序

《九章算术》是我国古代流传下来的一部数学巨著，不仅指导着我国数学的发展达两千余年之久，而且对世界数学的发展也有不可估量的巨大影响，线性联立方程组的解法及有关正负数的引人祇其一例而已。我国古代数学有它自己的体系与形式，与西方之以欧几里得几何为代表的所谓公理化体系者旨趣既异，途径亦殊。《九章》与《几何原本》东西辉映，无疑是数学史上的两大传世名著，也是现代数学的两大源泉。

《九章算术》的刘徽注是数学上的又一伟大成就。刘徽注不仅提出了丰富多采的创见与发明，并以严密的数学用语描述了有关数学概念，对《九章》中的许多结论给出了严格证明。他所采用的证明方法，不仅有综合法、分析法，而且有时还兼用反证法。他沿袭我国古代的几何传统，使之趋于完备，形成具有独特风格的几何体系。刘徽的发明、创造对后世人有所启发，即使对于现今数学也有不少借鉴之处。从对数学贡献的角度来衡量，刘徽应该与欧几里得、阿基米德等相提并论。

遗憾的是，像传本《九章》与刘徽注这样的伟大著作，由于古今文字迥异，专门名词与现代通用者更大不相同，加上文字简略，用字深奥，使当代有志者难于领略。白尚恕同志博征详考，对全书用现代通俗易懂的语言详加注释，既使国内外对我国古代数学有兴趣的人士易于涉猎了解，也使研究我国古代数学的发展及刘徽与其他人如李淳风等的创见有途可循，为之称便。这是一件十分有意义的事。为此不揣冒昧，谨志数语，聊为此书出版作贺。

系统科学研究所　吴文俊

1980 年 12 月 17 日

前　言

《九章算术》是我国现存的一部最古老的数学书。作者不详。初步考证，大约成书于东汉初期。此书采用问题集的形式，搜集了二百四十六道与生产实践相联系的应用问题及其解法，依照问题的性质和解法，分别隶属于方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程及句股九章。

随着社会的发展，社会生产力的逐渐提高，从而促进了数学的发展。《九章算术》就是记载了古代劳动人民在生产实践中总结出来的数学知识。它不但开拓了我国数学的发展道路，在世界数学发展中也占有极其重要的地位。

魏、晋时代，刘徽对《九章算术》作过注解(以下简称为刘注)。唐初，李淳风(?—714)也作过注解(以下简称为李注)。有刘、李注文的《九章算术》，在宋代有北宋元丰年间的刻本，南宋嘉定年间的刻本。清初，这两种刻本都渐次散失。流传到今的只有上海图书馆保存的南宋残本和故宫博物院所藏这残本的抄本。

清代，戴震(1724—1777)对于由《永乐大典》抄录出来的《九章算术》作过校订(以下简称为戴校本)之后，便依次刊刻成四库馆本、武英殿本以及微波榭本。后来还有万有文库本、丛书集成本和四部丛刊本等。为了恢复隋、唐时期的《九章算术》，一九六三年中华书局出版了天算史专家钱宝琮(1892—1974)校点的《算经十书》本。

刘徽除注解《九章算术》外，还编著《海岛算经》一书。由于资料所限，其籍贯身世、生卒年月则无可详考。只能根据不多的一些记载断定他是魏、晋时代淄乡(今山东临淄或淄川一带)人。

刘徽在《九章算术》注解中，“析理以辞，解体用图”，不但给出明确的概念，导出正确的理论，而且还有很多创造发明。从而取得

了不可磨灭的功绩。可以看出，刘徽在数学方面的成就是十分伟大的、十分辉煌的，他不愧是我国古代一位杰出的布衣数学家。

南北朝祖冲之(429—500)是我国古代伟大的科学家，在数学方面多所发明。他也注解过《九章算术》，正如《南齐书》所称："注《九章》，造《缀述》数十篇。"可惜的是他的注文全都亡佚。

唐代李淳风注《九章算术》时，除引证祖冲之及其子祖暅对体积理论的贡献外，其他注文多与刘注相类，较刘注似通俗易懂。

宋代杨辉于《详解九章算法》(1261)中选《九章算术》八十道典型问题进行详解，对刘、李注文也作过一番解释。清代李潢(?—1811)于《九章算术细草图说》中对《九章算术》进行了校订，补绘了图形，列出了细草。对刘、李注文也作了解释。在解释中有的固然十分恰当，有的未必符合注者的原意，还有的地方，他采取避而不释的态度。

《九章算术》及刘、李注文的语句简略，用字深奥，阅读起来，十分不便。为了能较确切地理解作者的原意，必须注释。今以钱宝琮校点本(以下简称为钱校本)为蓝本，参考各家之说，用通俗语言、近代数学术语对《九章算术》及刘、李注文详加注释。为方便计只注释与数学有关的语句，凡与数学关系不大的概不注释。前后共写出注释文字四百九十多条。

由于辗转传抄、影摹刊刻，传本《九章算术》有很多错误文字。经过戴震、李潢等人的校勘，一般都文义通顺，易于了解。尤其是钱宝琮在前人的基础上重加校勘，使得《九章算术》文从字顺，上下贯通。这些对于读者都有莫大的裨益。但是，钱校本也有漏校、误校和句点不妥之处。现今，在注释之余，兼及校点。凡认为前人所校点是正确的，便择善而从。凡是与前人有出入的地方，则凭一管之见，加述理由。共写出校订及句读文字百余条。

此外，钱校本说："商功章阳马术和句股章容圆术的刘徽注中各有意义难于理解而不能句读的文字，无法校订，只能付之缺疑。"对于这些文字，为了抛砖引玉，也做了些试释工作。

由于水平所限，缺点和错误在所难免，尚希不吝指正。

在注释中，曾得到北京师范大学教授程廷熙、钟善基两位先生的指导和协助。初稿之后，承蒙中国科学院系统科学研究所研究员吴文俊先生、中国科学院自然科学史研究所研究员严敦杰先生、内蒙古师范大学教授李迪先生分别先后惠予审阅，并提出宝贵意见。出版之前，又蒙吴文俊先生为本书撰写了序言，中央美术学院教授蒋兆和先生为刘徽绘制了造像。在此一并致以由衷的谢意。

白 尚 恕

一九八〇年十一月于北京师范大学

目　　录

刘徽九章算术注原序

昔在包牺氏始画八卦[1]，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术[2]以合六爻[3]之变。暨于黄帝神而化之，引而伸之，于是建历纪，协律吕，用稽道原，然后两仪四象[4]精微之气可得而效焉。记称隶首作数[5]，其详未之闻也。按周公制礼而有九数[6]，九数之流，则《九章》是矣。

[1] 昔在包牺氏始画八卦

包牺亦作伏戏、宓戏，是历史传说中的神化人物。相传曾作结绳，造九九，执规矩，画八卦。

《汉书·律历志》记载："自伏戏画八卦，由数起。至黄帝尧舜而大备。"颜师古注称："言万物之数因八卦而起也。"包牺所画的八卦是：乾☰，坤☷，震☳，巽☴，坎☵，离☲，艮☶，兑☱。卦中一称为阳爻，就数说可表示为奇；-- 称为阴爻，可表示为偶。如沈括(1031—1095)《梦溪笔谈》："多为阴，如爻之偶；少为阳，如爻之奇。"一卦含有三爻，爻无论阴阳，可以上下重复相叠地排列起来，就叫做卦。这样的卦，其数有八(即 $2^3=8$)，故称为八卦。

[2] 九九之术

"九九"就是九九乘法口诀的称谓。《管子》："宓戏作九九之数。"我国古代的九九乘法口诀，是由"九九八十一"开始，至"二二如四"终止，共三十六句。以后把"一九如九"、"一八如八"等九句加入，共有四十五句。《孙子算经》(四、五世纪)解释九九算法是由九九迄一一。由于这口诀开始于九九两字，所以称为九九。

到宋、元时代，九九乘法口诀的次序已经颠倒过来，《事林广记》及朱世杰《算学启蒙》(1299)所载都是由"一一如一"至"九九

八十一”，与现今四十五句的九九乘法口诀完全一致。杨辉《算法通变本末》(1274) 及程大位《算法统宗》(1592) 所载九九的次序也是由小到大。可是在隋、唐时期，九九曾传入日本，日人源为宪《口遊》(970) 中还记载了始于九九终于一一的逆序口诀。

刘徽所谓“九九之术”，若以李籍《九章算术音义》引《汉书》颜师古注“九九算术，若今《九章》、《五曹》之辈”来解释，则其意义不止于乘法口诀。在古代可能把九九之术作为当时数学的代名词。

