $(K, +, \cdot)$  Körper
- $(V, \oplus)$  abelsche Gruppe
- $1 \times \vec{a} = \vec{a}$  Einselement
- $r \times (s \times \vec{a}) = (r \cdot s) \times \vec{a}$  gemischte Assoziativität
- $(r+s) \times \vec{a} = r \times \vec{a} + s \times \vec{a}$
- $r \times (\vec{a} \oplus \vec{b}) = r \times \vec{a} \oplus r \times \vec{b}$  beidseitig distributiv

linear abhängig  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  lin. abh.  $\Leftrightarrow (\exists q_1, \dots, q_n) (q_1^2 + \dots + q_n^2) \neq 0 \wedge \sum_{k=1}^n q_k \vec{a}_k = \vec{0}$

linear unabhängig  $(\forall q_1, \dots, q_n) \sum q_k \vec{a}_k = \vec{0} \Rightarrow q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$

erzeugend  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  erzeugend:  $\forall \vec{v} \in V \vec{v} \in \text{LK } \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

Austauschsatz von Steinitz  $\left. \begin{matrix} \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \text{ erzeugend} \\ a_1, \dots, a_m \text{ unabhängig} \end{matrix} \right\} \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_n \text{ erzeugend}$

Basis  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  Basis wenn unabhängig u. erzeugend

Dimension Anzahl Basisvektoren

Unterraum

- $U \subset V$
- $U \neq \emptyset$
- $\vec{a}, \vec{b} \in U \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in U$
- $\vec{a} \in U \wedge \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot \vec{a} \in U$

Durchschnitt v. UR

$\vec{x} \in U_1 \cap U_2 \Leftrightarrow \vec{x} \in U_i$

Summe v. UR

$\vec{x} \in U_1 + U_2 \Leftrightarrow \exists \lambda_i \in U_i; \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$

direkte Summe

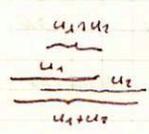
$U \oplus W = V \Leftrightarrow V = U+W \wedge \vec{0} = U \cap W$

komplement

$U \cap W = \vec{0}$   
 $U \cup W = V$

Dimensionssatz

$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim (U_1 \cap U_2) + \dim (U_1 + U_2)$



## Matrizen

$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$   $m$  Zeilenvektoren  $n \times n$  Matrix  
 $n$  Spaltenvektoren

Addition  $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

Skalare Multiplikation  $k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$

Matrixmultiplikation  $(a_{ij}) \cdot (b_{jk}) = (c_{ik})$   
 $m \times n$   $n \times p$   $m \times p$   
 $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$

Einheitsmatrix  $I = (\delta_{ij})$  quadratisch

quadratische Matrix  $m=n$

Dreiecksmatrix obere DM:  $a_{ik} = 0 \quad \forall i > k$   
 untere DM:  $a_{ik} = 0 \quad \forall i < k$  } quadratisch

Diagonalmatrix  $a_{ik} = 0 \quad \forall i \neq k$  quadratisch

symmetrische Matrix  $A = A^T \quad A = A^* = \bar{A}^T$

hermitesche Matrix  $A = \bar{A}^T = A^*$

Schiefsymmetrische Matrix  $A = -A^T$

Schiefhermitesche Matrix  $A = -\bar{A}^T$

orthogonale Matrix  $A = A^T^{-1}$

unitäre Matrix  $A = \bar{A}^T^{-1}$

inverse Matrix  $A^{-1} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A^T$

Rang  $\dim \mathbb{R}$  Zeilenraum

$ab^T = b^T a^T, (ab)^T = b^T a^T, (a^{-1})^T = a^T^{-1}, a^{T^{-1}} \cdot b^{T^{-1}} = (a \cdot b)^{T^{-1}}$

ähnlich  $A, B$  ähnlich  $\Leftrightarrow B = P^{-1} A P$

kongruent  $A, B$  kongruent  $B = P^T A P$

Spur  $\sum_{i=1}^n a_{ii}$

## Lineare Abbildungen

lineare Abb.  $f(a\vec{u} + b\vec{w}) = a \cdot f(\vec{u}) + b \cdot f(\vec{w})$  Vektorraumhomomorphismus

Isomorphismus bijektiver Isomorphismus

$f: V \rightarrow W$   
 injektiv  $\Leftrightarrow \dim V \leq \dim W$   
 surjektiv  $\Leftrightarrow \dim V \geq \dim W$   
 bijektiv  $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$

Kern  $\vec{a} \in \text{Kern} \Leftrightarrow f(\vec{a}) = \vec{0} \quad f: U \rightarrow V$

Bild  $\vec{b} \in \text{Bild} \Leftrightarrow (\exists \vec{a} \in U) f(\vec{a}) = \vec{b} \quad f: U \rightarrow V$

Satz  $V \text{ iso } W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

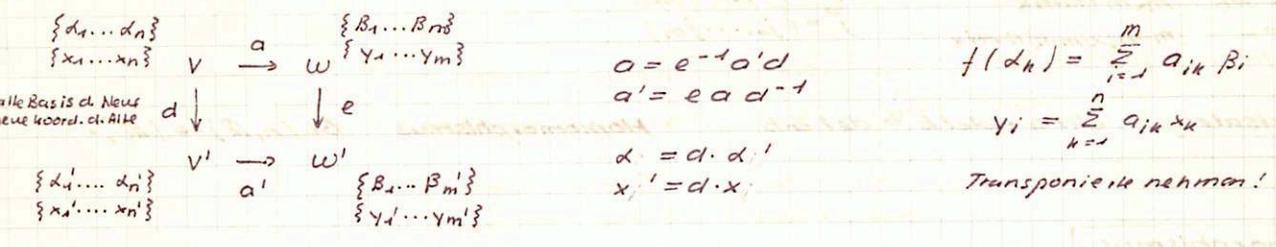
Hom(V, U) UR d. lin. Abb. von  $V$  nach  $U$  dimension  $m \cdot n$

$V^*$  dualer Raum  $\text{Hom}(V, K)$

Algebra Assoziat. Ring (mit Einselement?)  $(\text{class. addit. Gruppe UR über } K \text{ bilie})$   
 $v \cdot (d \cdot B) = (v \cdot d) \cdot B \quad u \in K, d, B \in R$

Bsp -  $\text{Hom}(V, U)$  Algebra über  $K$  Algebra linearer Operatoren  
 -  $\mathbb{C}$  Algebra über  $\mathbb{R}$

**Basiswechsel**



d: neue Basis  $\rightarrow$  alte Basis  
 alte Koord  $\rightarrow$  neue Koord

**Formale Polynome**

$g: M \rightarrow k \quad (\exists n_0) \quad n \geq n_0 \Rightarrow g_n = 0 \quad (g_0, g_1, \dots, g_{n_0}, 0, 0, \dots)$

Addition  $\rightarrow$  Summe v. Funktionen  
 Skalare Multiplikation  $\rightarrow$  Wie b. Funktionen

Produkt  $(g_0, g_1, \dots) \cdot (r_0, r_1, \dots) =: (s_0, s_1, \dots)$

$s_n = \sum_{k+m=n} g_k r_m$  vgl. Mult. v. Polynomen  $(g_0 + g_1 x + \dots)(r_0 + r_1 x + \dots) = \dots + \dots x^n + \dots$

Polynomring  $\left. \begin{array}{l} \text{Ring m. Einselement} \\ \text{Additive Gruppe bildet LR über } k \end{array} \right\} \text{Algebra}$

Einsetzen v. Matrizen  $\left. \begin{array}{l} \text{Ring mit Einselement} \\ \text{Additive Gruppe bildet R-Modul über dem Ring d. Matrizen} \\ \text{welche untereinander wieder eine Algebra bilden} \end{array} \right\} \text{"Subalgebra"}$

Polynome  $\quad$  Matrizen  
 $(\varphi_1 + \varphi_2)(a) = \varphi_1(a) + \varphi_2(a)$   
 $(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(a) = \varphi_1(a) \cdot \varphi_2(a)$   
 $(\varphi \cdot e)(a) = \varphi(e(a))$   
 Eine AM Homomorphismus zwischen Algebra der Polynome und Algebra der Matrizen?

mod  $(1+x^2)$  rechnen  $\rightarrow$  Rechnen m. komplexen Zahlen z.B.  $(-1+x^4) \equiv 2 \pmod{(x^2+1)}$   $-1+i^4=2$

**Determinanten**

$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} \text{sign } \pi \cdot a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} = D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$

$A_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$  Adjunkt od. alg. Komplement

$\text{adj } a = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

Eigenschaften  
 $D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) = -D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n)$   
 $D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = (-1)^{j(\pi)} D(\vec{a}_{\pi(1)}, \vec{a}_{\pi(2)}, \dots, \vec{a}_{\pi(n)})$  alternierend  
 $D(\lambda \vec{a}_1, \dots, \lambda \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n) = \lambda \cdot D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n)$   
 $D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_i + \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n) = D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) + D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n)$  } multi-linear  
 $D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_i + \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n) = D(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k + \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) =$   
 $D(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1$

Entwicklungssatz:  $\det a = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (= \sum_{j=1}^n a_{ij} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{a}_n))$

$a^{-1} = \frac{1}{\det a} \cdot \text{adj } a \quad \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (\text{adj } a)_{jk} = \det a \cdot \delta_{ik} \right)$

## allgem. Entwicklungsregel

$$\det a = \sum_j (-1)^{\sum_{k=1}^m i_k + j_k} \det a_{i,j} \det a_{\bar{i}, \bar{j}}$$

$m$  Zeilen  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n$

$a_{i,j}^{\vec{i}} = b$   $m \times m$  Matrix

$a_{i,j}^{\vec{i}} = (m-n) \times (m-n)$  Matrix

$$\vec{i} = (i_1, \dots, i_m)$$

$$\vec{j} = (j_1, \dots, j_m)$$

## Produktsatz

$$\det a \cdot \det b = \det a \cdot b$$

Homomorphismus

$$GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

## Automorphismus

$f: V \rightarrow V$  Isomorphismus von  $V$  nach  $V$ , lineare Selbstabbildung

$\text{Hom}(V, V)$  ist Algebra über  $F$

$\text{Hom}(V, V) \rightarrow \mathcal{M}(n \times n, F)$  Isomorphismus

invarianter Unterraum  $f: V \rightarrow V$   $f(\xi) \in U$  ( $\forall \xi \in U$ )

## Eigenvektoren, Eigenwerte

Eigenvektor  $\vec{b}$ :  $\vec{b} \neq \vec{0} \wedge \vec{b}, f(\vec{b})$  lin. abhängig

Eigenwert  $q$ :  $f(\vec{b}) = q \cdot \vec{b}$

Charakterist. Polynom

$$\det(a - q \cdot e) = 0$$

für ähnliche Matrizen gleich

Eigenraum  $U_q$   $\vec{x} \in U_q$   $f(\vec{x}) = q(\vec{x})$

geom. Vielfachheit  $\dim U_q$

alg. Vielfachheit  $\det(a - q \cdot e) = (q_1 - q)^n \cdot \dots$

diagonalisierbar  $f$  diag.  $\Leftrightarrow p_f(x)$  zerfällt in Linearfaktoren  $\wedge$  geom = alg Vielfachh.

triagonalisierbar  $f$  triq  $\Leftrightarrow p_f(x)$  zerfällt in Linearfaktoren

Satz v. Cayley-Hamilton  $p_f(f) = 0$  spez.  $p_a(a) = 0$

$$e(a)x = e(q_0)x$$

Kanonische Formen

- trianguläre Form lineare Zerlegung d.h. Faktorisierung v. Pf. in lin. Polyn.
- diagonale Form lineare Zerlegung und geom = alg. Vielfachheit
- Direkt-Summen Zerlegung  $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \dots \oplus W_r$
- Jordan'sche Normalform lineare Zerlegung
- Drehunterräume  $|\det a| = 1$

Bilineare u. quadratische Formen

- lineares Funktional  $\phi: V \rightarrow K \quad u, v \in V, a, b \in K \quad \phi(au + bv) = a \cdot \phi(u) + b \phi(v)$
- dualer Raum Raum v. lin. Funktional  $V^*$
- duale Basis  $\{u_1, \dots, u_n\}$  Basis in  $V \quad \phi_1, \dots, \phi_n \in V^* \quad \phi_i(u_j) = \delta_{ij} \quad \{\phi_i\}$  Basis

Basiswechsel im dualen Raum

$$\begin{matrix} \{u_1, \dots, u_n\} & \xrightarrow{P} & \{a_1, \dots, a_n\} \\ \{\phi_1, \dots, \phi_n\} & \xrightarrow{(P^{-1})^T} & \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \end{matrix}$$

bilineare Form

$$\begin{aligned} f(au + bu_1, v) &= a f(u, v) + b f(u_1, v) \\ f(u, av_1 + bv_2) &= a f(u, v_1) + b f(u, v_2) \end{aligned}$$

Matrixdarstellung  $f(u, v) = u^T A v$

Basiswechsel  $B = P^T A P \quad P$  neue Basis durch alle

alternierend  $f(u, u) = 0 \quad f(u, v) = -f(v, u)$  schiefsymmetrisch

symmetrische bil. Form  $f(u, v) = f(v, u) \quad A = A^T$   
kann durch diagon. Form dargestellt werden

quadratische Form  $q(u) \quad q \cdot F \Leftrightarrow q(v) = f(v, v) \quad f(u, v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$   
polare Form

Signatur conf.  $f$  symm. bil. F. Diagon. Matrix  $S = P - N$  Signatur  
 $P$  Anzahl posit. Element  
 $N$  Anzahl neg. Element

nicht negativ semidefinit  $S = Rq(f)$

$$P - \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & 1 & \\ & & & \dots & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

positiv definit  $S = \dim V$

Trägheitssatz v. Sylvester  $P, N$  eindeutig bestimmt

hermitesche Form  $f(u, v) = \overline{f(v, u)}$

hermitesche Quadrat. Funktion entspr. quad. Form  $q(u) = f(u, u)$

Skalarprodukt posit. definit symmetrische bil. Form

Länge  $|\vec{a}| = F(\vec{a}, \vec{a})^{\frac{1}{2}}$

Winkel  $\cos \varphi = \frac{F(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad F(\vec{a}, \vec{b}) = 0$  orthogonal

orthonormierte Vektoren

$$\begin{matrix} i \neq j \Rightarrow F(\vec{b}_i, \vec{b}_j) = 0 & \text{ortho} \\ i = j \Rightarrow F(\vec{b}_i, \vec{b}_i) = 1 & \text{normiert} \end{matrix} \quad F(\vec{b}_i, \vec{b}_j) = \delta_{ij}$$

# Methode von Lagrange

Sym. bil. Form  $\rightarrow$  Diagonalform

a)  $a_{11} \neq 0$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k = \frac{1}{a_{11}} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{11}} (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + \sum_{k=2}^{n-1} a'_{ik} x_i x_k$$

b)  $a_{11} = 0$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k = 2a_{12} \left( x_1 + \frac{a_{23}}{a_{12}} x_2 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{12}} x_n \right) \left( x_2 + \frac{a_{13}}{a_{12}} x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{12}} x_n \right) + Q_3 \dots + \sum_{k=1}^{n-2} a''_{ik} x_i x_k$$

## Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren

$\{u_1, \dots, u_n\}$  Basis

$u_1 = u_1 / \|u_1\|$

$u_2 = \frac{u_2 - (u_2, u_1) \cdot u_1}{\|u_2 - (u_2, u_1) \cdot u_1\|}$

$u_3 = \frac{u_3 - (u_3, u_1) u_1 - (u_3, u_2) u_2}{\|u_3 - (u_3, u_1) u_1 - (u_3, u_2) u_2\|}$  ...