[3] 六爻

“爻”是组成卦的基本符号。一称为阳爻，--称为阴爻。一卦含有六爻；在阴阳两爻中若重复地任取六爻上下排列起来，其数有 $2^6=64$。如乾䷀，坤䷁，屯䷂，蒙䷃等，每个叫做重卦；也叫做卦。在八卦里，若重复地任取两卦、上下叠置起来，也可得到六十四 ($8^2=64$) 卦。

爻，表示变动或变化的意思。如《易·系辞》说：“爻者，言乎变者也。”

[4] 两仪、四象

《易·系辞》说：“易有太极，是生两仪。”又说：“两仪生四象。”所谓两仪，一说是指阴阳，阴阳又分老少，故有四象。一说是指奇偶。清代梁章鉅 (1775—1849)《退庵随笔》称：“夫天地间，不过一奇一偶而已。由此生之，皆奇偶之积耳。于是以奇偶互加而生四象，再加而成八卦矣。”若就重复排列来看，这一说法也通。

明末，熊三拔 (Sobathina Urais, 1575—1620)《简平仪说》(1611) 称：“周天圈，以赤道线、极线分为四圈分，每圈分，分九十度为周天象限，四象限共三百六十为周天度数。”其中象限是拉丁文 Quadrante 的译文，Quadrante 的原意是四分之一。这里译作“象限”，一面取意于四象，一面取意于四分之一。“象限”就是表示两条坐标轴分平面为四部分之一。

[5] 隶首作数

相传黄帝时代隶首创造了数。实际上这是一种假托。这种假托都是辗转引自不知撰者的《世本》一书。如《唐六典》引《世本》说：

"隶首造数。"此外其他古笈的传述也是本于《世本》。如徐岳《数术记遗》称："隶首注术，乃有多种。"甄鸾(约 535—566)《五经算术》也说："黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉。"李籍《音义》说："《世本》曰：黄帝时，隶首作数。"

[6] 九数

《周礼》："养国子以道，乃教之六艺，……，六曰九数。"《周礼》未列出九数的细目，其具体内容则无法详考。汉代郑玄注《周礼》时引郑众所说："九数：方田，粟米，差分，少广，商功，均输，方程，赢不足，旁要；今有重差，夕桀，句股也。"

汉武帝曾采用桑弘羊的建议，实行均输法。均输法就是按人口多少，路途远近，谷物贵贱，分配徭役和捐税的制度。《后汉书·朱晖传》说："武帝时所谓均输也。"可见均输并非《周礼》所说九数的一个细目。李俨(1892—1963)《中国数学大纲》说："卷六均输记汉代均输制度。汉代均输由桑弘羊开始(公元前 110 年)。"钱宝琮校点《算经十书》也说："均输已是汉武帝太初元年以后的赋税制度，决不是《周礼》原有的一个细目。"刘徽原序说："徽寻九数有重差之名"，而《九章算术》并无重差一章。由此足见《九章算术》的章名与九数原有细目不同。所以刘徽说："九数之流，则《九章》是矣。""校其目则与古或异。"九数的细目可能是《九章算术》章名的前身。但是，有人把九数与《九章算术》混为一谈。如王孝通(七世纪)说："九数即《九章》。"似是武断。也有人把九数理解为"周朝的算卦"。这种理解，更无根据。

往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补[7]。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。

[7] 汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌，……，各称删补

根据《史记》记载可知：张苍，阳武人，"自秦时为柱下史，明习

天下图书计笈；又善用算律历。”于汉高祖六年(公元前 201 年)从攻臧荼有功而封为北平侯。汉高后八年(公元前 180 年)为御史大夫。汉文帝四年(公元前 176 年)为丞相。曾经“著书十八篇，言阴阳律历事”。

按《汉书》所说，耿寿昌于汉宣帝期间(公元前 73—49 年)“为大司农”。“以善为算，能商功利，得幸于上”。在天文方面，他主张浑天说，于甘露二年(公元前 52 年)曾上奏“以圆仪度日月行，考验天运。日月行赤道”。

张苍及耿寿昌都是以擅长数学著称于世的；虽然《史记》及《汉书》无有记载，但是根据刘徽所说，他们曾删补过旧数学书。

徽幼习《九章》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本榦者，知发其一端而已。又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。且算在六艺，古者以宾兴贤能，教习国子。虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。至于以法相传，亦犹规矩[8]度量可得而共，非特难为也。当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能综于此耳。

周官大司徒职，夏至日中立八尺之表，其景尺有五寸，谓之地中[9]。说云：南戴日下万五千里[10]。夫云尔者，以术推之。按《九章》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术犹未足以博尽群数也。徽寻九数有重差[11]之名，原其指趣乃所以施于此也。凡望极高，测绝深而兼知其远者必用重差，句股则必以重差为率，故曰重差也[12]。立两表于洛阳之城，

令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之景。以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一，所得加表高，即日去地也[13]。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也[14]。以南戴日下及日去地为句、股，为之求弦，即日去人也[15]。以径寸之筩南望日，日满筩空，则定筩之长短以为股率，以筩径为句率，日去人之数为大股，大股之句即日径也[16]。虽天圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。徽以为今之史笈且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美。辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下[17]。度高者重表，测深者累矩[18]，孤离者三望[19]，离而又旁求者四望[20]。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。博物君子，详而览焉。

[8] 规、矩

"规、矩"即是圆规、曲尺。

"规、矩"都是象形名称。在甲骨文中，规字作[illegible]，象征一手拿着规作画图的姿式；矩字作匚，象征曲尺。

在一些古笈中也有关于规矩的记载。如《周礼》称："圆者中规，方者中矩。"《尸子》："古者，倕为规、矩、准、绳，使天下倣焉。"

[9] 地中

"地中"就是一国地域的中央。周朝东都洛邑（即洛阳），认为是适中的地域，故称之为地中。

据《周礼》所载："以土圭（量器，状似直尺，长一尺五寸）之法，测土深，正日景（即影字），以求地中。""日至（即夏至）之景，尺有五寸，谓之地中。"郑众注称："土圭之长，尺有五寸，以夏至之日，立八尺之表（即标竿），其景适与土圭等，谓之地中。"

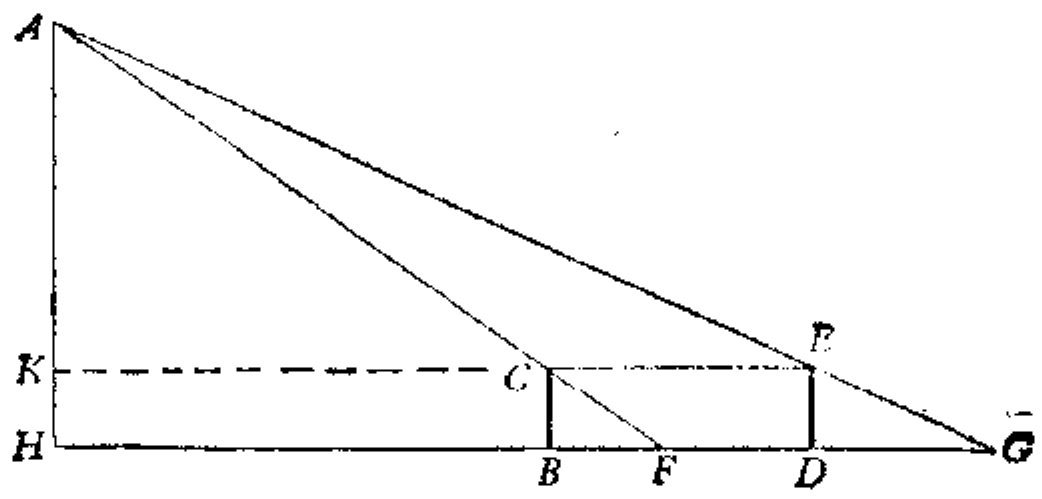


图 1

[10] 南戴日下万五千里

《周髀算经》说："周髀长八尺，句之损益寸千里。"句指表影。影差一寸，南北地差千里。如果在周东都立八尺的表，其影长为一尺五寸时，则从洛阳往南走一万五千里就到所谓太阳的正下面。这样推算是可以的，但"寸千里"这一前提，李淳风已指出："以事考量，恐非实矣。"

《周髀算经》李淳风注："夏至王城望日（A），立两表（BC，DE）相去二千里（$BD=2000$ 里），表高八尺，影去前表一尺五寸（$BF=15$ 寸），去后表一尺七寸（$DG=17$ 寸）。旧术：以前后影差二寸（$DG-BF=2$ 寸）为法，以前影寸数乘表间（$BF\cdot BD$）为实。实如法 $\left(\dfrac{BF\cdot BD}{DG-BF}\right)$ 得万五千里，为日下去南表 $\left(BH=\dfrac{BF\cdot BD}{DG-BF}=15000\right)$ 里。"（图 1）这是依据我国古代盖天说"地法覆盘"进行测算的。但是，把大地表面看作为平面，显然不对。若在不大的地面上用这种方法进行测算则是正确的。其计算方法就是我国古代的测远重差公式。

[11] 重差

《周髀算经》说："偃矩以望高，复矩以测深，卧矩以知远。"《周髀算经》所说的这些方法都是用一次表或矩的简单测量方法。若是需要用两次表或矩"重"复测量，并以两个测得数据的"差"进行计算的方法，则称为"重差术"。上注李淳风所述的旧术即是。

[12] 凡望极高、测绝深而兼知其远者，……，故曰重差也

在测量中，凡是测望不知距离的目的物之高、深或远时，必然使用重差术。即"凡望极高、测绝深而兼知其远者，必用重差"。

在两个相似句股形 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 中：

若 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$， 或 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{A'B'}{A'C'}$，

则

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB-AC}{A'B'-A'C'},$$

或

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}=\frac{AB-A'B'}{AC-A'C'}。$$

这就是说，在这比例式中，两条对应边的比率等于两个对应差的比率，所以刘徽说："句股则必以重差为率，故曰重差也。"由此可知，在重差术的推导过程中，当应用这一原理。

[13] 立两表于洛阳之城，……，即日去地也

在洛阳地面上立两表 BC，DE（如图 1)，各高八尺（$BC=DE=8$ 尺)。假定南北都是平地，就是说 $HBFDG$ 在同一水平线上，在同一天日中正午时，测得表的影长为 BF，DG，以两影的差 $DG-BF$ 为除数，以表高 BC 乘以两表间的距离 $BD(=KE-KC)$ 为被除数。其商 $\dfrac{BC\cdot BD}{DG-BF}$ 加表高 BC 即得太阳至地面的垂直距离 $AH\left(=\dfrac{BC\cdot BD}{DG-BF}+BC\right)$。这就是利用重差术测算"日高"的方法。这方法就是我国古代测高的重差公式。

刘序所说的"实"是被除数，"法"是除数。"实如法而一"是说实里的数够法数那样多就商得一。也即以法除实，或实除以法。

"实如法而一"是古算中一句术语，有时叙述为"如法而一"，或具体地说"三而一"、"六而一"等。

[14] 以南表之景乘表间为实，……，即为从南表至南戴日下也

这段是承上文而言，故将“以景差为法”一语省略，这与上述方法相类：以南表影长 BF 乘表间 $BD(=KE-KC)$ 为被除数，以影差 $DG-BF$ 为除数，相除即得：$BH=\dfrac{BF\cdot BD}{DG-BF}$。这就是前文所说的测远重差公式。

上述方法，都是用重差术测算目的物的高和远的方法。重差术由来已久，我国古筴中只记载其计算方法，却不详其原理。这方法究竟如何形成，很难稽考。魏、晋间赵爽注《周髀算经》中“日高

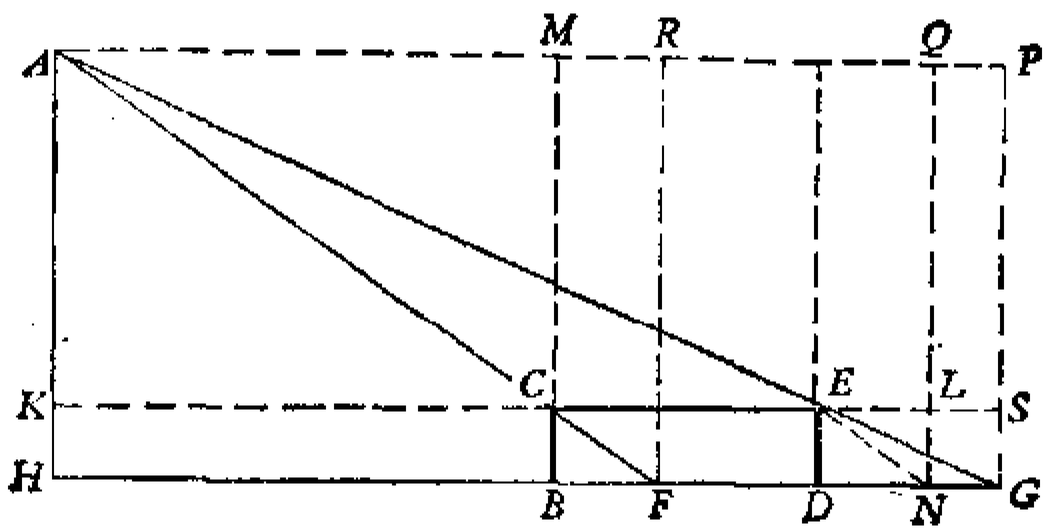


图 2

图”，以矩形面积解释重差术。

在图 2 中，取 $DN=BF$，

因 $\square HE=\square EP$，$\square HC=\square CR=\square EQ$，

相减得：$\square BE=\square LP$。即 $CB\cdot BD=PS\cdot LS$。

故有：

$$AH=\frac{CB\cdot BD}{DG-BF}+BC;$$

仿此可得：

$$BH=\frac{BF\cdot BD}{DG-BF}。$$

杨辉于《算法通变本末》中评论说：“《海岛》题法隐奥，莫得其祕。李淳风虽注，祇云下法，亦不曾说其源。”又于《续古摘奇算法》

中说：“唐、李淳风而续算草，未闻解白作法之旨。”杨辉自谓：“尝置《海岛》小图于座右，乃见先贤作法之万一。”于是认为“刘徽以旁要之术，变重差为减积，为《海岛》九问”。便以矩形面积之差解释重差术。杨辉所说的道理与赵爽的道理相同，明代程大位从之，吴文俊也同意杨辉之说，并称：“杨辉对海岛公式的分析……是基本上正确的。”

清代李潢则利用相似三角形解释重差术。如图 2，作 $EN /\!/ CF$，乃有

$$\triangle ENG \sim \triangle ACE,$$

于是

$$\frac{NG}{DE}=\frac{CE}{AK},$$

故得：

$$AH = AK + KH = \frac{DE \cdot EC}{NG} + KH$$

$$= \frac{CB \cdot BD}{DG - BF} + CB。$$

又因

$$\frac{NG}{DN}=\frac{CE}{KC},$$

乃得

$$HB = KC = \frac{CE \cdot DN}{NG} = \frac{BF \cdot BD}{DG - BF}。$$

沈钦裴、顾观光等都从李潢之说。钱宝琮指出：“图中添线过多，恐不能符合刘徽造术的原意。”李俨认为：“尚不免有牵强之处。”虽然对李潢所说都加以评论，但李、钱两家也都是以相似三角形解释重差术。许莼舫从之。吴文俊说：“牵扯到欧几里得原本之说，是没有任何根据的。”刘徽究竟如何造术，正如钱宝琮说：“关于刘徽重差术的理论根据和他的思想过程，应有进一步探讨的必要。”

唐代王孝通（约 630）《缉古算经》有关各问及宋代秦九韶《数

书九章》(1247)测望九问都是以相似句股形对应边成比例的理论立说，但是魏、晋时代的刘徽是否能以相似三角形立说，不能不使人发生怀疑。

《九章算术》只有句股测望术，至于重差术则缺而不论。刘徽有鉴于此，乃编造海岛九问，列于《九章算术》之终，以弥补其不足。如刘序说："苍等为术犹未足以博尽群数也。"乃"辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下"。"以阐世术之美"。

海岛九问之所以列于句股之下，乃因其与句股有密切关系。《九章算术》句股一章的测望诸问既用相似句股形入算，刘徽的重差术也可能用及相似句股形。虽然杨辉揣测重差术的渊源是矩形面积的差；但，他也不敢自信，他便说："实《九章》句股之遗法也。"严敦杰也认为"这九题都是用相似句股形比例入算"。因此，可以看出重差术造术之源可能是利用两组相似句股形($\triangle EDG \sim \triangle AHG$, $\triangle CBF \sim \triangle AHF$)对应边的比等于对应差的比推导出来的。

[15] 以南戴日下及日去地为句、股，为之求弦，即日去人也

如图3，以"南戴日下"即日"远" BH 为句，以"日去地"即日"高" AH 为股，求得弦为 $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2}$，即是"日去人"的距离。