$S^T S = E$  orthog. Matrix

Permutationsmatrizen Untergruppe von Orthogonalmatrizen

orthog. Abb  $(f(\vec{a}), f(\vec{b})) = (\vec{a}, \vec{b})$  unit. Abb.  $S^T \bar{S} = E$

orthog. Komplement  $\vec{a} \in U^\perp \Leftrightarrow (\forall \vec{x} \in U) \vec{a} \perp \vec{x}$

$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$   
 $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
<p>bilinear <math>F(\sum x_i \vec{a}_i, \vec{b}) = \sum x_i F(\vec{a}_i, \vec{b})</math>  <math>F(\sum y_i \vec{b}_i, \vec{a}) = \sum y_i F(\vec{a}, \vec{b}_i)</math></p> <p>symmetrisch <math>F(\vec{a}, \vec{b}) = F(\vec{b}, \vec{a})</math></p> <p>quadratische <math>Q(\vec{a}) = F(\vec{a}, \vec{a})</math></p> <p>Darstellung einer symm. bil.</p> $\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$	<p>bilinear</p> <p>symmetrisch hermitesch</p> $\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$
<p><u>Euklidischer Vektorraum</u></p> <p><u>Skalarprodukt</u> bilinear, symmetrisch, positiv definit</p> <p><u>orthogon. Abb.</u> <math>(f(\vec{a}), f(\vec{b})) = (\vec{a}, \vec{b})</math></p> <p><u>Symmetrische Matrix</u> <math>h_{ik} = h_{ki}</math></p> <p><u>orthonorm. Basis</u> <math>(\vec{b}_i, \vec{b}_j) = \delta_{ij}</math></p> <p><u>orthogon. Matrix</u> <math>A^T = A^{-1}</math></p> <p><u>Kästchenform</u>  <math>\begin{pmatrix} k_1 &amp; \dots &amp; k_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 &amp; k_1 &amp; \dots &amp; k_m \end{pmatrix} \in \text{Det } +1</math>  <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; k_1 &amp; \dots &amp; k_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 &amp; k_1 &amp; \dots &amp; k_m \end{pmatrix} \in \text{Det } -1</math></p>	<p><u>Unitärer Vektorraum</u></p> <p><u>Skalarprodukt</u> N.B. im ersten Arg. <math>(\vec{b}_i, \vec{a}_j) = (\vec{a}_i, \vec{b}_j)</math> d.h. reell positiv definit</p> <p><u>unitäre Abb.</u> <math>h_{ik} = \overline{h_{ki}}</math></p> <p><u>unitäre Basis</u> <math>(\vec{b}_i, \vec{b}_j) = \delta_{ij}</math></p> <p><u>unitäre Matrix</u> <math>A^T = A^{-1}</math></p> $\begin{pmatrix} a^{11} & \dots & a^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix}$

Standard Skalarprodukt  $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$

Norm  $\|a \cdot \alpha\| = |a| \cdot \|\alpha\|$  ;  $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$  ;  $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \vec{0}$

adjungierte Abbildung  $\alpha^* : V \rightarrow \mathbb{R}$   $\alpha^*(\beta) = (\beta, \alpha)$

Selbstadj. lin. Abb.  $(f(\xi), \eta) = (\xi, f(\eta))$   $f = f^*$   $A = A^{-T}$

Flächen 2. Grades in  $\mathbb{R}^3$

$(\xi, \eta, \zeta) + 2\beta = d$

$\beta \in \text{imf}$

Flächen mit Zentrum  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = d'$

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0$

ein Zentrum

$d' = 0$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$

Punkt

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$

Kegel

$d' \neq 0$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$

Ellipsoid

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$

Einschaliges Hyperboloid

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$

Zweischaliges Hyperboloid

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0, \lambda_3 = 0$

unendl. viele Zentren

$d' = 0$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Gerade

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

Ebenenpaar mit Schnitt

$d' \neq 0$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Elliptischer Zylinder

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

Hyperbolischer Zylinder

$\lambda_1^2 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

$d' = 0$

$\lambda_1 > 0$

Ebene

$d' \neq 0$

$\lambda_1 > 0$

Ebenenpaar parallel

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$d' = 0$

Raum

$d' \neq 0$

Nichts

$\beta \notin \text{imf}$

Flächen ohne Zentrum  $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + z_3 = 0$

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Elliptisches Paraboloid

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

Hyperbolisches Paraboloid

$\lambda_1^2 \neq 0, \lambda_2 = 0$

$\lambda_1 > 0$

Parabolischer Zylinder

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Ebene

# Kurven 2. Grades in $\mathbb{R}^2$

$$(\xi, \beta) + 2B = d$$

$\beta \in \text{im} f$

Kurven mit Zentrum  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = d'$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$$

ein Zentrum

$$d' = 0$$

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

Punkt

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$$

Geradenpaar mit Schn

$$d' \neq 0$$

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

Ellipse

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$$

Hyperbel

$$\lambda_1^2 \neq 0, \lambda_2 = 0$$

unendl. viele Zentren

$$d' = 0$$

$$\lambda_1 > 0$$

Gerade

$$d' \neq 0$$

$$\lambda_1 > 0$$

Geradenpaar parallel

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$d' = 0$$

Ebene

$$d' \neq 0$$

Nichts

$\beta \notin \text{im} f$

Kurven ohne Zentrum  $\lambda_1 y_1^2 + y_2 = d$

$$\lambda_1^2 \neq 0$$

$$\lambda_1 > 0$$

Parabel

$$\lambda_1 = 0$$

Gerade

Mathematik ist die Theorie der algebraischen Strukturen oder Relationen!

Relation	algebraische Struktur	Unterstruktur	formell	Tupel	Beispiel
0-stellig	<u>Element</u>	Eigenschaft	$R \in M^0$	0-Tupel	$\{a\}$
1-stellig	<u>Menge</u>	Teilmenge	$R \in M^1$	1-Tupel	$\{1, 2, 3, \dots\}$
2-stellig	<u>Korrespondenz</u>	Teilkorrespondenz	$R \in M^2$	2-Tupel	$\{(1, 2), (2, 4), \dots\}$ $a_1 = a_1, a_2$
3-stellig	<u>Gruppoid</u>	Untergruppoid	$R \in M^3$	3-Tupel	$\{(5, 6, 11), (9, 11, 20), \dots\}$ $a_3 = a_1 + a_2$
4-stellig	<u>Körperoid</u>	Unterkörperoid	$R \in M^4$	4-Tupel	$\{(1, 2, 3, 5), (5, 6, 7, 65), \dots\}$ $a_4 = a_1(a_2 + a_3)$
5-stellig	<u>Raum</u>	Unterraum	$R \in M^5$	5-Tupel	$a \cdot (b+c) + d = \beta$

<u>Beispiele</u>	
<u>Element</u> :	$\frac{5}{880}$ $\circ$ $\alpha$ $\int_{-e}^e ax^2 + bx + dx$
<u>Menge</u> :	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ Menge der Menschen
<u>Korrespondenz</u> :	$5 < 7$ $10 = 10$ $3   9$ Funktionen
<u>Gruppoid</u> :	$a + b = c$ Gruppe d. Kongruenztransformationen
<u>Körperoid</u> :	Ring, Körper, Integritätsbereich, Verband
<u>Raum</u> :	Vektorraum, topologische Räume?

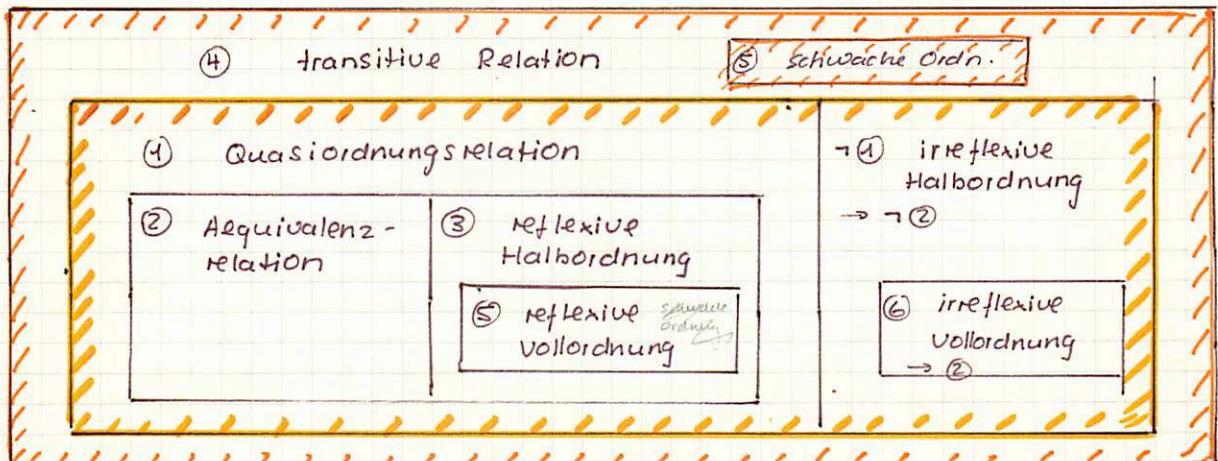
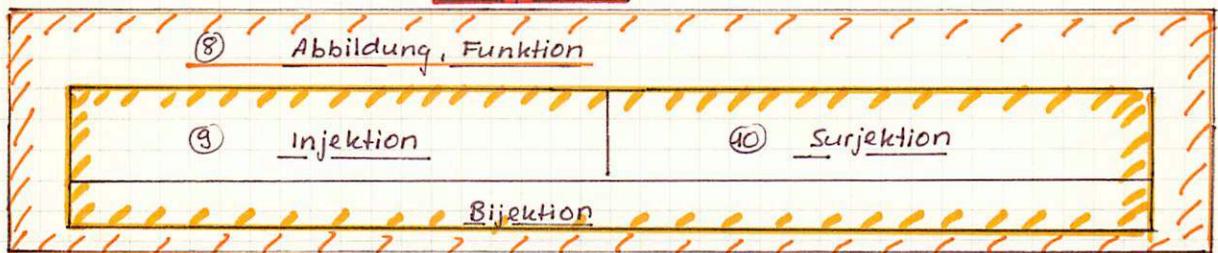
Jede n-stellige Relation kann als m-stellige Relation ( $0 \leq m \leq n$ ) interpretiert werden. (Interpretationsprinzip)

Menge als Element	Mengenalgebra
Korrespondenz als Menge	Graph einer Funktion
Korrespondenz als Element	Funktionen als Vektoren in Vektorraum
Gruppoid als Korrespondenz	Funktion welche einem 2-Tupel ein Element zuordnet
Gruppoid als Menge	Graph einer Verknüpfung
Gruppoid als Element	Homomorphismen auf Gruppen
Körperoid als Gruppoid	Festhalten einer Komponente
Körperoid als Korrespondenz	$(u, v, w) \rightarrow q$
Körperoid als Menge	Menge d. mögl. 4-Tupel
Körperoid als Element	Isomorphismen von Körpern
Raum als Körperoid	
Raum als Korrespondenz	
Raum als Menge	
Raum als Element	