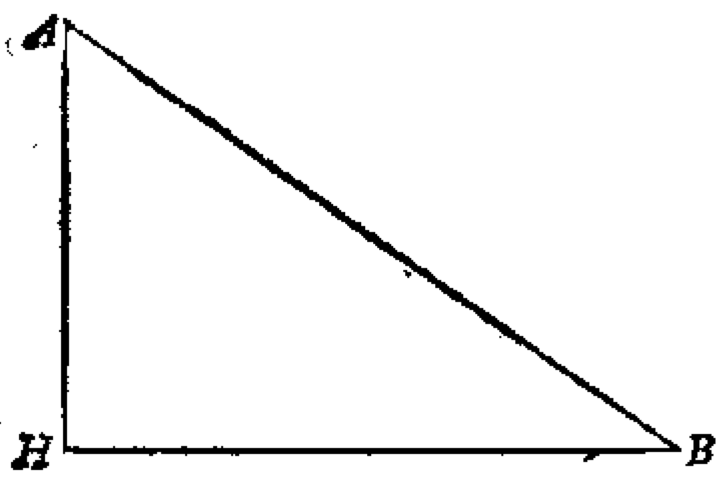


图 3

[16] 以径寸之筩南望日，……，大股之句即日径也

如图4，以内径为1寸的空竹筩，观察太阳的直径。设其直径为 DE，当 C, A, D 及 C, B, E 正好分别在一直线上时，以竹筩长 CF 及内径 AB 之半 FA 作为小句股形的两边；再以日至人的距离 CG 及太阳直径 DE 之半 GD 为大句股形的两对应边。依比例，可得太阳的直径。即：$\dfrac{DE}{2} = \dfrac{\frac{AB}{2} \cdot CG}{CF}$ 或

$$DE = \frac{AB \cdot CG}{CF}。$$

刘序说："以箫径为句率"，"大股之句即日径"。事实上似应分别是"以箫径之半为句率"，"大股之句即日半径"。

[17] 辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下

刘徽感到《九章算术》中测望问题仅须测望一次，而没有用重差术所解的稍复杂的测望问题。他乃编撰《重差》一卷，列于卷九句股之后，以弥补《九章算术》的不足。唐初，将《重差》摘出，另行单本。因《重差》第一问是"望海岛"，以后遂称为《海岛算经》。

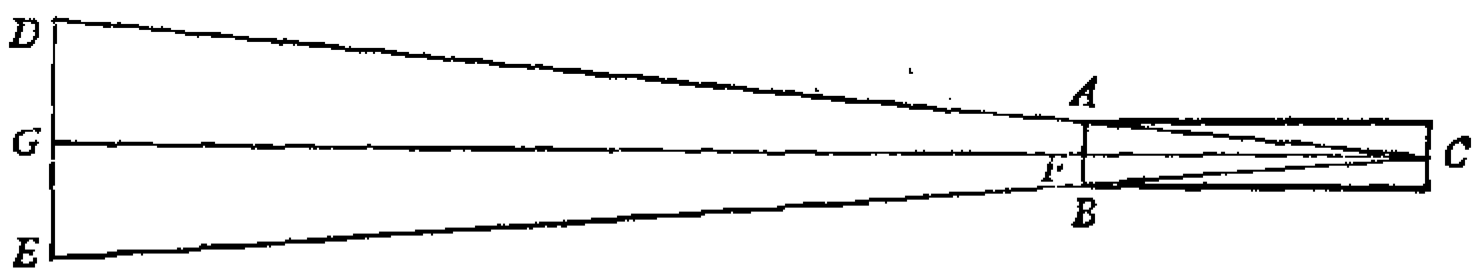


图 4

[18] 度高者重表，测深者累矩

要测量不可到达目的物的高和远时，必须使用重差术。即是刘序说："凡望极高、测绝深而兼知其远者，必用重差。"犹如徐光启（1562—1633）于《测量异同》中说："以重表兼测无远之高、无高之远。""以重矩兼测无广之深、无深之广"。

注文"重表"、"累矩"就是用表或矩测望两次的意思。

[19] 孤离者三望

如上注所说，凡是"无远之高"或"无广之深"，必须测望两次，才能求得其高或深。如果有一目的物在"无远之高"上，或在"无广之深"下，而且总有一处无所依旁、孤离无着，则须测望三次。这就是刘序所说"孤离者三望"的意思。如《海岛算经》第二问即是三次测望的问题。

[20] 离而又旁求者四望

如果所测望的目的物在"无远之高"上或"无广之深"下，不仅孤离无着，又需旁求他处者，则必须测望四次。这就是"离而又旁求者四望"的意思。如《海岛算经》第七问即是四次测望的问题。

九章算术卷第一

方田[1]以御田畴界域

[一]*今有田广[2]十五步，从[2]十六步。问为田几何[3]。

答曰：一亩。

[二] 今有田广十二步，从十四步。问为田几何。

答曰：一百六十八步[4]。图从十四，广十二。

[1] 方田

我国古代对正方形及矩形的田统称为方田。唐代李籍《九章算术音义》称："方田者，田之正也。诸田不等，以方为正，故曰方田。"有时也称矩形的田为直田或广田。明代徐光启译《几何原本》称矩形为直角形。此后，矩形又称为直角方形或长方形。现今已不采用直田、广田或直角方形等名称，而称为长方形或矩形。

长方形及矩形都是象形名称。长方形的直观意义十分明显，矩形则是由"矩"得名。如《周髀算经》称："合矩以为方。"《墨子》："方，矩写交也。"

作为《九章算术》章名的"方田"，应理解为研讨平面形的边界和面积的问题。如刘徽注称："以御田畴界域。"

[2] 广、从

"广"就是宽。"从"（音 zong）即纵，是指其长度。如《广雅·释诂》称："从，长也。"

[3] 问为田几何

钱校本于每问之后都标以问号，如"问为田几何?"即是。如原文是"为田几何"或"问：为田几何"的话，理应标以问号。但钱校

* 为了便于查阅，按卷于各问上加一序号。

本断句为“问为田几何”，使“问”字连下读，按理应标以句号。今改标为句号。

方田术曰：广从步数相乘得积步[5]。此积为田幂。凡广从相乘谓之幂[6]。臣淳风等谨按：经云“广从相乘得积步”，注云“广从相乘谓之幂”，观斯注意，积幂义同。以理推之，固当不尔。何则？幂是方面单布之名，积乃众数聚居之称。循名责实，二者全殊。虽欲同之，窃恐不可。今以凡言幂者据广从之一方；其言积者举众步之都数。经云“相乘得积步”，即是都数之明文。注云“谓之为幂”，全乖积步之本意。此注前云“积为田幂”，于理得通。复云“谓之为幂”，繁而不当。今者注释存善去非，略为料简，遗诸后学。

以亩法二百四十步除之，即亩数。百亩为一顷。

臣淳风等谨按：此为篇端，故特举顷、亩二法。余术不复言者，从此可知。一亩之田，广十五步，从而疏之，令为十五行，即每行广一步而从十六步。又横而截之令为十六行，即每行广一步而从十五步。此即从疏横截之步，各自为方，凡有二百四十步。一亩之地步数正同。以此言之，即广从相乘得积步，验矣。二百四十步者，亩法也。百亩者，顷法也。故以除之，即得。

[4] 步

此处应作平方步解。古代没有严格区分长度、面积、体积单位名称，把步、平方步、立方步统称为步。

[5] 得积步

就是得到乘积的平方步数。

[6] 此积为田幂。凡广从相乘谓之幂

由李淳风注文“积为田幂”可知，钱校本讹作“此积谓田幂”。殿本作“此积为田幂”。今从殿本校正。

冖是幂的古体字。凡是遮盖东西用的布称为幂。如《说文解字》称：“幂，覆也。从一下垂也。”据此，可理解幂为表皮或表面的意思，但其原意并不表示面积。李注说：“幂是方面单布之名，积乃众数聚居之称。”又说：“凡言幂者，据广从之一方，其言积者，举众步之都数。”就是说，幂是由一边伸展而成的面，积是用单位量得的总数。一指形，一言数，两者迥然有别，不能混为一谈。

李淳风鉴于“积”、“幂”意义有别，对刘注“此积为田幂。凡广

从相乘谓之幂”提出批评，指出刘徽对此概念未加区分。李淳风为了使不同的概念有明确的区别，意见是正确的。但是，即使他自己亦未严格遵守。如“令径自乘，以十一乘之，十四而一，即圆幂也”（方田第三十二问又术注）；“假令周六径二，半周半径相乘得幂三”（少广第十八问注）等；其中的幂都应该是积。

王孝通《缉古算经》第二问第一术有“隅阳幂”，此幂是面积；第二术有“又以高幂乘之”，此幂是指高的平方；第十七问有“句弦相乘幂一千三百三十七二十分之一”，此幂应该是积；术文有“为立幂”，此幂相当于长方体的体积。可以看出，唐朝对幂字的解释、用法并不一致。