## 2-stellige Relationen

$\textcircled{1}_2$	$(\forall x \in M) x R x$	<u>reflexiv</u>
$\neg \textcircled{1}_2$	$(\exists x \in M) \neg x R x$	<u>irreflexiv</u>
$\textcircled{2}_2$	$(\forall x, y \in M) x R y \Rightarrow y R x$	<u>symmetrisch</u>
$\neg \textcircled{2}_2$	$(\exists x, y \in M) x R y \wedge \neg y R x$	<u>antisymmetrisch</u>
$\textcircled{3}_2$	$(\forall x, y, z \in M) x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$	<u>identiv, antisymmetrisch</u>
$\textcircled{4}_2$	$(\forall x, y, z \in M) x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$	<u>transitiv</u>
$\textcircled{5}_2$	$(\forall x, y \in M) x R y \vee y R x$	<u>linear, total</u>
$\textcircled{6}_2$	$(\forall x, y \in M) x \neq y \Rightarrow x R y \vee y R x$	<u>konnex</u>
$\textcircled{7}_2$	$(\forall x, y, z \in M) y R x \wedge z R x \Rightarrow y = z$	<u>coreindevig</u>
$\textcircled{8}_2$	$(\forall x, y, z \in M) x R y \wedge x R z \Rightarrow y = z$	<u>nacheindeutig, eindeutig</u>
$\textcircled{9}_2$	coreindevig $\wedge$ nacheindeutig	<u>eineindeutig, injektiv</u>
$\textcircled{10}_2$	$(\forall y \in M)(\exists x \in M) x R y$	<u>surjektiv</u>
$\textcircled{11}_2$	injektiv $\wedge$ surjektiv	<u>bijektiv</u>

## Korrespondenz

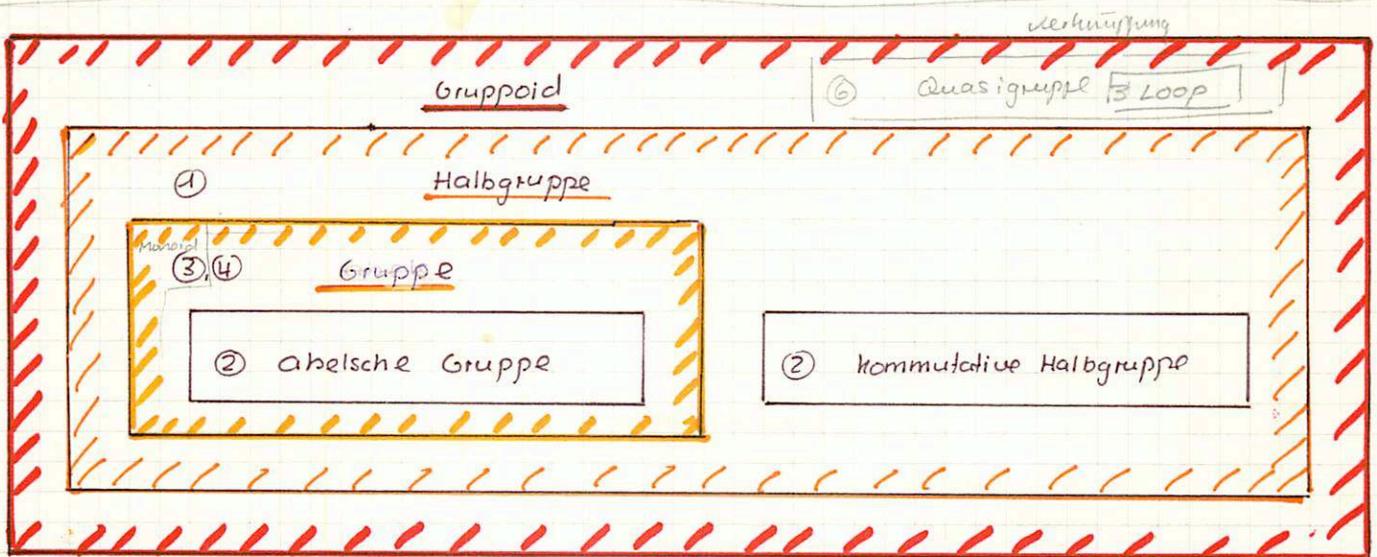


## Beispiele

$(\mathbb{N},  )$	reflexive Halbordnung
$(P(M), \subset)$	irreflexive Halbordnung "echte Teilmengen"
$(P(M), \subseteq)$	reflexive Halbordnung
$(\mathbb{Q}, \leq)$	reflexive Vollordnung
$(\mathbb{Q}, <)$	reflexive Vollordnung
$(\mathbb{Z},  _2,  _3)$	Schwache Ordnung
$(\mathbb{N}, \leq)$	reflexive Vollordnung
$(\mathbb{N}, <)$	irreflexive Vollordnung
$(\mathbb{C}, =)$	Äquivalenzrelation
$(\mathbb{N}, \equiv)$	Äquivalenzrelation
$(A, \Rightarrow)$	reflexive Halbordnung

# 3-stellige Relationen

- ①<sub>3</sub>  $(\forall x, y, z \in M) (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$  assoziativ
- ②<sub>3</sub>  $(\forall x, y, z \in M) (x \circ y = y \circ x)$  kommutativ
- ③<sub>3</sub>  $(\exists n \in M) (\forall x \in M) (x \circ n = x)$  Null-Element
- ④<sub>3</sub>  $(\forall x \in M) (\exists \bar{x} \in M) (x \circ \bar{x} = n)$  Inversen element



## Beispiele

- |   |                        |   |
|---|------------------------|---|
| $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$             | Gruppe                 |   |
| $(\mathbb{Z} \xrightarrow{+} \mathbb{Z})$         | Gruppe                 |   |
| $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$             | Halbgruppe             |   |
| $(\mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N})$         | abelsche Gruppe        | $a \cdot b :=  a \cdot b $  |
| $(\mathbb{C} \xrightarrow{+} \mathbb{C})$         | abelsche Gruppe        |   |
| $(\mathbb{C} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{C})$     | abelsche Gruppe        |   |
| $(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$             | kommutative Halbgruppe |   |
| $(P(M) \xrightarrow{\cup} P(M))$                  | abelsche Gruppe        | $P(M)$ Potenzmenge  |
| $(P(M) \xrightarrow{\cap} P(M))$                  | abelsche Gruppe        |   |
| $(A \xrightarrow{\Delta} A)$                      | kommutative Halbgruppe | $A$ Aussage   |
| $(P_n \xrightarrow{\circ} P_n)$                   | Gruppe                 | $P_n$ Permutationen   |
| $(k \xrightarrow{\sim} k)$                        | Gruppe                 | $k$ Kongruenztransf., Ähnlichkeits-Matrix   |
| $(\mathbb{Q} \xrightarrow{+} \mathbb{Q})$         | abelsche Gruppe        | $\mathbb{Q}$ Matrizen $n \times m$  |
| $(\mathbb{Q} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Q})$     | Halbgruppe             | $\mathbb{Q}'$ $n \times n$ Matrizen   |
| $(\mathbb{Q}^* \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Q}^*)$ | Halbgruppe             | $\mathbb{Q}$ Matrizen $n \times m \cdot n \times m \cdot m \times p = n \times p$ |

$a \in M$

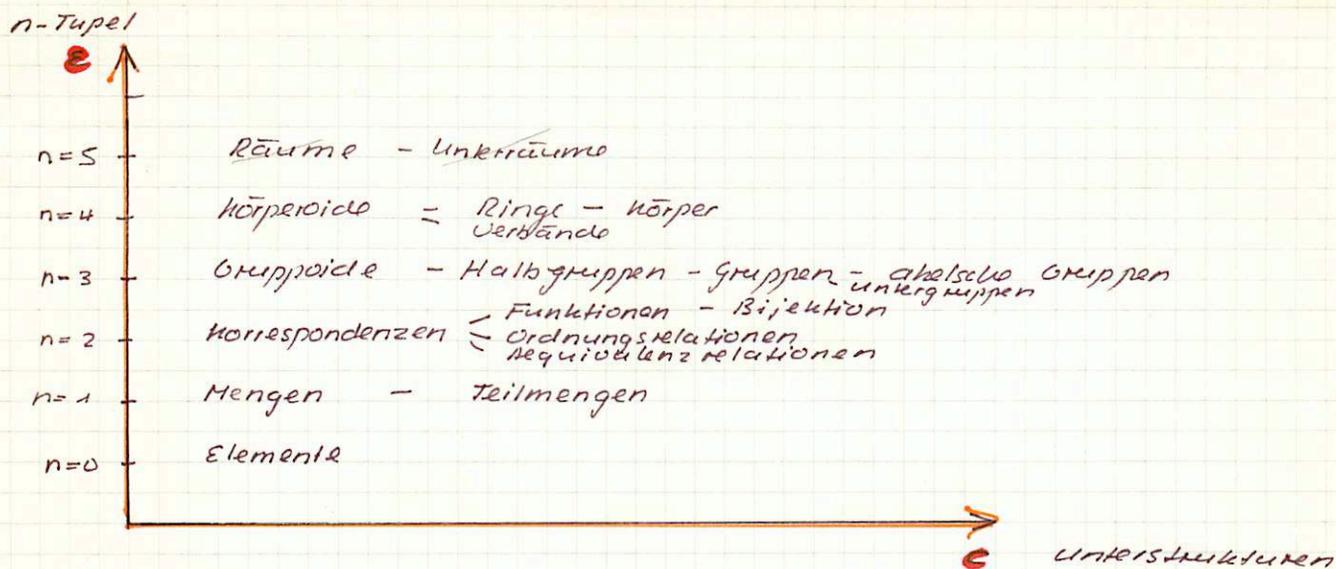
$a \circ x_1 = a \circ x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$  links kürzbar

$x_1 \circ a = x_2 \circ a \Rightarrow x_1 = x_2$  rechts kürzbar

⑤<sub>3</sub>  $(\forall x \in M) (\exists \lambda \in M) (a \circ x = \lambda)$   $a$  links und rechts kürzbar regulär

⑥<sub>3</sub> Eindeutigkeit der Lösungen  $a \circ x = b$   $y \circ a = b$

# Mathematik ist die Theorie der Relationen, Strukturen, Tupeln



## $\varepsilon$ irreflexive Halbordnung

$R_1^m \in R_2^n$  heißt  $R_1^m$  wird zu einem Element und befindet sich im  $R_2^n$  ( $a, b, \dots, R^m, \dots$ )

So kann mit Strukturen als Elemente gerechnet werden

## $\subset$ reflexive Halbordnung

$R_1^m \subset R_1^m$  heißt: Alle  $m$ -Tupel von  $R_1^m$  sind auch  $m$ -Tupel von  $R_1^m$   
 $m=0: a=b$

So können Strukturen selbst strukturiert werden

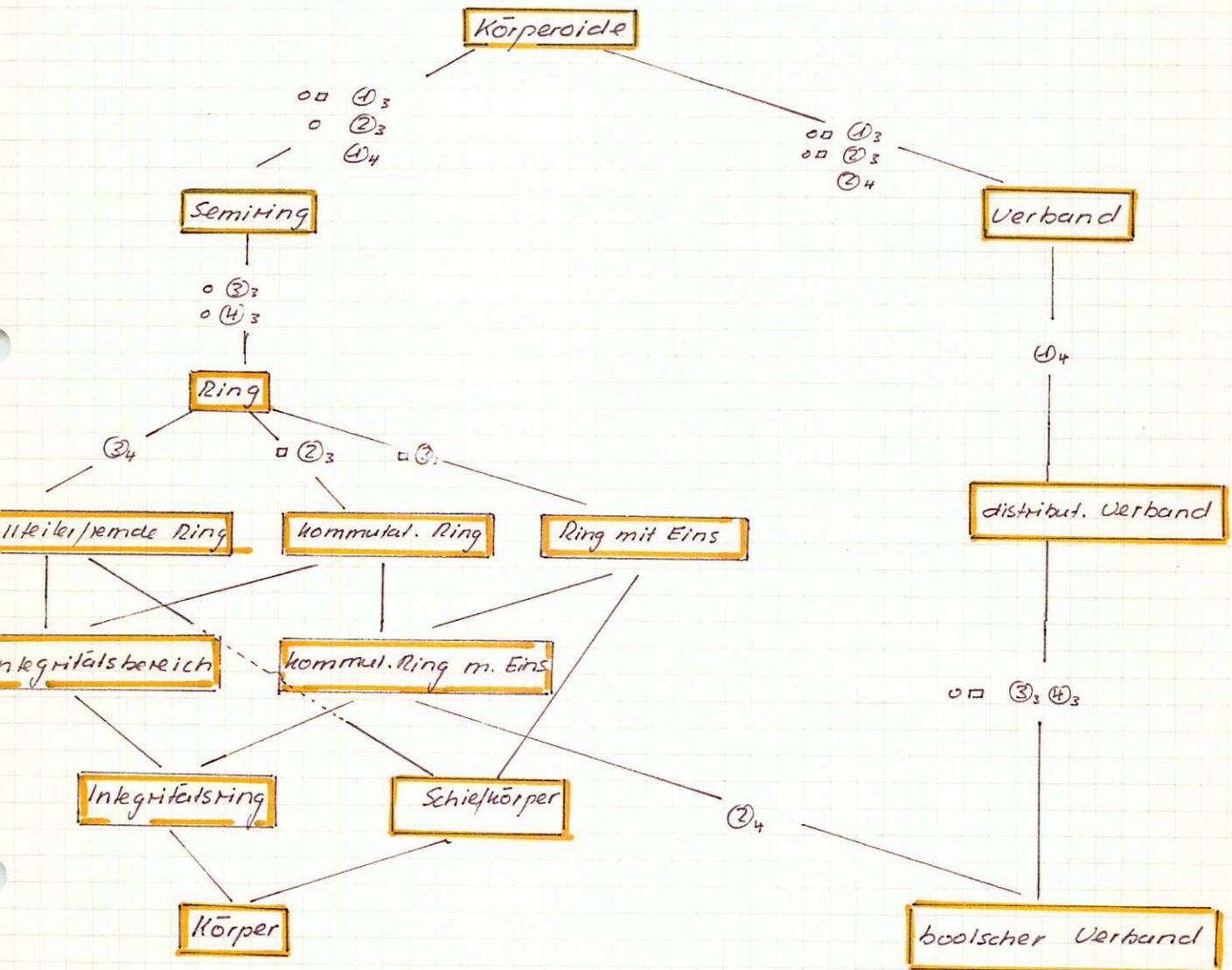
## $\cap, \cup$ Verband

$n=0$   $a \cap b$  Identitätsnachweis  $a \cup b$  Identitätsstruktur

So können Strukturen aufgebaut werden.