唐以后，历代数学家对幂的理解也不一样。如秦九韶《数书九章》“三斜求积”术文说：“以小斜幂并大斜幂，减中斜幂”，此幂应是平方。李冶（1192—1279）《测圆海镜》（1248）“识别杂记”称：“凡大小差相乘为半段径幂。虚句乘大股得半段径幂，边股重股相乘得半径幂”，此幂都是平方。《益古演段》（1259）第三问自注称：“今此方斜幂，乃是变斜为方面以自乘之数。”可见此幂应理解为积。朱世杰《算学启蒙》（1299）称：“自相乘之曰幂。”又称：“今有平方幂四千九十六步”，“今有立方幂一万七千五百七十六尺”。到明、清时代，既称面积为幂，也称平方或立方为幂。看来“幂”字的数学意义与刘徽、李淳风的解释有了一定的区别。

清末，李善兰（1811—1882）根据罗密士（Loomis, 1811—1899）的 Elements of Analytical Geometry and of Differential and Integral Calculus（1850）译成《代微积拾级》（1859），其中先译 power 为“方”，后来改译为“幂”。从此便把一数（a）的若干次（b）方的结果（a^b）理解为幂了。随着时代的进展，幂的意义也得到扩充。

［三］今有田广一里，从一里。问为田几何。

答曰：三顷七十五亩。

［四］又有田广二里，从三里。问为田几何。

答曰：二十二顷五十亩。

里田术曰：广从里数相乘得积里。以三百七十五乘之[7]，即亩数。按此术广从里数相乘得积里。方里之中有三顷七十五亩，故以乘之，即得亩数也。

[7] 以三百七十五乘之

《广韵》称："亩，司马法，六尺为步，百步为亩。秦孝公之制，二百四十步为亩也。"

商鞅在秦国实行变法，废除了一百平方步为一亩制，改为二百四十平方步为一亩的制度。秦始皇统一六国后，也采用了这种制度。《九章算术》及刘徽都是沿用秦制。

因：1 里 = 300 步，故：1 平方里 = 90,000 平方步；

于是　　1 平方里 = 90000/240 亩 = 375 亩，即三顷七十五亩。

当由平方里数求亩数时，应"以三百七十五乘之，即亩数"。

[五] 今有十八分之十二。问约之得几何。

答曰：三分之二。

[六] 又有九十一分之四十九。问约之得几何。

答曰：十三分之七。

约分　按约分者，物之数量，不可悉全，必以分言之[8]。分之为数，繁则难用。设有四分之二者，繁而言之，亦可为八分之四；约而言之，则二分之一也。虽则异辞，至于为数，亦同归尔。法实相推，动有参差，故为术者先治诸分。术曰：可半者半之[9]，不可半者，副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之[10]。等数约之。即除也。其所以相减者，皆等数之重叠，故以等数约之。

[8] 不可悉全，必以分言之

古代称整数为全数，或简称为全；称分数为分。

[9] 可半者半之

若分子、分母都是偶数，即是“可半者”；可以 2 约简，即是“半之”。如 4/8 可约简为 2/4，又可约简为 1/2。

[10] 不可半者，副置分母、子之数，……，以等数约之

若分子、母不全是偶数，即是“不可半者”。古代用算筹计算，布列算式时，是用算筹摆成算式；“置”是摆或放，“副置”就是摆或放在别处。“以少减多”是由较多(大)的数减去较少(小)的数。“更相减损”即是辗转相减。当两数辗转相减时，若两方所余的数相等，则称所余的数为“等数”。“等数”就是现今所谓最大公约数。

如果分子、母是“不可半者”，在运算中为了有所区别，便将分子、母置放在别处，“以少减多”，用“更相减损”的方法，求其最大公约数。然后以最大公约数约简分数。

91	49
(91−49=) 42	
	7 (=49−42)
(42−7=) 35	
(35−7=) 28	
(28−7=) 21	
(21−7=) 14	
(14−7=) 7	

图 1

今以第六问为例，说明“更相减损”的方法：

欲求分数 49/91 之分母 91，分子 49 的最大公约数，将 91，49 分列于左右两行(图 1)，先由 91 减 49 一次，余 42；再由 49 减 42 一次，余 7；更由 42 减 7 五次，余 7。左右两行辗转相减的余数相等，这相等的余数 7 就是 91 与 49 两数的最大公约数，称之为等数。

我国古代是以更相减损法求最大公约数，在西欧也有类似情况。如欧几里得《几何原本》所论方法与更相减损法是一致的。钱宝琮《中国数学史话》说：“意大利人班乞奥利 (L. Pacioli) 于 1494 年写一算术书，求最大公约数也用更相减损法。他自己说这种方法是第六世纪中罗马数学家波伊替斯 (Boethius) 所传下的方法，它的远源或者还是从中国传去的。”李之藻 (1565—1630) 根据德国大数学家克拉维斯 (Clavius, 1537—1612)《实用算术》等书编译成《同文算指》(1613) 三编。前编称：

"其积已多，而难折半，又无通数可乘，则须另立纽数归除。其法：以小减大，减尽而止，以最后减尽数为用，以除子、母二数，其所除得数，即是约数。"可见克拉维斯所论之法，与更相减损毫无二致。现在求两数的最大公约数所用的辗转相除法，是由更相减损法演变而成的。

最初，我国称最大公约数为"等数"，等数是由更相减损得名。若以更相减损求得两数的等数为一，则此二数实无"等数"。若按辗转相除而论，这名称显然不符合实际。华蘅芳（1833—1902）有鉴于此，乃改称等数为最大公度数或最大公约数。《学算笔谈》（1882）称："公度数亦名公约数，亦名等数。惟名之为等数之意又稍有不同。因凡有大于一之公度数者，谓之有等之数，否则为无等之数。"后来最大公约数一名才代替了等数一名。辗转相除也就取代了更相减损法。

［七］今有三分之一，五分之二。问合之得几何。

答曰：十五分之十一。

［八］又有三分之二，七分之四，九分之五。问合之得几何。

答曰：得一六十三分之五十。

［九］又有二分之一，三分之二，四分之三，五分之四。问合之得几何。

答曰：得二六十分之四十三。

合分[11] 臣淳风等谨按：合分者，数非一端，分无定准，诸分子杂互，群母参差，麄细[12]既殊，理难从一。故齐其众分，同其群母，令可相并[13]，故曰合分。术曰：母互乘子，并以为实，母相乘为法，母互乘子；约而言之者，其分麄；繁而言之者，其分细。虽则麄细有殊，然其实一也。众分错杂，非细不会。乘而散之，所以通之。通之则可并也。凡母互乘子谓之齐，

群母相乘谓之同。同者，相与通同共一母也。齐者，子与母齐，势不可失本数也。方以类聚，物以群分。数同类者无远，数异类者无近。远而通体者，虽异位而相从也；近而殊形者，虽同列而相违也。[14]然则齐同之术要矣。错综度数，动之斯谐，其犹佩觿解结，无往而不理焉。乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎。其一术者，可令母除为率，率乘子为齐[15]。实如法而一。不满法者，以法命之[16]。今欲求其实，故齐其子，又同其母，令如母而一。其余以等数约之，即得。所谓同法为母，实余为子，皆从此例。其母同者，直相从之[17]。

[11] 合分

"合分"就是将两个分数合并于一起而求其和。"合分术"就是分数加法。

[12] 麄细

任一分数都是把单位分成若干等份取其几份的结果。若分单位的份数较少，即分母较小，则说此分数较麄（麄，音 cu，粗字的异体字）；若分单位的份数较多，即分母较大，则说此分数较细。如分数 1/2 与 4/8，称前者为麄，而后者为细。

[13] 齐其众分，同其群母，令可相并

刘注说："凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。"可看作"齐"、"同"二字的数学意义。于 b/a 与 d/c 两分数中，以 c 乘 b，以 a 乘 d 称为齐，a，c 相乘称为同。齐同的结果为：

$$\frac{b}{a}=\frac{bc}{ac},\qquad \frac{d}{c}=\frac{ad}{ac}。$$

即是"齐其众分，同其群母"。这一运算叫做齐同术，就是现今所谓通分。注文"乘以散之，所以通之"可视为通分一名之所由来。

"并"就是加。"令可相并"即是可以相加。分数相加则称为"合分"。

[14] 数同类者无远，数异类者无近。……，虽同列而相违也

刘徽可能称分母相同的分数为同类数，分母不同的分数为异类数。同类数不算远，异类数不算近。同类数即使远，即分子相差

较大，虽分子的数位不同，总可直接相加；异类数即使近，即分子相差较小，虽分子的数位相同，总不能直接相加。

[15] 其一术者，可令母除为率，率乘子为齐

公分母除以每一分母的商，各称为率，以率分别乘各分子就叫做齐。这一方法对于以各分母的最小公倍数做公分母时更有用。如 5/12 与 11/28，各分母的最小公倍数为 84，而 $84 \div 12 = 7$ 称为率，$84 \div 28 = 3$ 也称为率，以率 7，3 各乘分子 5，11 得 $7 \times 5 = 35$，$3 \times 11 = 33$ 叫做齐；即得：$\frac{5}{12} = \frac{35}{84}$，$\frac{11}{28} = \frac{33}{84}$。