4-stellige Relationen

- ①<sub>4</sub>  $(\forall x, y, z \in M) \quad x \circ (y \sqcap z) = (x \circ y) \sqcap (x \circ z)$  distributiv
- ②<sub>4</sub>  $(\forall x, y \in M) \quad x \sqcap (x \circ y) = x$  adjunktiv
- ③<sub>4</sub>  $(\forall x, y \in M) \quad x \circ y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$  nullteilerfrei



Element

$a$



Menge

$P$



$a_1 \in E_2 \Leftrightarrow a_1 = e_2$

$P_1 \subset P_2 \Leftrightarrow (e \in P_1 \Rightarrow e \in P_2)$

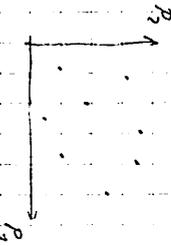
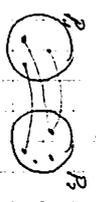
$E_1 \cap E_2$  1 oder 2  
oder beide

$E_1 \cup E_2$  1 oder 2  
oder beide

$P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow (e \in P_1 \wedge e \in P_2)$   
 $P_1 \cup P_2 \Leftrightarrow (e \in P_1 \vee e \in P_2)$

Konsequenz

$(P_1, P_2, R)$

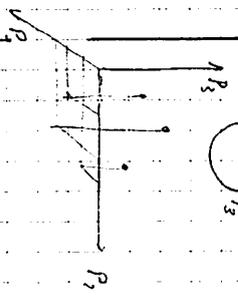
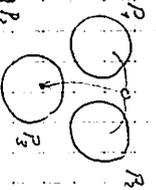


$(P_1, P_2, R) \subset (P_3, P_4, R_2)$   
 $\Leftrightarrow ((a_1, e_2) \in (P_1, P_2, R_1) \Rightarrow (a_1, e_2) \in (P_3, P_4, R_2))$

$(a_1, a_2) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in P_1 \wedge (a_1, a_2) \in P_2$

Verknüpfung

$(P_1, P_2, P_3, O, R)$



$(P_1, P_2, P_3, O, R) \subset (P_4, P_5, P_6, O, R_2)$   
 $\Leftrightarrow ((a_1, e_2, e_3) \in (P_1, P_2, P_3, O, R_1) \Rightarrow (a_1, e_2, e_3) \in (P_4, P_5, P_6, O, R_2))$

$(a_1, a_2, a_3) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) \in S_1 \wedge (a_1, a_2, a_3) \in S_2$

- Mathematik ist die Theorie der n-Typel.
- Jedes n-Typel kann als m-Typel gesehen werden. (Injektionsprinzip)
- Revidierbare Halbordnung & erlaubt mit jedem n Typel zu jedem abh. zu einem o Typel zu machen.
- Die reflexive Halbordnung & erlaubt eine Strukturierung innerhalb der n-Typel.
- Der Verband zu erlaubt den Aufbau der Strukturen.

Logische Zeichen  $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge, \forall, \exists, \exists! \neq$

Mengenoperationen  $\subset, =, A \subseteq B, A \supset B, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, C_X A, A \Delta B$

Funktionen  $f: A \rightarrow B, x \mapsto y, f|_U$  eingeschränkt auf  
 $f^{-1} \circ f = \text{id}_A, f \circ f^{-1} = \text{id}_B$

geordneter Körper  $K$  Körper  $<$  reflexive Vollordnung  
 $x > y \Leftrightarrow x + z > y + z$   
 $x > 0 \wedge y > 0 \Leftrightarrow x \cdot y > 0$

absoluter Betrag  $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$   $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$  Homomorphismus von  $(\mathbb{R}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$

Signum  $\text{sign } x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$   $\text{sign}(x \cdot y) = \text{sign } x \cdot \text{sign } y$  Homomorph. von  $(\mathbb{R}, \cdot), (\{-1, 0, 1\}, \cdot)$

Obere Schranke  $A \subseteq C, A \subseteq B, C$  Obere Schranke von  $A, x \leq c \forall x \in A$   
 $x \in A \wedge y \in B, \forall x \in A, \forall y \in B$

$\text{Sup } A$  kleinste obere Schranke  
 $\text{Inf } D$  kleinste untere Schranke

$\text{max } A, \text{max } A \in A, \text{max } A \geq x \forall x \in A$   
 $\text{min } A$

Peano Axiome Menge  $\mathbb{N}$   
 $0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$   $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$   
 $0(n_1) \neq 0(n_2) \Leftrightarrow n_1 \neq n_2$   
 $A \subset \mathbb{N} \wedge \forall 0 \notin A \exists a \in A (n \in A \Leftrightarrow 0(n) \in A) \Rightarrow A = \mathbb{N}$

Bernoullische Ungleichung  $\forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx, x \neq 0 \wedge n \geq 2 \Rightarrow (-nx)^n > 1+nx$

Prinzip d. rekursiven Definitionen:  $X, \tilde{X} := \bigcup_{k=0}^{\infty} X^k, a \in X, F: \tilde{X} \rightarrow X$   
 $\Leftrightarrow \exists! f: \mathbb{N} \rightarrow X, f(0) = a, f(n+1) = F(f(0), f(1), \dots, f(n)) \forall n \in \mathbb{N}$

bin. Lehrsatz  $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

Redekind'scher Schnitt  $A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{Q}$   
 $\alpha \in A, B \supset \alpha \Rightarrow B \in A$   
 $A$  hat kein kleinstes Element

Form  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

komplexe Zahlen  $\mathbb{R}_2 = \frac{z+\bar{z}}{2}, \mathbb{I}_2 = \frac{z-\bar{z}}{2}$   
 $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$  Konjugation liefert isomorphen Körper  
 $z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2, |z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$  Homomorph.  $(\mathbb{C}, \cdot), (\mathbb{R}, \cdot)$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung  $|a \cdot b| \leq |a| |b|$   $|a \cdot b| = |a| |b| \cos \varphi$   
 Skalarprodukt

Fundamentalsatz d. Algebra  $z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$  hat mind. eine Lösung

Metrik auf  $M$   $\rho(x,y) > 0, \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$   
 $\rho(x,y) = \rho(y,x)$   
 $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

Differenzenformel  $\Delta_{00} \Delta_{01} \Delta_{02} \dots \Delta_{0n}$   
 $\Delta_{10} \Delta_{11} \Delta_{12}$   
 $\Delta_{20} \Delta_{21} \Delta_{22}$   
 $\Delta_{n1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta_{0,1+k}$

$\epsilon$ -Umgebung  $U_\epsilon(a) := \{x \in X \mid |x-a| < \epsilon\}$

Umgebung  $(U \subset X) \wedge (\exists U_\epsilon \subset U)$

Folge Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow X, k \mapsto x_k = (x_0, \dots) = (x_k)$

Häufungspunkt  $P \in M \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists n_0) (\exists n > n_0) a_n \in U_\epsilon(P)$

Grenzwert, Limes  $x_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n > n_0) x_n \in U_\varepsilon$   $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

konvergent Grenzwert ex. sonst divergent

beschränkt  $(\exists R > 0) |x_n| < R \ (\forall n)$

Auswahlfolge streng monoton wachsende Folge  $n \rightarrow n_k$

Teilfolge v.  $(x_n)$   $k \rightarrow x_{n_k}$

Ausziehen einer konv. Teilfolge  $a \text{ HP } (x_n) \Leftrightarrow (\exists (x_{n_k})) \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$

Folgen in  $\mathbb{R}$  Zahlfolge in  $\mathbb{C}$  komplexe Zahlfolge in  $\mathbb{R}^n$  vektorwertig

Nullfolge  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Vergleichskriterium  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \wedge |x_n| \leq r_n \ (\forall n > n_0) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Rechenregeln

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) \quad \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \wedge x_n \leq y_n \text{ fast } \forall n \Rightarrow a \leq b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi \wedge a_n \leq x_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = 0$$

Koordinatenweise Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = a_i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$$

monoton wachsend  $x_{n+1} \geq x_n$  streng  $x_{n+1} > x_n$

monoton gegen Limes  $x_n \rightarrow \delta \ (n \rightarrow \infty)$

beschränkt und monoton  $\Rightarrow \exists$  Limes  $x_n \rightarrow \sup S$  resp.  $x_n \rightarrow \inf S \ (n \rightarrow \infty)$

reelle Zahlfolge enthält monot. Teilfolge

Bolzano Weierstrass jede beschränkte Folge in  $X$  besitzt eine konvergente Teilfolge bzw. einen Häufungspunkt

Cauchy-Folge  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0) (\forall n, m > n_0) \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$   
konvergente Folge  $\rightarrow$  Cauchy Folge

Konvergenzkriterium u. Cauchy  $(x_n)$  in  $X$  Cauchy Folge  $\Rightarrow$  konvergent

vollständig metrische Räume Cauchy-Folge konvergiert

uneigentliche Konvergenz  $U_\varepsilon(\infty) = ]1/\varepsilon, \infty[$

$x_n \in U_\varepsilon(\infty) \ \forall n > n_0$  uneigentl. Grenzwert  
 $x_n \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

entspr. uneigentlicher Häufungspunkt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \infty \quad y_n \geq c > 0 \ (\forall n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \infty \quad x_n > 0 \ \forall n$$

spezielle Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p^n} = 0 \quad p \geq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad |q| < 1$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r q^n = 0 \quad |q| < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \cdot \log x = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_p^n} = \max\{a_1, \dots, a_p\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n} = 0 \quad b > 0, b \neq 1$$

Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$   $S_n := \sum_{k=0}^n a_k$  Partialsummen

konvergente Reihe  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$

Cauchy Kriterium f. Reihen  $\left| \sum_{n+1}^m a_n \right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq n_0 \quad (\epsilon > 0)$

n-te Restsumme  $r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad r_n = s - S_n$  Abschleifer

absolut konvergent  $\sum_k |a_k|$  konv.

bedingt konvergent konv. aber nicht absolut konvergent.

spezielle Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad |z| < 1 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \text{ absol. konv.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \text{ konv. } \epsilon > 0$$

Majorantenkriterium  $|a_n| \leq c_n$   $\sum_k |a_n|$  abs. konv.  $\Leftarrow \sum c_n$  konv.

Divergenzkriterium  $0 \leq c_n \leq a_n$   $\sum_k c_n$  div.  $\Rightarrow \sum_k a_n$  div

Wurzelkriterium  $\sum c_n$  konv.  $\sqrt[k]{c_n} \leq q < 1$

Quotientenkriterium  $\sum c_n$  konv.  $\sqrt[k]{\frac{c_{k+1}}{c_k}} \leq q < 1$  / div.  $\frac{c_{k+1}}{c_k} \geq 1$

Abelsches konv. Kriterium  $\sum_k d_n$  Partialsummen beschränkt  $(c_n)$  monof. fallend  $\circ$  Folge  
 $\Rightarrow \sum_k d_n c_n$  konvergiert.

alternierende Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$  konvergiert

$a^+ := \max\{a_i, 0\}$  ;  $a^- := \max\{-a_i, 0\}$   $a^+ - a^- = a$   
 $a^+ + a^- = |a|$

bedingt konv. Reihen lassen sich zu jeder Summe vertauschen  
absolut konv. Reihen können vert. werden

Produkt zweier Reihen  $\sum_{i=0}^N a_i \cdot \sum_{j=0}^N b_j = \sum_{i,j=0}^N a_i b_j$

Faltung  $c = a * b$   $a, b, c$  Folgen  $c_i = \sum_{l=0}^i a_l b_{i-l} = \sum_{l+k=i} a_l b_k$

Stetigkeit  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

quasiuniform  $|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in A$   
Quasiuniforme Abb. sind stetig

Überlagerungsprinzip  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = f(\xi) \Rightarrow f$  stetig  
 $\uparrow$  Testfolge

$f+g \quad x \mapsto f(x)+g(x)$

$f \cdot g \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x)$

$f/g \quad x \mapsto f(x)/g(x)$

Polynom  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

rechtsseitig stetig  $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon \quad \forall x \in [\xi, \xi + \delta]$

linksseitig stetig  $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon \quad \forall x \in [\xi - \delta, \xi]$

punktierte  $\epsilon$ -Umgebung  $\dot{U}_\epsilon(\xi) := U_\epsilon(\xi) \setminus \{\xi\}$

Häufungspunkt einer Menge  $(\exists x) x \in \dot{U}_\epsilon(\xi) \quad (\forall \epsilon > 0)$

$\forall \epsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_\infty \quad x_i \in \dot{U}_\epsilon(\xi) \quad$  unendl. viele Punkte in jeder Umgeb.

isolierter Punkt kein Häufungspunkt

in isoliertem Punkt jede Funktion stetig

Grenzwert einer Funktion  $f(x) \rightarrow \eta \quad (x \rightarrow \xi) \quad \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$   
 $(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - \eta| < \epsilon$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi) \Leftrightarrow f \text{ stetig in } \xi \in A$$

$$\text{Übertragungsprinzip} \quad \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \eta \quad x_n \rightarrow \xi (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{Cauchy Prinzip f. Funktionen} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in U_\delta(\xi)$$