[16] 不满法者，以法命之

"实"是被除数，"法"是除数。"不满法者"是指被除数不满除数，即被除数小于除数时，以实为分子、法为分母组成一分数，这分数即是"以法命之"。

"命"是命名。"以法命之"就是以法为标准命名这一分数。如 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{2}{5}$，前者以三为准，称之为三分之二；后者以五为准，称为五分之二。因此，我国古代有时也称分数为"命分"。

[17] 其母同者，直相从之

若分母相同，则分子可以直接相加。"从"，这里应理解为相加。

[一〇] 今有九分之八，减其五分之一。问余几何。

答曰：四十五分之三十一。

[一一] 又有四分之三，减其三分之一。问余几何。

答曰：十二分之五。

减分[18] 臣淳风等谨按：诸分子母数各不同。以少减多，欲知余几，减余为实，故曰减分。术曰：母互乘子，以少减多，余为实，母相乘为法，实如法而一。 母互乘子者，以齐其子也。以少减多者，子齐故可相减也。母相乘为法者，同其母也。母同子齐，故如母而一，即得。

[一二] 今有八分之五，二十五分之十六。问孰多、多几何。

答曰：二十五分之十六多，多二百分之三。

[一三] 又有九分之八，七分之六。问孰多、多几何。

答曰：九分之八多，多六十三分之二。

[一四] 又有二十一分之八，五十分之十七。问孰多、多几何。

答曰：二十一分之八多，多一千五十分之四十三。

课分[19] 臣淳风等谨按：分各异名，理不齐一，校其相多之数，故曰课分也。术曰：母互乘子，以少减多，余为实，母相乘为法，实如法而一，即相多也。 臣淳风等谨按：此术母互乘子，以少分减多分，与减分意同。唯相多之数，意与减分有异。减分者求其余数有几，课分者以其余数相多也[20]。

[18] 减分

“减分”就是由较大的分数减去较小的分数而求其差。“减分术”即分数减法。

[19] 课分

“课分”就是比较两分数的大小，并考核较大分数比较小分数大多少。

[20] 意与减分有异。减分者求其余数有几，课分者以其余数相多也

《大典》本为：“意与减分有异。”不误。南宋本讹作“意共减分有异”，钱校本以为“亦通”。因前文有“与减分义同”一语，此处当为“意与减分有异”。故依《大典》本。

由于辗转传抄，可能因“知”、“者”两字的行书形近而误。传本

误为“减分知求其余数有几，课分知以其余数相多也”。于意欠通，今为校改。

[一五] 今有三分之一，三分之二，四分之三。问减多益少，各几何而平。

答曰：减四分之三者二，三分之二者一，并以益三分之一，而各平于十二分之七。

[一六] 又有二分之一，三分之二，四分之三。问减多益少，各几何而平。

答曰：减三分之二者一，四分之三者四，并以益二分之一，而各平于三十六分之二十三。

平分[21] 臣淳风等谨按：平分者，诸分参差，欲令齐等[22]，减彼之多，增此之少，故曰平分也。术曰：母互乘子，齐其子也。副并为平实，臣淳风等谨按：母互乘子，副并为平实者，定此平实立限，众子所当损益，如限为平[23]。母相乘为法。母相乘为法者，亦齐其子，又同其母。以列数乘未并者各自为列实[24]。亦以列数乘法。此当副置列数除平实。若然则重有分，故反以列数乘同[25]。 臣淳风等谨按：问云所平之分多少不定，或三或二，列位无常。平三者置位三重，平二者置位二重。凡此之例，一准平分不可予定多少，故直云列数而已。以平实减列实，余，约之为所减。并所减以益于少。以法命平实，各得其平[26]。

[21] 平分

就是求几个分数的算术平均数。

[22] 诸分参差，欲令齐等

若各分数大小不等，将较大者减少，小者增多，使结果一样。

[23] 母互乘子，……如限为平

“平实”系平均数之分子的列数倍。“立限”是立一个限度，也即立一个标准；“损”为减少；“益”乃增多。

此句大意是：将分子、分母互乘之积相加起来，其和是平均数分子的“列数”倍，称为平实。以平实为限度或标准，若已知分数经齐同后分子的列数倍大于平实者，应当减少；小于平实者，应当增多。

[24]以列数乘未并者各自为列实

“列数”是已知分数的个数；“未并者”是各分数齐同后的分子。

此句大意是：以已知分数的个数乘各分数齐同后的分子，乃各称之为列实。

[25] 此当副置列数除平实。若然则重有分，故反以列数乘同

由于分子、母扩大同一倍数，分数的值不变，所以术文说：“以列数乘未并者各自为列实。亦以列数乘法。”术文之所以这样说，其原因还可能有二：（一）不拘平实能否整除以列数，这种乘法运算总是可行的。（二）平实是平均数分子的列数倍，为了便于相减，也必需把未并者扩大列数倍；既然列实是未并者的列数倍，则必须“亦以列数乘法”。但是，刘徽针对“以列数乘未并者各自为列实”提出了新的看法：“此当副置列数除平实。若然则重有分，故反以列数乘同。”其大意为：此处本应以列数除平实，则可得到平均数的分子；若平实不能整除以列数时，势必出现繁分，为了避免出现繁分，反而不以列数除平实，直接以列数乘公分母就得到了平均数。其中“重有分”即是繁分。

今以第十六问为例，说明刘注原意如下：

已知分数为：$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$。平实为：$1 \times 3 \times 4 + 2 \times 2 \times 4 + 3 \times 2 \times 3 = 46$，列数为 3，公分母是 $2 \times 3 \times 4 = 24$。按术文计算，则得列实分别为：

$$(1 \times 3 \times 4) \times 3 = 36,\quad (2 \times 2 \times 4) \times 3 = 48,$$
$$(3 \times 2 \times 3) \times 3 = 54。$$

列数乘法为：$(2 \times 3 \times 4) \times 3 = 72$。于是各分数变形为：$\frac{36}{72}$，$\frac{48}{72}$，$\frac{54}{72}$。

若按刘注，则得 $\frac{46 \div 3}{24}$，即是已知分数的平分。由于平实 46 不能整除以列数 3，乃有繁分 $\frac{46 \div 3}{24} = \frac{\frac{46}{3}}{24}$。所以注说“若然则重有分，故反以列数乘同。”即：$\frac{46 \div 3}{24} = \frac{46}{24 \times 3} = \frac{46}{72} = \frac{23}{36}$。

若就第十五问而论，已知分数为：$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$。平实为：$1 \times 3 \times 4 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 3 \times 3 = 63$，列数是 3，公分母为 $3 \times 3 \times 4 = 36$。按注乃得已知分数的平分为：

$$\frac{63 \div 3}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}。$$

术文“副并为平实”并不是平均数的分子，而是平均数分子的列数倍。若平实能整除以列数如第十五问，只须以平实除以列数的商做为平均数的分子；既无须以列数乘同，也无须乘齐。若平实不能整除以列数如第十六问，为了避免出现繁分，只须以列数乘同，并不须以列数乘齐。

据此，传本于“故反以列数乘同”后衍一“齐”字。今校删。

[26] 以平实减列实，……，各得其平

今以第十六问为例，说明平分术的全部运算过程：

已知分数为：$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$。

“母互乘子，副并为平实，”即 $1 \times 3 \times 4 + 2 \times 2 \times 4 + 3 \times 2 \times 3 = 46$，

平实 46 是三数平均数分子的列数即 3 倍。

“母相乘为法”，即 $2 \times 3 \times 4 = 24$，

这“法”是三数的公分母，不一定是其平均数的分母。

本问有三个已知分数，通分后各为：$\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$，$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$，$\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$。

“以列数乘未并者各自为列实”，就是：$12\times3=36$，$16\times3=48$，$18\times3=54$。

因平实是平均数分子的3倍，故将各分数通分后的分子也乘以列数3，称为列实。

“亦以列数乘法”，即以列数3乘公分母24得：$24\times3=72$，作为平均数的分母。

“以平实减列实，余，约之为所减”。凡大于平实46之列实减去平实，所余与平均数分母约分。即 $48-46=2$，$54-46=8$。以2，8及72约分分别得1，4；36。其中1，4即是“所减”，也就是答案所说“减三分之二者一，四分之三者四”。其中“一”、“四”实际上是三十六分之一、三十六分之四。

“并所减以益于少”。“并所减”得 $1+4=5$，列实中小于平实46者，只有36一数，由于平实减列实之余曾以2约分，所以此处36也须以2约分，得18。“以益于少”即 $18+5=23$，即是平均数约分后的分子。

“以法命平实。”其中“法”是指平均数约分后的分母36，“平实”是平均数约分后的分子；故得 $\frac{23}{46}$。

术文“并所减以益于少”是按三数中两多一少来说的。如三数为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，两少一多，则须并所益以减多。又如四数为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，两少两多，则多少损益须据实分配。余类推。

[一七] 今有七人，分八钱三分钱之一。问人得几何。

答曰：人得一钱二十一分钱之四。

[一八] 又有三人三分人之一，分六钱三分钱之一，四分钱之三。问人得几何。

答曰：人得二钱八分钱之一。

经分[27] 臣淳风等谨按：经分者，自合分已下，皆与诸分相齐，此乃直求一人之分。以人数分所分，故曰经分也。术曰：以人数为法，钱数为实，实如法而一。有分者通之。 母互乘子者齐其子，母相乘者同其母。以母通之者，分母乘全内子[28]。乘全则散为积分，积分则与分子相通，故可令相从[29]。凡数相与者谓之率[30]。率者，自相与通。有分则可散，分重叠则约也。等除法实，相与率也[31]。故散分者，必令两分母相乘法实也[32]。重有分者同而通之。又以法分母乘实，实分母乘法。此谓法实俱有分，故令分母各乘全内子，又令分母互乘上下[33]。

[27] 经分

李籍《音义》引《释名》说："经者，径也。"李注称："此乃直求一人之分。以人数分所分。""经分"就是推求一人所分的数量。"经分术"即是现今所谓分数除法。

[28] 分母乘全内子

"全"，指带分数的整数部分。"内"(音nà)，就是纳入的意思。

带分数化为假分数时，须将分母乘以整数部分的结果纳入分子里，即是与分子相加作为假分数分子的运算。这一运算就是注文所说"以母通之者"。也即术文"有分者通之"。

[29] 乘全则散为积分，积分则与分子相通，故可令相从

当分子、分母扩大或缩小同一倍数时，分数的值不变。前一运算称为散分，后一运算称为约分。如刘注说："乘以散之，约以聚之。"

带分数化为假分数时，以分母乘整数部份之积，可看作是以原分母为分母的分子；也就是将整数部份给散化了。刘徽称这一"分母乘全"为"积分"。

因这一积分与分数部份的分子有同一分母，故称为"相通"；既然相通，即可相加。即"积分则与分子相通，故可令相从"。一如刘徽前注所说："乘以散之，所以通之。通之则可并也。"

[30] 凡数相与者谓之率

"相与"是古算中一句术语，"相与"是指数与数的相关，这里是

指相比的关系。数与数的相比关系称为率。

[31] 有分则可散，分重叠则约也。等除法实，相与率也

"有分"是指带分数。以分母乘整数部份的积就是将整数部份给散化了。

当分子、分母含有公因数时，可看作是公因数的重叠，即是"分重叠"。遇有这样重叠的分数应当以公因数约分。即"分重叠则约也"。约分术的刘注也说："皆等数之重叠，故以等数约之。"

约分时，一般以等数约分；实际上就是将分子、分母除以等数。如约分术刘注："等数约之，即除也。"因此，这里刘徽便说："等除法实，相与率也。"

[32] 故散分者，必令两分母相乘法实也

分数相除时，欲将分数散化，即以被除数及除数的分母分别乘除数及被除数的分子、母。以式明之，即：$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{bc}{ac} \div \frac{da}{ca}$。

[33] 又以法分母乘实，……，又令分母互乘上下

分数相除时，又可以除数分母乘被除数的分子作为分子；以被除数分母乘除数分子作为分母。这一算法与现今术语"颠倒相乘"的意义是一致的。即 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{bc}{da}$。

古代以算筹表示相除(或分数)时，与现今笔算表示相除(或分数)的位置相同。"上"是指被除数或分子，"下"是指除数或分母。

若被除数和除数都是"有分"，即是带分数时，先以分母乘全内子，分别化为假分数；然后以除数、被除数的分母互乘被除数、除数的分子，即得所求的商。也就是所谓"颠倒相乘"。

[一九] 今有田广七分步之四，从五分步之三。问为田几何。

答曰：三十五分步之十二。

[二〇] 又有田广九分步之七，从十一分步之九。问为田

几何。

答曰：十一分步之七。

[二一] 又有田广五分步之四，从九分步之五。问为田几何。

答曰：九分步之四。

乘分[34] 臣淳风等谨按：乘分者，分母相乘为法，子相乘为实，故曰乘分。术曰：母相乘为法，子相乘为实，实如法而一。 凡实不满法者而有母子之名，若有分以乘其实而长之，则亦满法乃为全耳[35]。又以子有所乘，故母当报除。报除者，实如法而一也。今子相乘则母各当报除，因令分母相乘而连除也[36]。此田有广从，难以广谕。 设有问者曰：马二十匹，直金十二斤。今卖马二十匹，三十五人分之，人得几何？答曰：三十五分斤之十二。其为之也，当如经分术，以十二斤金为实，三十五人为法[37]。 设更言马五匹，直金三斤。今卖四匹，七人分之，人得几何？答曰：人得三十五分斤之十二[38]。其为之也，当齐其金人之数，皆合初问入于经分矣。然则分子相乘为实者，犹齐其金也。母相乘为法者，犹齐其人也。同其母为二十，马无事于同，但欲求齐而已[39]。又马五匹，直金三斤，完全之率。分而言之，则为一匹直金五分斤之三。七人卖四马，一人卖七分马之四。分子与人交互相生所从言之异，而计数则三术同归也[40]。

[34] 乘分

"乘分"即是分数相乘。"乘分术"就是分数乘法。

[35] 凡实不满法者而有母子之名，……，则亦满法乃为全耳

如被除数小于除数，则可表示为分数；因而分别称为分子、分母。如有分数与之相乘使得被除数大于除数，则可化为整数或带分数。

[36] 又以子有所乘，……，因令分母相乘而连除也

"报除"即是报之以除；就是除。如"报除者，实如法而一也"。

若分数的分子乘以一数，则仍除以其分母。即"子有所乘，故母当报除"。

现在两分数相乘时，两分子应当各除以其分母再相乘，因两分

子相乘，故需除以两分母的乘积。即“分母相乘而连除也”。

[37] 设有问者曰：马二十匹，……，三十五人为法

刘徽举例说：设有马 20 匹，共值金 12 斤；若卖去 20 匹马，35 人均分，每人应得金多少？答案是每人分得金 $\frac{12}{35}$ 斤。其计算方法如同经分术，即以 12 为分子(实)，35 为分母(法)，每人分得金为 $12 \div 35 = \frac{12}{35}$ 斤。

[38] 设更言马五匹，……，答曰：人得三十五分斤之十二

又举一例为：马 5 匹，值金 3 斤；若卖马 4 匹，7 人分之，每人应得金多少？答案是 $\frac{12}{35}$斤。

其计算方法为：$\frac{3}{5} \div \frac{7}{4} = \frac{12}{20} \div \frac{35}{20} = \frac{12}{20} \times \frac{20}{35} = \frac{12}{35}$。

[39] 其为之也，当齐其金人之数，……，但欲求齐而已

“其为之也”以下乃是注解这例的算法。

因马 5 匹，值金 3 斤，故每马值金 $\frac{3}{5}$ 斤。若卖马 4 匹，7 人分之，则每马应分给 $\frac{7}{4}$ 人。

“齐其金人之数”就是“齐其子”。即 $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$，$\frac{7}{4} = \frac{35}{20}$。按经分术入算：$\frac{3}{5} \div \frac{7}{4} = \frac{12}{20} \div \frac{35}{20} = \frac{12}{20} \times \frac{20}{35} = \frac{12 \times 20}{20 \times 35}$。其中 12×20 及 20×35 分别是“分子相乘为实者，犹齐其金也。母相乘为法者，犹齐其人也”。

在运算中，通分后的分母 20，只是为了齐其“金”、“人”之数。故注称：“但欲求齐而已。”

[40] 又马五匹，……，而计数则三术同归也

刘徽又提出一种算法。即每马值金 $\frac{3}{5}$斤，每人卖马 $\frac{4}{7}$ 匹，故

得每人应分金数为：$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$。

由上述三例看来，虽然三种算法的步骤不同，但其道理却是一致的。故注称："三术同归也。"