Rechenregeln f. Grenzwerte dank Übertragungsprinzip analog

$$\text{einseitige Grenzwerte} \quad f(x) \rightarrow \eta \quad x \rightarrow \xi^+ \quad \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = \eta \quad f(x) \rightarrow \eta \quad x \rightarrow \xi^-$$

$$|f(x) - \eta| < \varepsilon \quad \forall x \in ]\xi, \xi + \delta[$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi) \quad \text{sonst Sprungstelle}$$

$$\text{uneigentliche Konvergenz} \quad f(x) \in U_\varepsilon(\infty) \quad \forall x \in U_\delta(\xi) \quad f(x) > M$$

$$\text{abgeschlossen} \quad \text{Jeder HP von } A \in A \quad A \cap B \wedge A \cup B \text{ abgeschl.}$$

kompakt abgeschlossen und beschränkt

$$\text{globales Maximum} \quad f(\xi) \geq f(x) \quad \forall x \in A$$

Satz vom Maximum  $A$  kompakt,  $f$  stetig  $f: A \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f$  nimmt glob. Maximum und glob. Minimum an.

$$\text{gleichmäßig stetig} \quad |x - y| < \delta \quad \forall x, y \in A \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$f$  stetig u.  $A$  kompakt  $\rightarrow f$  glm. stetig

$$\text{Zwischenwertsatz} \quad f(a) < 0 < f(b) \wedge f \text{ stetig} \Rightarrow \exists \eta \in (a, b) \quad f(\eta) = 0$$

$$\text{monoton wachsend} \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad \text{steig.} \quad f(x) < f(y)$$

monotone Funktion bis auf <sup>abzählbar</sup> endl. viele Sprungstellen stetig

$$\exp: z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp z - 1}{z} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp z$$

$$\log(e^t) = t \quad e^{\log x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$a^x = e^{x \cdot \log a}$$

$$\text{gerade Funktion} \quad f(-x) = f(x)$$

$$\text{ungerade Funktion} \quad f(-x) = -f(x)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\operatorname{arsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad \operatorname{arcosh} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \operatorname{tgh} x = \pm 1 \quad \operatorname{artgh} y = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$\exp \bar{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\bar{z}}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n} = \overline{\exp z} \quad |e^{it}| = 1$$

$$\underline{\text{cis}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad t \rightarrow e^{it} \quad \text{cis } t = e^{it}$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Periode  $f(t+p) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad p$  kleinste Periode: Fundamentale

Äquivalenzklasse modulo  $2\pi$   $[t_0] = \{t \in \mathbb{R} \mid t = t_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Menge d. Äquivalenzklassen  $\mathbb{R}/2\pi \cong \mathbb{R} \text{ modulo } 2\pi$

$$z = e^{it} \Leftrightarrow \operatorname{arg} z = [t] \quad |z| = 1$$

$$z = |z| \cdot e^{i \operatorname{arg} z} \Rightarrow \operatorname{arg} z = \frac{\log(z)}{i} \Rightarrow \log z = \operatorname{arg} z \cdot i + \log(|z|)$$

$$\operatorname{arg}(z_1 z_2) = \operatorname{arg}(z_1) + \operatorname{arg}(z_2)$$

Polarkoordinaten  $(x, y) = (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad [\varphi] = \operatorname{arg}(x, y)$

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$

Ableitung od. Differenzialquotient

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \left( = \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) = \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

Differenzenquotient

differenzierbar  $\text{Dif. qu. ex.}$

rechtsseit. Abl.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^+)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$f'(x_0) \text{ ex} \Rightarrow f \text{ stetig in } x_0$$

Rechenregeln ...

$$f^{-1}'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

stetig dif'bar  $\text{Ableitung stetig}$

lokales Maximum  $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in U_d(x_0) \cap A$

stationäre Punkte  $f'(x) = 0$

$$\max \{f(x) \mid f(x) \in [a, b]\} = \max \{ \text{St. P., } f(x_1), \dots, f(x_r) \}$$

$f$  stetig auf  $[a, b]$   
 diff'bar auf  $]a, b[$

St. Punkte

Satz von Rolle  $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in ]a, b[ f'(\xi) = 0$

verallg. Mittelwertsatz d. Diffrechnung  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Mittelwertsatz d. Diffrechnung  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$   
 $f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h$

Bernoulli-del'Hopitalsche Regel

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Höhere Ableitungen  $f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k} \quad f \in C^k(I)$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

$$g''(y) = \frac{-f''(g(y))}{[f'(g(y))]^3} \quad g = f^{-1}$$

Konvex  $f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (x_1 < x < x_2) \Leftrightarrow$  "Schwach k."  
 $\Leftrightarrow$  konvex  
 Ernenfunktion

od  $f(x) < \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$

$f$  konvex  $\Rightarrow f$  stetig

$f(x) > f(x_0) + m(x - x_0)$  Stützfunktion  $m \in [f'(x_0), f'(x_1)]$

Monotoniekriterien

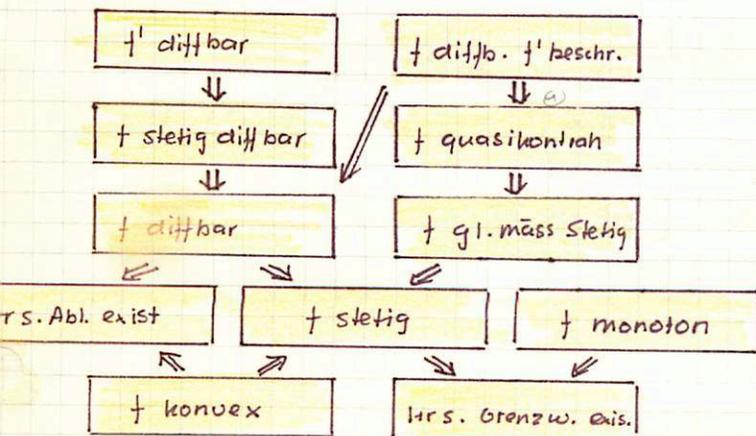
$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$  monoton  
 $f'(x) > 0 \wedge f'(x) \neq 0 \forall x \Leftrightarrow f$  streng monoton  
nicht lösbar's offenes Teilintervall

Konvexitätskriterium

$f''(x) \geq 0 \wedge f'(x) \neq 0 \forall x \Leftrightarrow f$  konvex

Wendepunkt

$$\text{sgn } f''(x_0) \neq \text{sgn } f''(x_0 + \epsilon) = -1$$



quasikonv. oder nicht diffb.

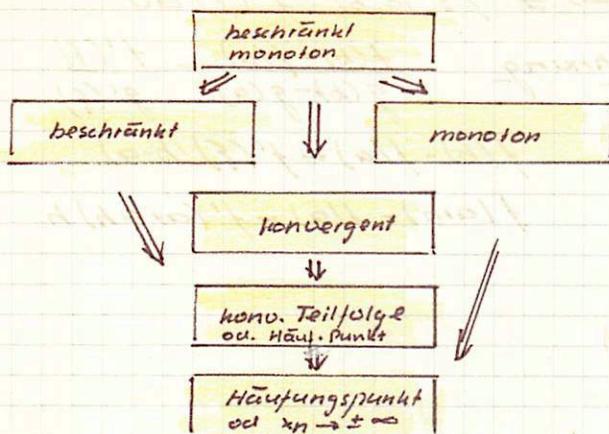
Funktionen

Gewichtssatz

$n$  Tupel  $(p_1 \dots p_n) \quad p_k \geq 0 \quad \sum_{k=1}^n p_k = 1$

Schwerpunkt

$$x^x = \sum_{k=1}^n p_k x_k$$



Folgen

$$f\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$$

p-Norm  $\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$

Minkowskische Ungleichung  $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$   $\Delta$  Ungleichung

Mittel  $\sum_{k=1}^n p_k x_k \geq \prod_{k=1}^n x_k^{p_k}$  ( $x_1 \dots x_n > 0$ )

Höldersche Ungleichung  $|x \cdot y| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$

Taylor Polynom  $T_{n,a} f = \sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}(a)}{r!} \frac{(x-a)^r}{r!}$   
 $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2$

Restform u. Lagrange  $R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_0 + \xi h)$

$f(x) = T_{n,a} f(x) + (x-a)^n r(x)$   $f(x) = T_{n,a} f(x) + O((x-a)^n)$   
 $f(x) = T_{n,a} f(a) + O((x-a)^{n+1})$

Landausche Symbole  $f(x) = o(g(x))$  ( $x \rightarrow a$ )

wenn  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$   $f(x)$  geht schneller gegen 0 als  $g(x)$

$f(x) = O(g(x))$  ( $x \rightarrow a$ )

wenn  $|f(x)| \leq C |g(x)|$

$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$   $f^{(n)}(a) \neq 0$

$n \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow a$  lokales Minimum  $f^{(n)}(a) > 0$   
 $a$  lokales Maximum  $f^{(n)}(a) < 0$

$n \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow a$  Wendepunkt

Taylor Reihe  $T_{\infty,a} f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} \frac{(x-a)^r}{r!}$

finite Funktion  $|f(x)| \leq M \quad f(x) = 0 \quad |x| \geq M$

$$f_{k,r} = \inf \{ f(x) \mid x \in I_{k,r} \} \quad I_{k,r} = [k \cdot 2^{-r}, (k+1) \cdot 2^{-r}]$$

$$F_{k,r} = \sup \{ f(x) \mid x \in I_{k,r} \}$$

Riemannsche Unter- u. Obersumme

$$\underline{S}_r(f) = \sum_k f_{k,r} \cdot 2^{-r}$$

$$\overline{S}_r(f) = \sum_k F_{k,r} \cdot 2^{-r}$$

unteres, oberes Riemannsches Integral

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \underline{S}_r(f) = \int f d\mu$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \overline{S}_r(f) = \int f d\mu$$

Riemann integrierbar  $\int f d\mu = \int f d\mu =: \int f dx$

stückweise stetig stetig bis auf isolierte Unstetigkeitsstellen in denen  $f(\xi^-), f(\xi^+)$  existieren

$f$  stückweise stetig  $\Rightarrow f$  integrierbar

charakterist. Funktion v.A  $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Mittelwertsatz der Integralrechnung  $\int_{[a,b]} f d\mu = f(\xi)(b-a)$

allg.:  $\int_{[a,b]} f p d\mu = f(\xi) \int p d\mu$

Stetigkeitsmodul von  $f$  auf  $A$   $\omega(h) := \sup \{ |f(x) - f(y)| \mid x, y \in A \wedge |x - y| \leq h \}$

allg. Teilung  $a \leq x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$

norm od. Feinheit  $\delta_T := \max \{ x_k - x_{k-1} \mid 1 \leq k \leq n \}$

zur Teilung  $T$  gehörige Riemannsche Summe  $S_T(f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

$$|S_T(f) - \int_{[a,b]} f d\mu| \leq \omega(\delta_T)(b-a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{T_n}(f) = \int f d\mu$$

Hauptsatz d. Infinitesimalrechnung  $\frac{d}{dx} \int_{[a,x]} f d\mu = f(x)$   
Stammfunktion

unbestimmtes Integral Menge aller Stammfunktionen  $\int f(x) dx$

bestimmtes Integral  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$\int (f \cdot g) dx = \int f dx \cdot \int g dx$$

$$\int \lambda f dx = \lambda \int f dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$$

partielle Integration  $\int u(x) u'(x) dx = (u(x) v(x)) - \int u'(x) v(x) dx$

$$\int x^\lambda \log x dx = \left( \frac{x^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^2} ((\lambda+1) \log x - 1) \right)$$

$$\int \cos^n x dx = \left( \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x \right) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

spez.  $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \dots$

$$\int \sin^n x dx = \left( -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x \right) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \left( \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x) \right)$$

erste Substitutionsregel  $\int f(\varphi(x)) e'(x) dx = \int f(u) du$

zweite Substitutionsregel  $\int f(x) dx = \int f(\psi(t)) \psi'(t) dt \Big|_{t := \psi^{-1}(x)}$

Wallis'sches Produkt  $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7}$

Subst. für best. Integrale

$$\int_a^b f(\varphi(x)) e'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\psi(t)) \psi'(t) dt$$

uneigentliches Integral  $\int_a^x f(t) dt$  ev.  $\forall x \in [a, b[$  für  $b$  nicht

konverg. wenn  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$  exist.

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \begin{cases} \text{divergent} & \alpha \leq 1 \\ \text{konvergent} & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \begin{cases} \text{divergent} & \alpha \geq 1 \\ \text{konvergent} & \alpha < 1 \end{cases} \quad \frac{1}{1-\alpha}$$

Gammafunktion  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$   $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$

Integralkriterium  $f$  posit. monot fallend  $\sum_{k=0}^\infty f(k)$  konv.  $\Leftrightarrow \int_0^\infty f(t) dt$  konv.

Partiellbruchzerlegung  $\frac{q}{g} = \sum_{k=1}^{m_0} \left( \sum_{l=1}^{m_k} \frac{A_{kl}}{(x-d_k)^l} \right) + \sum_{j=1}^{j_0} \left( \sum_{l=1}^{n_j} \frac{B_{jl} x + C_{jl}}{x^2 - 2\beta_j x + \gamma_j} \right) + b$

①  $\int A x^k dx = \frac{A}{k+1} x^{k+1}$

②  $\int \frac{A}{(x-d)^m} dx = \frac{-A}{m-1} \frac{1}{(x-d)^{m-1}}$

③  $\int \frac{Bx+C}{(x^2-2\beta x+\gamma)^m} dx = \frac{B}{2} \frac{2x-2\beta}{(x^2-2\beta x+\gamma)^m} + \frac{C+\beta B}{(x^2-2\beta x+\gamma)^m}$

$$\int \frac{2x-2\beta}{(x^2-2\beta x+\gamma)^m} dx = \begin{cases} \log(x^2-2\beta x+\gamma) & (m=1) \\ \frac{-1}{m-1} \frac{1}{(x^2-2\beta x+\gamma)^{m-1}} & m > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2\beta x+\gamma)^m} = \int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m} \Big|_{u=x-\beta} = J_m \quad I_1 = \frac{1}{\lambda} \arctan\left(\frac{u}{\lambda}\right)$$

$$J_{m+1} = \frac{1}{2m\lambda^2} \left( \frac{u}{(u^2+\lambda^2)^m} + (2m-1) J_m \right)$$

Grundintegrale

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \cos x dx = \sin x \quad \int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\int \sin x dx = -\cos x \quad \int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x$$

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

$$\operatorname{artanh} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\operatorname{arcoth} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{cot} x \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \operatorname{coth} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{arcosh} x & x > 1 \\ -\operatorname{arcosh}(x) & x < -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{artanh} x & |x| < 1 \\ \operatorname{arcoth} x & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\int R(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x) dx = \int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}, \frac{2z}{1-z^2}, \frac{1-z^2}{2z}\right) \cdot \frac{2 dz}{1+z^2}$$

$z = \operatorname{tg}(x/2)$

$$\int R(\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x) dx = \int R\left(\frac{2z}{1-z^2}, \frac{1+z^2}{1-z^2}, \frac{2z}{1+z^2}, \frac{1+z^2}{2z}\right) \frac{2 dz}{1-z^2}$$

$z = \operatorname{tgh}(x/2)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c} \right| & a > 0, b^2-4ac < 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arcsin} \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} & a < 0, b^2-4ac > 0 \end{cases}$$

<u>Krümmung</u> $y = f(x)$	$x = x(t), y = y(t)$	$r = r(\varphi)$
$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$	$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$	$k = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$
$\xi = x - \frac{1+y'^2}{y''} \cdot y'$ $\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$	$\xi = x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \cdot \dot{y}$ $\eta = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \cdot \dot{x}$	$\xi = r \cdot \cos \varphi - \frac{(r^2 + r'^2)(r \cos \varphi + r' \sin \varphi)}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$ $\eta = r \cdot \sin \varphi - \frac{(r^2 + r'^2)(r \sin \varphi - r' \cos \varphi)}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}$$

$\alpha \leq 1$  divergent

$\alpha > 1$  konvergent

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha}}$$

$\alpha \geq 1$  divergent

$\alpha < 1$  konvergent

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad \text{konvergent}$$

Substitutionen

$$\int R(e^x) dx = \int R(t) \frac{dt}{t} \Big|_{t=e^x} = \int R_1(t) dt \Big|_{t=e^x}$$

$$\int R(\cosh x, \sinh x) dx = \int R\left(\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right) \frac{dt}{t} \Big|_{t=e^x}$$

$$= \int R_1(t) dt \Big|_{t=e^x}$$

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} \Big|_{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \int R_1(t) dt \Big|_{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\int R(y, \sqrt{y^2+\lambda^2}) dy = \int R_2(u) du \Big|_{u=\frac{1}{\lambda}(y+\sqrt{y^2+\lambda^2})}$$

$$\int R(y, \sqrt{y^2-\lambda^2}) dy = \int R_3(u) du \Big|_{u=\frac{1}{\lambda}(\lambda y+\sqrt{y^2-\lambda^2})}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}) dx = \int R_4(t) dt \Big|_{u=\sqrt{ax+b}}$$

Weg stetige Abb.  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$   $t \mapsto f(t)$   
 Parameter  $f(a)$  Anfangspunkt  
 $f(b)$  Endpunkt  
 $f(a)=f(b)$  geschlossener Weg

Spur  $\{f(t) \mid t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$

äquivalent  $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \exists \omega: I_1 \rightarrow I_2$   $f_2(\omega(t)) = f_1(t)$   
 Parametrisierung bijektiv

stetige Kurve Äquivalenzklasse v. Wegen

totale Variation  $V_{[a,b]}(f) := \sup \{ \sum |V_j(f)| \mid \mathcal{T} \}$  ( $< \infty$  beschränkte Variation)

Länge  $L(\gamma) = V_{[a,b]}(f)$   $L(\gamma) < \infty$  Teilungen  $\gamma$  rektifizierbar

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{f_1'^2(t) + \dots + f_n'^2(t)} dt$$

$v(t)$

spez.:  $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+f_1'^2(t)} dt \quad \text{od.} \quad L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi$$

kanonische Darstellung von  $\gamma$  Bogenlänge als Parameter

regulär  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regulär  $\Leftrightarrow$  stetig diffbar  $\wedge f_1'(t) + \dots + f_n'(t) \neq 0$

Ableitungsvektor  $f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

Tangenteneinheitsvektor  $e_0 = \frac{f'(t_0)}{|f'(t_0)|}$

Tangente  $t' \mapsto f_0 + t' e_0$

glatte Kurve reguläre Parameterdarstellung

$e = \frac{f'}{|f'|} = \frac{f'}{s'} = f'$   $\gamma: s \mapsto f(s)$  Hodograph von  $\gamma$

Tangente  $u \mapsto (x(t), y(t)) + u \cdot (x'(t), y'(t))$

Normale  $u \mapsto (x(t), y(t)) + u \cdot (-y'(t), x'(t))$

Normaleneinh. vektor  $n = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2}}$

Krümmung  $\kappa = \frac{x\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$   $\kappa > 0$   $\kappa < 0$

Radius d. Krümmungskreises :  $\rho = \frac{1}{|\kappa|}$

Krümmungsmittelpunkt  $M_0 = (x_0, y_0) + \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0 y_0' - y_0 x_0'} (-y_0, x_0)$

Explizite Darstellung  $\kappa = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$

Polarkoordinaten  $\kappa = \frac{r^2 + 2r'r'' - r r''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$   $r = r(\varphi)$

Evolute geom. Ort der Krümmungsmittelpunkte  
Einhüllende der Normalen

Evolvente Abwicklungskreisenschar

Jede Kurve ist Evolvente ihrer Evolute.  
Jede Kurve ist Evolute ihrer Evolventen.

Funktionsfolgen  $(f_n)$

„punktweise Konvergenz“  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, f_n \rightarrow f (n \rightarrow \infty)$   
 $\Leftrightarrow (\forall x \in A) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

gleichmässige Konvergenz  $(\forall \epsilon > 0) (\exists n_0 = n_0(\epsilon)) |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in A$

Cauchy Kriterium  $f_n$  konv. gl. mäss.  $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists n_0(\epsilon)) \forall m, n > n_0 \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$

Kriterium v. Weierstrass  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konv. Majorante v.  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$   
 $|f_n| < c_n \quad \forall n \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n$  gl. konverg.

Bsp  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  konv. da  $|\frac{\cos nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$   $\wedge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konv.

Vertauschungssatz  $f_n$  konv. gl. mäss. gegen  $f$   $\lim_{x \rightarrow \xi} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \xi} f_n(x)$

$\lim_{x \rightarrow \xi} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow \xi} f_n(x))$

gl. m.  $f_n \rightarrow f$   $f_n$  stetig  $\Rightarrow f$  stetig

Norm  $\|f\| : \sup \{|f(x)| \mid x \in A\}$

$C(A)$   $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig <sup>Def.</sup> metrischer Raum mit obiger Norm  
vollst. metri. Raum wenn  $A$  kompakt

## Ableitung

## Integral

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx$$

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$$

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k(x) dx$$

konv. f.  $\Rightarrow$  gl.m. konv.

gl.m. konv.

gl.m. konv.

gl.m. konv.  
integrierb.

Integral mit Parameter  $\int_a^b f(x, \lambda) dx$

Leibniz'sche Regel f. Differential und Integralzeichen

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx \Rightarrow F'(\lambda) = \int_a^b f_\lambda(x, \lambda) dx$$

abgeschlossene reelle Achse  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

limes inferior  $x$  Menge der Häufungsp.

$$\inf x := \lim_{k \rightarrow \infty} \inf x_k$$

entspr. limes superior

lim  $\overline{\lim}$  andere Schreibweise

Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x) = T_{\infty, 0} f$

Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Formel von Hadamard

$|z| > \rho$  Divergenz

$|z| < \rho$  absolute Konvergenz

$|z| = \rho$  auf abgeschl. Kreisscheibe m.  $r < \rho$  gl. mäss. konverg.

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \in \infty$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$\lambda \in ]-\rho, \rho[$$

$$\int f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

Binomialkoeffizienten  $\binom{d}{k} := \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)}{k!}$   $\binom{d}{0} = 0$

Binomialreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} x^k = (1+x)^d$

Satz von Abel  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k} = -\log(2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2})$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k} = \frac{\pi - \varphi}{2}$

$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_m) &= y_1 \\ f_2(x_1, \dots, x_m) &= y_2 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) &= y_n \end{aligned}$$

Interpretation:  $\left. \begin{matrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{matrix} \right\}$  Koordinatenfunktionen

$\left. \begin{matrix} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) \\ f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \\ \vdots \\ f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \end{matrix} \right\}$  partielle Funktion

offene Menge Teilmenge eines metrisch. Raumes  $(\forall x \in A) \exists U_\varepsilon(x) \mid U_\varepsilon(x) \subset A$

Lin. Abb.:  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  gleichm. stetig auf  $\mathbb{R}^m$

Norm  $\|L\| := \sup \left\{ \frac{|Lx|}{|x|} \mid x \neq 0 \right\} = \sup \{ |Lx| \mid |x| = 1 \}$

$\|ML\| \leq \|M\| \|L\|$

differenzierbar  $f(x+h) - f(x) = L(x) + o(x)$

partielle Ableitung  $f_{ix} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \Big|_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_1, \dots, x_k+h, \dots, x_m) - f_i(x_1, \dots, x_m)}{h}$

Jacobische Matrix  $[f_x(x)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \Big|_x \right] = \frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_m)} \Big|_x$

$f_{ik}$  stetig  $\Rightarrow \exists f_x(x) \wedge [f_x(x)] = [f_{ik}(x)]$

$m=1 \quad t \rightarrow (f_1(t), \dots, f_n(t)) \quad [f_x(t)] = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix}$

$n=1 \quad (x_1, \dots, x_m) \rightarrow f(x_1, \dots, x_m)$

$f_x(x) \cdot X = \text{grad } f(x) \cdot X$

$\text{grad } f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \Big|_x$

Kettenregel  $(g \circ f)_x(x) = g_x(y) \circ f_x(x)$

$$\left[ \frac{\partial(z_1 \dots z_p)}{\partial(x_1 \dots x_m)} \right]_x = \left[ \frac{\partial(z_1 \dots z_p)}{\partial(y_1 \dots y_n)} \right]_{f(x)} \cdot \left[ \frac{\partial(y_1 \dots y_n)}{\partial(x_1 \dots x_m)} \right]_x$$

Differenziation unter Integralzeichen

$$F(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x, \lambda) dx$$

$$F'(\lambda) = f(b(\lambda), \lambda) b'(\lambda) - f(a(\lambda), \lambda) a'(\lambda) + \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f_x(x, \lambda) dx$$

Mittelwertsatz

$$f(b) - f(a) = \text{grad } f(\xi) \cdot (b-a) \quad \text{Zahlenwert. Funkt.}$$

$$|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |b-a| \quad \text{Wektorwert. Funkt.}$$

r tes Differential

$$\sum_{k_1, k_2, \dots, k_r=1}^m f_{k_1 \dots k_r}(x) x_{k_1} \dots x_{k_r} = D^r f(x)(x)$$

Taylor:

$$f(a+x) = \sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} D^r f(a)(x) + \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} f(a+\theta x)(x)$$

Stationäre Punkte

$$\text{grad } f(a) = 0$$

Extrema

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{notwendig}$$

$$D^2 f(x_0, y_0)(x, y) = f_{xx} x^2 + 2 f_{xy} xy + f_{yy} y^2$$

positiv definit  $\Rightarrow$  lokales Minimum  
 negativ definit  $\Rightarrow$  lokales Maximum  
 indefinit  $\Rightarrow$  kein lokales Extremum

Det.:

$$A := (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)_{x_0, y_0}$$

$A > 0 \quad f_{xx} > 0 \quad \text{lokales Minim.}$   
 $A > 0 \quad f_{xx} < 0 \quad \text{lokales Maxim.}$   
 $A < 0 \quad \text{kein Extremum}$

Extrema m. Nebenbedingungen

$$f, g_1, \dots, g_r \quad \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad r \in m$$

$$\left. \begin{array}{l} g_1(p) = 0 \quad \dots \quad g_r(p) = 0 \\ \text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \text{grad } g_i(p) \end{array} \right\} \text{gl. syst. } \lambda_1, \dots, \lambda_r$$

reguläre Funktion

stetig diffbar  $f_x$  hat in allen Punkten Maximalrang

stetige lin. Abb.

$A \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  stetig:  $l_{ij}(x)$  stetige Funktionen

stetig diff'bar

$f$  besitzt stetige partielle Ableitungen

Satz über Umkehrabb

$f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig diffbar  $f_x(a)$  regulär  $f(a) = b$

$\Rightarrow f$  bildet offene Umg.  $f|_U$  bijekt. in offene Umg. von  $b$  ab  $f_x$  auf ganz  $U$  regulär

$\Rightarrow g := (f|_U)^{-1}$  stetig diffbar  $g_x(b) = (f_x(a))^{-1}$

## Funktionaldeterminante $\det f'(x(a))$

zur Kettenregel

$$F(t) = f(u(t), v(t), w(t))$$
$$\frac{dF}{dt} = \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{dt}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{dt}{dw} \cdot \frac{dw}{dt}$$

implizite Funktionen

$$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

$$\vdots$$
$$f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

spez.  $n=1$

$$f(x_1, \dots, x_m, y) = 0 \quad y = g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = - \left( \frac{df}{dx_1} + \frac{df}{dx_2} \dots + \frac{df}{dx_m} \right) / \frac{df}{dy}$$

$m=1$

$$f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$$

$$\vdots$$
$$f_n(x, y_1, \dots, y_n) = 0$$

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{df_1}{dy_1} & \dots & \frac{df_1}{dx} & \dots & -\frac{df_1}{dy_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\frac{df_n}{dy_1} & \dots & \frac{df_n}{dx} & \dots & -\frac{df_n}{dy_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{df_1}{dy_1} & \dots & \frac{df_1}{dy_i} & \dots & -\frac{df_1}{dy_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\frac{df_n}{dy_1} & \dots & \frac{df_n}{dy_i} & \dots & -\frac{df_n}{dy_n} \end{vmatrix}}$$

$S \subset \mathbb{R}^n$  liegt schlicht über  $U \subset \mathbb{R}^{m(n)}$  wenn  $P_{15}$  bij. Abb. v.  $S$  auf  $U$

$X$  metrischer Raum

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists U_\varepsilon(x) \subset A\} \quad \text{Inneres von } A$$

$$\bar{A} := \{x \in X \mid \exists U_\varepsilon(x) \subset A\} \quad \text{Äusseres von } A$$

$$\text{rd}A := \{x \in X \mid \forall U_\varepsilon(x) \quad U_\varepsilon(x) \not\subset A \wedge U_\varepsilon(x) \not\subset A^c\} \quad \text{Randmenge von } A$$

$$\bar{A} \cup \text{rd}A = \bar{A} \quad \text{abgeschlossene Hülle von } A$$

$r$  Würfelgebäude  $I_{d,r} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \frac{dx_k}{2r} \leq x_k \leq \frac{dx_{k+1}}{2r} \quad (1 \leq k \leq m)\}$

inneres u. äusseres Mass von  $A$   $\mu_r(A) = \sum_{I \in I_{d,r}(A)} 2^{-mr} \quad \bar{\mu}_r(A) := \sum_{I \in I_{d,r}(\bar{A})} 2^{-mr}$

inneres u. äusseres Jordansches Mass  $\mu(A) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mu_r(A) \quad \bar{\mu}(A) := \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\mu}_r(A)$

Jordan messbar  $\mu(A) = \mu(A) = \bar{\mu}(A)$

Nullmenge  $\mu(A) = 0$

Mengentrip - Gesamtheit d. messbaren Mengen bilden Mengentrip  
 $A \cup B \quad A \setminus B \quad A \cap B$

Endliche Additivität  $A \cap B$  Nullmenge  $\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

$\mu(I^L)$  Volumen des d. lin. Abb. transform. Einheitswürfels

$$\chi_L = \mu(I^L)$$

$$\mu(A^L) = \chi_L \cdot \mu(A)$$

$$\mu(A^L) = |\det L| \cdot \mu(A) \quad \dots$$

Riemann'sche Ober u. Untersumme

$$\underline{S}_r(f) = \sum_{\alpha} \underline{f}_{\alpha r} \cdot 2^{-mr} \quad \overline{S}_r(f) := \sum_{\alpha} \overline{f}_{\alpha r} \cdot 2^{-mr}$$

unteres, oberes Riemann'sches Integral  $\lim_{r \rightarrow \infty} \underline{S}_r(f) = \int f d\mu \quad \dots$

Reduktionssatz  
Fubini

$$\int f(x,y) d\mu_{x,y} = \int \left( \int f(x,y) d\mu_y \right) d\mu_x$$

Riemann'sches Integral über d. Menge A  $\int_A f d\mu = \int \chi_A f d\mu$

Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varrho \\ y &= r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varrho \\ z &= r \cdot \sin \varrho \end{aligned}$$

Länge  
Breite

Transformationsformel

$$\int_B f(x) d\mu_x = \int_A \tilde{f}(u) |g_x(u)| d\mu_u$$

|| Polarkoord. r      Zylinderkoord. r      Kugelkoordin.  $r^2 \cos \varphi$

Kriterium f. Existenz von  $\int_B f d\mu$   $\forall \varepsilon \exists P$   $\sum_{B_i, P} \overline{f} - \sum_{B_i, P} \underline{f} < \varepsilon$   
Teilung

D Nullmenge  $\exists \forall \varepsilon \exists S_1, S_2, \dots, S_m$   $\mu(S_1) + \mu(S_2) + \dots + \mu(S_m) < \varepsilon$  endl. achsenparallel Rechtecke überdecken D

Bild einer stetig. Funkt. braucht nicht Nullmenge zu sein (Parameterdarstellung)  
Bsp. Peano Kurve

Bildgraph einer stetig. Funktion ist Nullmenge

zulässig  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  Funkt. zulässig, falls beschränkt u. stetig ausser in Nullmenge

Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  zulässig falls beschränkt und Rand Nullmenge

$$\mu(A) := \int_A 1 d\mu$$

Mittelwertsatz

$f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$   $f|_A$  zulässig

a)  $\inf_A f \cdot \mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq \mu(A) \sup_A f$

b)  $\exists \xi \in A$   $\int_A f d\mu = \mu(A) \cdot f(\xi)$

A kompakt u. zusammenhängend und f stetig auf A

Flächeninhalt

$$\omega(A) = \int_A |f_1 \times f_2| d\mu_u$$

f stetig diffb.  
 $f_1 \times f_2 \neq 0$  fast überall  
A zulässig, kompakt

Rotationsflächen

$$\omega(S) = 2\pi \int_0^b g(z) \sqrt{1+g'(z)^2} dz$$

gewöhnliche Dgl. 1. Ordnung  $y' = F(x, y)$

$y' = f(x)$   $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$

$y' = f(y)$   $x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt$

separierb. Dgl.  $y' = f(x)g(y)$   $\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x) dx$

$y' = f(x+y)$   
 $u = x+y$   
 $u' = 1+y'$   $\int \frac{du}{1+f(u)} = x + C$

Dgl. einer Kurvenschar  $\phi(x, y, C) = 0$   
 $\phi_x(x, y, C) + \phi_y(x, y, C) y' = 0$

Supremumnorm  $\|d\| = \sup_{x \in I} |d(x)|$

kontrahierende Abb.  $\|\phi d - \phi \beta\| \leq C \cdot \|d - \beta\|$

Lin. hom. Dgl. 1. Ordnung  $y' = p(x) \cdot y$

$y = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^x p(t) dt}$

Lin. inhom. Dgl. 1. Ordnung  $y' = p(x) \cdot y + q(x)$

$y = e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} \left[ C + \int_{x_0}^x q(t) \cdot e^{-\int_{x_0}^t p(s) ds} dt \right]$

Lin. hom. Dgl. systeme "Jordanform"

Lin. hom. Dgl. höh. Ordn. m. konst. Koeff.  $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

Ansatz:  $y = e^{\lambda x}$

$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \dots C_n e^{\lambda_n x}$

$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$   
 charakt. Polynom

$\lambda^n = 0$   $n$  fache Nullstelle:  $(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 \dots C_n x^{n-1}) e^{\lambda x}$

$\lambda = a + ib$  Nullstelle  $\Rightarrow e^{ax} (\cos bx + \sin bx)$

$\lambda^n = a + ib$  Nullstelle  $\Rightarrow e^{ax} (\cos bx + x \cdot \cos bx + x^2 \cos bx + \dots)$   
 $e^{ax} (\sin bx + x \cdot \sin bx + x^2 \sin bx + \dots)$

Lin. inh. Dgl. höh. Ordn. m. konst. Koeff. (I)  $y'' + p_1(x) y' + p_0(x) y = q(x)$

(H)  $y'' + p_1(x) y' + p_0(x) y = 0$

Lös. u. H  $y = C_1 e_1(x) + C_2 e_2(x)$   
 Ansatz:  $y = \gamma_1 e_1(x) + \gamma_2 e_2(x)$  Lösung u. I

$\gamma_1' = \frac{-q \cdot e_2}{e_1 e_2' - e_1' e_2}$   $\gamma_2' = \frac{q \cdot e_1}{e_1 e_2' - e_1' e_2}$

Lineare Operatoren  $\mathcal{L} \mathcal{O}$  lin. Selbstabb.  $V \rightarrow V$

$\Omega : D^n + [p_{n-1}(x)] \circ D^{n-1} + \dots + [p_1(x)] \circ D + [p_0(x)]$

$\varphi$  Lös. von I  $\Leftrightarrow \Omega \varphi = q$

Zentralfeld  $\underline{v}(x) = f(r) \cdot \frac{x}{r}$   $f: ]0, r[ \rightarrow ]-\infty, \infty[$

Gradientenfeld  $\underline{v}(x) = \text{grad} f(x)$

Arbeit u. Weg längs  $\gamma$   $w_\gamma = \int_0^b \underline{v}(x(t)) \cdot x'(t) dt$  Liniintegral

homogen  $\underline{v}(x) = \text{konst.}$

$dx := x'(t) dt$   $w_\gamma = \int_\gamma \underline{v} dx = \int_\gamma P dx + Q dy$   $\frac{P(x,y), Q(x,y)}{\underline{v}}$

Addition v. Wegen  $\int_\gamma k \cdot dx = \int_{\gamma_1} k \cdot dx + \int_{\gamma_2} k \cdot dx$

Umkehr  $\int_{-\gamma} k \cdot dx = - \int_\gamma k \cdot dx$

Gruppe der Ketten in d. offener Menge  $A \subset \mathbb{R}^m$

kurve stückweise stetig diffbar Kurve normalorientiert

Zyklus Summe v. geschlossenen Kurven

konseruativ, exakt  $\int_{\gamma_1} k \cdot dx = \int_{\gamma_2} k \cdot dx$   $\gamma_1, \gamma_2$  denselben Anfangs u. Endp.

Arbeit = Potentialdifferenz

$\underline{v}(x) = \text{grad} f(x)$   $\forall x \in A$   $A$  stetig diffbar  $\Leftrightarrow \underline{v}$  konservativ

Integrierbarkeitsbedingung  $\underline{v}$  stetig diffbares Potentialfeld  
 $\Rightarrow v_{1,2} = v_{2,1}$   $v_{2,3} = v_{3,2}$   $v_{3,1} = v_{1,3}$

Rotation  $\text{rot}(\underline{v}) := (v_{3,2} - v_{2,3}, v_{1,3} - v_{3,1}, v_{2,1} - v_{1,2})$   
Wirbelstärke

Algebra  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$   $\text{rot} \underline{v} = \nabla \times \underline{v}$

Argumentzunahme  $\int_\gamma \left( \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right)$

$\text{rot} \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}$  Potentialfeld  $\underline{v}$  stetig diffb. auf  $\mathbb{R}^2$

2 dimens.:  $\text{rot} \underline{v} = (0, 0, Q_x - P_y)$  kurz  $\text{rot} \underline{v} = Q_x - P_y$

Green'sche Formel  $\int_{\partial A} \underline{v} dx = \int_A \text{rot} \underline{v} d\mu_{xy}$

$$\int_{\partial A} P dx + Q dy = \int_A Q_x - P_y d\mu_{xy}$$

$$\int_{\partial A} \underline{v} = \int_A d\underline{v} \quad \text{memotechnisch}$$

Flächenberechnung  $w(A) = \int_{\partial A} x dy = - \int_{\partial A} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial A} (x dy - y dx)$

Flussintegral  $\phi = \int_B \underline{v}(f(u)) \cdot (f_{,1}(u) \times f_{,2}(u)) \cdot d\mu_u$

$$d\underline{w} = |f_{,1} \times f_{,2}| d\mu_u$$

$$d\underline{w} = (f_{,1} \times f_{,2}) d\mu_u = \underline{n} \cdot d\underline{w} \quad \underline{n} = \frac{f_{,1} \times f_{,2}}{|f_{,1} \times f_{,2}|}$$

$$\phi = \int_\gamma \underline{v} \cdot \underline{n} d\underline{w} = \int_{\mathbb{R}^2} \underline{v} d\underline{w}$$

Green:  $\int_{\partial A} (P dx + Q dy) = \int_A (Q_x - P_y) dx dy$

$\int_{\partial A} \underline{v} dx = \int_A \text{rot } \underline{v} dx dy$   
 Linienintegral      Flussintegral

Flächenberechnung  $\omega(A) = \int_{\partial A} x dy = - \int_{\partial A} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial A} x dy - y dx$

Flussintegral  $\phi = \int_B \underline{v} (f_1(u), f_2(u)) \cdot (f_1'(u) \times f_2'(u)) \cdot du = \int_B \underline{v} \cdot \underline{n} du = \int_B \underline{v} d\omega$

Stokes  $\int_{\partial S} \underline{v} dx = \int_S \text{rot } \underline{v} d\omega$   
 $\partial S$  Randintegr.  $S$  Fluss von  $\text{rot } \underline{v}$  durch  $S$   
 durch  $\partial S$  geschlossen.

Divergenz  $\text{div } \underline{v} = v_{1,1}(x) + v_{2,2}(x) + v_{3,3}(x)$

Gauss  $\int_{\partial K} \underline{v} d\omega = \int_K \text{div } \underline{v} dx$   
 $\partial K$  geschlossen

affine Geometrien

Endliche Mengen  
Axiome

Geometrie

Theorie der Transformationen  
im Raum Teilgebiet  
Aufbau durch Gruppe der  
Ebenenspiegelungen im 3D Raumallgemeines  
Vektorprodukt

$$\underline{\text{def.}}: \left| \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \} \right| \\ = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \\ \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \} \cdot \vec{a}_i = 0$$

Das allgemeine  $n$ -Vektorprodukt ist nur im  $n+1$  dim Raum definiert. Es ordnet  $n$  Vektoren einen zu ihnen senkrecht stehenden Vektor zu. Die Länge des Vektors beträgt gleich dem  $n$ -Mass der  $n$  Vektoren, dem "Volumen" das von ihnen aufgespannt wird. Das ist gleich der Determinante der  $n$  Vektoren im  $n$  dim Raum.

$$n=1 \quad \left| \{ \vec{a}_1 \} \right| = |\vec{a}_1| \quad \text{Länge des Vektors}$$

$$n=2 \quad \left| \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \} \right| = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| \quad \text{Fläche des Parallelogramms}$$

$$\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

$$n=3 \quad \left| \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \} \right| = |\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3|$$

Volumen des  
Parallelepipedes

Gramsche Determinante:

$$\left| \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \} \right| \cdot \left| \{ \vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \dots, \vec{a}'_n \} \right| \\ = \begin{vmatrix} (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}'_1) & \dots & (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}'_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\vec{a}_n \cdot \vec{a}'_1) & \dots & (\vec{a}_n \cdot \vec{a}'_n) \end{vmatrix}$$

allgemeiner Eulerscher  
Polyeder Satz $P_i$ : Anzahl  $i$  dimensionale  
Teilstücke eines  $n$ -dim  
Polyeders

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i P_i = 1 + (-1)^n$$

$$n=3 \quad e - k + f - r = 0$$

# Quaternionen

$$(a, \vec{a}) \quad a \in \mathbb{R}, \vec{a} \in U_3$$

$$(a, \vec{a}) \oplus (b, \vec{b}) := (a+b, \vec{a} + \vec{b})$$

$$(a, \vec{a}) \odot (b, \vec{b}) := (ab - \vec{a} \cdot \vec{b}, a\vec{b} + b\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$$

$$\overline{(a, \vec{a})} := (a, -\vec{a})$$

$$N(a, \vec{a}) = (a, -\vec{a}) \odot (a, \vec{a}) = a^2 + \vec{a} \cdot \vec{a}$$

## Schiefkörper

Drehung:  $|\vec{d}| = 1$

$$(0, \vec{x}') = (\cos \varphi, \sin \varphi \vec{d}) \odot (0, \vec{x}) \odot \overline{(\cos \varphi, \sin \varphi \vec{d})}$$

$$q_0 = \cos \varphi, \quad q_1 = d_1 \sin \varphi, \quad q_2 = d_2 \sin \varphi, \quad q_3 = d_3 \sin \varphi$$

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & 2(q_2 q_1 - q_0 q_3) & 2(q_3 q_1 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) & 2(q_3 q_2 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \delta^{-1} & x & = & \overline{Q} & x' & Q \\ \delta & x' & = & Q & x & \overline{Q} \end{matrix}$$

Drehwinkel  $\cos \varphi = \frac{1}{2} (\text{spur } C - 1)$

$$Q = q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3$$

$$i_1 i_1 = i_2 i_2 = i_3 i_3 = -1$$

$$i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3$$

$$i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1$$

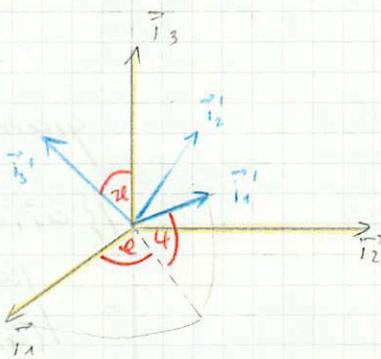
$$i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2$$

$$N(A) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

$$N(A \cdot B) = N(A) \cdot N(B) \quad (\text{Zahlentheorie})$$

# Eulersche Winkel

$$(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3) \rightarrow (\vec{i}'_1, \vec{i}'_2, \vec{i}'_3)$$



$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \varphi \cos \vartheta - \cos \varphi \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \vartheta + \sin \varphi \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Generalized rigid bodies

$G$  Lie group,  $\mathfrak{g}$  Lie algebra of  $G$   
 $L_g, R_g: G \rightarrow G$   $L_g h = gh, R_g h = hg$   
 $R_g \circ L_g$  inner automorphism:  $G \rightarrow G$   
 with derivative  $Ad_g: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  "Adjoint representation"  
 $Ad_g[\xi, \eta] = [Ad_g \xi, Ad_g \eta]$   
 $Ad_{gh} = Ad_g Ad_h$   
 $Ad: G \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$   
 $ad = Ad_{x.e}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$   
 $ad_\xi \eta = [\xi, \eta]$

Example:  $G = SO(N, \mathbb{R})$   $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(N, \mathbb{R})$   
 $H \mapsto RHR^T$  inner autom.  
 $Ad_g A \mapsto RAR^T$  derivative of  $Ad$  on Tangent space.  
 $ad_A B = \frac{d}{dt} e^{tA} B e^{-tA} \Big|_{t=0} = AB - BA = [A, B]$

$\mathfrak{g}^*$  dual space of  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}^* = T^* \mathfrak{g}$   
 Skalar product:  $(\xi, \eta)$   $\xi \in T^* \mathfrak{g}, \eta \in T \mathfrak{g}$   
 $(L_g^* \xi, \eta) = (\xi, L_g \eta)$   
 $Ad_g^*: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  coadjoint represent.  
 $ad_\xi^*: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  derivative of  $Ad^*$   
 $ad_\xi \eta = \xi \eta - \eta \xi \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\xi \in \mathfrak{g}, \eta \in \mathfrak{g}^*$   
 where  $(\xi \eta, \eta \xi) = (\eta, [\xi, \eta])$

$x \in \mathfrak{g}^*, \xi \in T \mathfrak{g}^*, \xi = \xi a, x \xi$  "velocity vector"  $a \in \mathfrak{g}$   
 $\Omega(\xi_1, \xi_2) = (x, [a_1, a_2])$   
 is a differential 2-form on nondegenerate, closed, skewsymmetric gives symplectic structure, Kirillov form

$A: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  symmetric positive definite operator.  
 $A_g: T \mathfrak{g} \rightarrow T^* \mathfrak{g}$ :  $A_g \xi = L_g^* A L_g \eta + \xi$   
 "transported on every other tangent space."  
 $\langle \xi, \eta \rangle_g := (A_g \xi, \eta) = (A_g \eta, \xi) = \langle \eta, \xi \rangle_g$   
 Riemannian metric on  $G$  invariant under left translation.  
 $\langle [a, b], c \rangle := \langle B(c, a), b \rangle$   $b \in \mathfrak{g}$   
 $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  bilinear

Example:  $G = SO(N, \mathbb{R})$   
 $\omega_c = L_g^{-1} * x \dot{g} \in \mathfrak{g}$  angular velocity in body  
 $\omega_s = R_g^{-1} * x \dot{g} \in \mathfrak{g}$  " in space  
 $\mathfrak{g}^*$  space of angular momenta  
 kinetic energy gives left invariant Riemannian metric on the group.  
 $A_g: T \mathfrak{g} \rightarrow T^* \mathfrak{g}$  Moment of inertia  
 $T = \frac{1}{2} \langle \dot{g}, \dot{g} \rangle_g = \frac{1}{2} (A \omega_c, \omega_c)$  kinetic energy  
 $M = A_g \dot{g}$  angular momentum  
 $M_c = L_g^* M \in \mathfrak{g}^*$  angular moment. relative to body  
 $M_s = R_g^* M \in \mathfrak{g}^*$  angular moment. relative to space.  
 Principle of least action: Motion of rigid body is geodesic in  $SO(N)$  with left invariant metric.

Generalized Rigid body: geodesic motion with respect to left invariant metric.  
 2 sided invariant metric exists (for example compact Lie groups)  $\Rightarrow$  can identify  $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*$ .  
Euler equations:  $\frac{d}{dt} M_s = 0$   
 $\frac{d}{dt} M_c = \xi \omega_c, M_c \xi$  Lax pair  
 $= \xi A^{-1} M_c, M_c \xi$   
 or  $\dot{\omega}_c = B(\omega_c, \omega_c)$

$\nabla_\xi \xi = \frac{1}{2} [\xi, \xi] - B(\xi, \xi) - B(\xi, \xi)$  covariant derivative  
 $K_{\xi, \eta} = \langle \nabla_\xi, \nabla_\eta \rangle = \langle d, d \rangle + 2 \langle \alpha, \beta \rangle - 3 \langle \alpha, \alpha \rangle - 4 \langle \beta_\xi, \beta_\eta \rangle$   
 $d = \frac{B(\xi, \eta) + B(\eta, \xi)}{2}$ ,  $\beta = \frac{B(\xi, \eta) - B(\eta, \xi)}{2}$ ,  $\alpha = \frac{[\xi, \eta]}{2}$ ,  $\beta_\xi = \frac{B(\xi, \xi)}{2}$ ,  $\beta_\eta = \frac{B(\eta, \eta)}{2}$

connection and curvature of a group with left invariant metric

Dubrovnik, Fomenko, Novikov p. 220

Fibre bundles

$p: E \rightarrow M$  fibre bundle with fibre  $F$   $\dim M = n$   
 $G \times F \rightarrow F$  smooth action of Lie group  $G$   
 $\varphi_\alpha: F \times U_\alpha \rightarrow p^{-1} U_\alpha$  charts of fibre bundle.  
 $\lambda_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$  coordin. transf.  
 Examples:  $p: M \times N \rightarrow M$ ,  $G = \{1\}$  trivial  
 $F = G$  Principal bundle  
 $|F| < \infty$  covering  
 $F = \mathbb{R}^n$   $G = \text{Gal}(\mathbb{R}^n)$  vector bundle  
 $H \leq G$  closed subgroup  
 $p: G \rightarrow G/H = M$  homogeneous space

$f: E \rightarrow E'$  Fibre bundle map  
 $x \in f: M \rightarrow M'$   $p' f = f p$   
 $f_F: F \rightarrow F' \in G$

$p: E \rightarrow M$ ,  $F, G$  connection fibre bundle  $\dim M = n$   
 $M \rightarrow \{n \text{ dim. tangent spaces } \cup \{p \in E\} \text{ called horizontal directions}\}$   
 defines parallel transport on fibres.  
 group of holonomies:  $\ell: \Omega(x_0, M) \rightarrow G = \text{diff } M$   
 $\gamma \mapsto \ell_\gamma: F \rightarrow F$   
 $\ell(\Omega)$  is holonomy group  
 Example: Coverings: Monodromy group.

G-connection:  $\ell_\gamma \in G$   
 want the  $n$  dim. directions invariant under natural  $G$  left action

Differential geometric G-connection: 1 form  $\omega: TE \rightarrow \mathfrak{g}$   
 (i)  $\omega \in \mathfrak{g}$  has form  $\omega = -(\ell g) g^{-1} dg$  tangent vector  
 (ii)  $g^* \omega = \text{Ad}(g) \omega = g \omega g^{-1}$  for Matrix Lie groups. Also general.

$\omega = 0$  defines a G-connection  
 every G connection is a differential geom. G connection.

Every principal fibre bundle is endowed with a differential geometric G-connection.

Locally, the connection has the form  $\omega(g^*x) = \omega dx + g A_\mu g^{-1} dx^\mu$   
 changing of the connection undergoes transformation

$$A \rightarrow g A g^{-1} - \frac{\partial g}{\partial x^\mu} g^{-1} dx^\mu$$

$$A = -\frac{\partial g}{\partial x^\mu} g^{-1} \text{ trivial connection}$$

$\gamma$  path in  $M$   
 Each right translation of  $G$  determines parallel transport of fibre along path  $\gamma$ .

"an element of  $\mathfrak{g}$  can be regarded as an infinitesimal transformation of  $F$ " p 259  
 "in a vector bundle with fibre  $\mathbb{R}^m$ , a G connection is defined by a matrix depending on  $x$  and  $\mu$ "

$$A_\mu(x) = a_{ij\mu}$$

$$a_{ij\mu} - a_{\mu ij} \text{ torsions tensor}$$

(in case fibre =  $\mathbb{R}^n$   
 $\dim M = n$  also)

$$\nabla_\mu \psi^i = \frac{\partial \psi^i}{\partial x^\mu} + a_{ij\mu}(x) \psi^j(x)$$

covariant differential of sections of the bundle.

$$R_{\mu\nu} = [\nabla_\nu, \nabla_\mu] \text{ curvature}$$

parallel transport of a connection of a tangent bundle:  
 "chronological exponential operator"

$$\exp \int_0^1 -\nabla_{\dot{\gamma}} + \frac{d}{dt} dt \text{ chronological process.}$$

Example:  $G \cong U(1) \cong S^1 \cong SO(2, \mathbb{R})$   $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$

$$\omega = -\frac{dy}{2\pi}$$

$$G \text{ connection: } \omega = -\frac{dy}{2\pi} + A_\mu dx^\mu$$

$\omega = 0$  defines hyperplanes in  $E$  transverse to fibres.

$$\text{Gauge transformations: } A_\mu \mapsto A_\mu - \frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu} g(x)^{-1} = A_\mu - \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}$$

$$\text{If } g(x) = e^{i\varphi(x)}, \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu} g(x)^{-1} = i \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}$$

p. 393  $p: E \rightarrow M$  principal F bundle with structure group  $G$   
 $A_a(x)$  Yang-Mills field (local expression for a G connection).  
 $\mathcal{U}$ :  $M \rightarrow \mathbb{R}$  another field  $V$  vector space

$$L(\mathcal{U}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \mathcal{U})^2 - u(\mathcal{U}^2)$$

$$\langle A, B \rangle = -\text{tr}(ad A ad B)$$

$$\langle \partial_\mu \mathcal{U}, \partial_\nu \mathcal{U} \rangle = g^{ab} \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^a}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^b} \right)$$

$$V_a = \partial_a - ad A_a(x)$$

$$L(\mathcal{U}, A) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \mathcal{U})^2 - u(\mathcal{U}^2) + \frac{1}{4} \text{tr}(F_{ab} F^{ab})$$

$$F_{ab} = \frac{\partial A_b}{\partial x^a} - \frac{\partial A_a}{\partial x^b} + [A_a, A_b]$$

$$S = \int L dx$$

Vacuum solution:  $F_{ab} = 0, u(\mathcal{U}^2)$  minim.  
 $\langle \nabla_\mu \mathcal{U}, \nabla_\mu \mathcal{U} \rangle = 0$