［二二］今有田广三步三分步之一，从五步五分步之二。问为田几何。

答曰：十八步。

［二三］又有田广七步四分步之三，从十五步九分步之五。问为田几何。

答曰：一百二十步九分步之五。

［二四］又有田广十八步七分步之五，从二十三步十一分步之六。问为田几何。

答曰：一亩二百步十一分步之七。

大广田 臣淳风等谨按：大广田者，初术直有全步而无余分，次术空有余分而无全步，此术先见全步复有余分，可以广兼三术，故曰大广。[41] 术曰：分母各乘其全，分子从之[42]， 分母各乘其全分子从之者，通全步内分子，如此则母子皆为实矣。相乘为实。分母相乘为法。 犹乘分也。实如法而一。 今为术广从俱有分，当各自通其分。 命母入者还须出之。故令分母相乘为法，而连除之。[43]

［41］大广田者，……，故曰大广

"初术"是指方田术，只有整数而无分数的乘法；"次术"指乘分术，只有分数而无整数的乘法；此术是既有整数又有分数的乘法；可包括方田、乘分二术，即"可以广兼三术，故曰大广"。

［42］分母各乘其全，分子从之

同前注"分母乘全内子"。

［43］命母入者还须出之。故令分母相乘为法，而连除之

以第二十二问为例，说明如下：

设矩形的相邻两边分别为 $3\frac{1}{3}$，$5\frac{2}{5}$，都是带分数，当化为假分数时，则得：

$$3\frac{1}{3}=\frac{3\times3+1}{3}=\frac{10}{3},\qquad 5\frac{2}{5}=\frac{5\times5+2}{5}=\frac{27}{5}。$$

通分：

$$3\frac{1}{3}=\frac{10}{3}=\frac{10\times5}{3\times5},\qquad 5\frac{2}{5}=\frac{27}{5}=\frac{27\times3}{5\times3}。$$

按术计算，此矩形面积为：

$$3\frac{1}{3}\times5\frac{2}{5}=\frac{10}{3}\times\frac{27}{5}=\frac{10\times5}{3\times5}\times\frac{27\times3}{5\times3}$$

$$=\frac{10\times27}{3\times5}=18。$$

由于通分及乘法关系，运算中既乘以分母又除以分母 3，5，于是注文说："命母入者还须出之"，与其如此，不如以"分母相乘为法而连除之"。

根据"命母入者还须出之"一理，可知在分数乘法中通分运算并不是必要的。

[二五] 今有圭田[44]广十二步，正从二十一步。问为田几何。

答曰：一百二十六步。

[二六] 又有圭田广五步二分步之一，从八步三分步之二。问为田几何。

答曰：二十三步六分步之五。

术曰：半广以乘正从。半广者，以盈补虚为直田也。亦可半正从以乘广[45]。按半广乘从，以取中平之数。故广从相乘为积步。亩法除之，即得也。

[二七] 今有邪田[46]，一头广三十步，一头广四十二步，正

从六十四步。问为田几何。

答曰：九亩一百四十四步。

[44] 圭田

李籍《音义》说："圭田者，其形上锐，有如圭然。"

"圭田"是一个象形的名称；就字义而论，其形状应是等腰三角形的田。《九章算术》、《五曹算经》以及《夏侯阳算经》所论圭田，仅是由底、高乘积之半计算其面积的问题，自不能强为之说。元代朱世杰认为圭田是等腰三角形。如《四元玉鑑》(1303)中"锁套吞容"第十四问说："今有圭田一段，阔一十四步，长二十四步，于内欲容圆池一所，问池径几何。答曰：一十步二分步之一。"

假设此圭田不等腰，则其形不定，因而其内切圆的大小也不定。罗士琳(1789—1853)《四元玉鑑细草》(1834)按等腰三角形演算，结果合问。反之，若按三角形底为 $c=14$ 高为 $h=24$，内切圆半径为 r，并以 $2r=10\frac{1}{2}$ 计算，即得三角形两边 a，b 如下(图2)：

由三角形面积公式 $\triangle=\frac{1}{2}ch=rs$ 以及

$\triangle=\frac{1}{2}ch=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，可得下列方程组：

$$\begin{cases}a+b=50\\ab-32(a+b)+975=0。\end{cases}$$

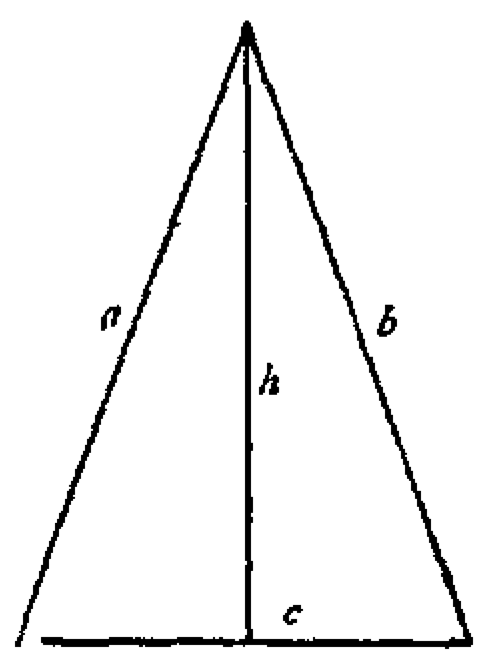


图 2

解之得 $a=b=25$。据此可证，朱世杰以圭田为等腰三角形。

明代程大位《算法统宗》所述圭形外，尚有斜圭形一种。清、屈曾发《数学精详》注明圭形是两等边三角形，斜圭形是不等边三角形。

上述论著都认为圭形是等腰三角形，

按照认识的规律以此追溯,《九章算术》可能也以圭形为等腰。但,有人以为圭田是一般三角形,扩充“圭”的原意,也未为不可。不过,若引用《九章算术》的“圭田”的话,应理解为等腰三角形,似较妥当。

[45] 半广者,以盈补虚为直田也。亦可半正从以乘广

“广”是等腰三角形的底,“正从”即是其高。

“盈”是多余,“虚”乃不足。“以盈补虚”就是以多余的部份填补不足的部份。应该指出,此处所述就是所谓割补法,也即“出入相补”原理。

如图3,使△补△或以△、△补△、△,变圭田为与之等积的直田,也即变等腰三角形的田为等积的矩形的田;左边矩形的两邻边分别是“半广”、“正从”;而右边矩形的两邻边分别是“半正从”、“广”;再由矩形面积求法证明等腰三角形的面积求法。

“以盈补虚”或“出入相补”原理是刘徽创造的一种证明方法。这种证明方法既直观又严格,是我国古代几何所具有的特色之一。

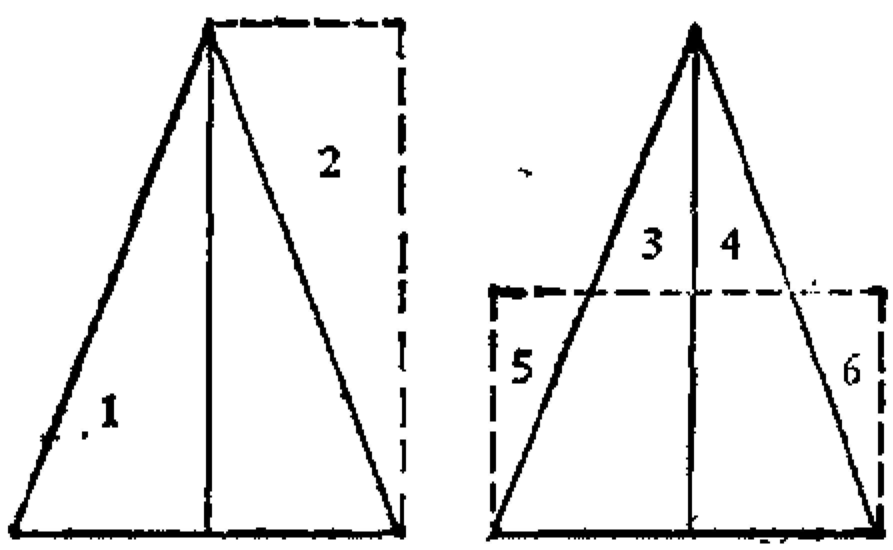


图 3

[46] 邪田

“邪”,与斜字通。“邪田”就是直角梯形的田。

程大位《算法统宗》及屈曾发《数学精详》所述邪田都是直角梯形,即是有一腰与两底垂直的梯形。由下文“中分箕田则为两邪田”可知刘徽也以为邪田是直角梯形。但是,李潢《九章算术细草图说》所论则是一般梯形。李潢之说,恐未必符合《九章算术》的原意。

[二八] 又有邪田，正广六十五步，一畔从一百步，一畔从七十二步。问为田几何。

答曰：二十三亩七十步。

术曰：并两邪而半之，以乘正从若广[47]。又可半正从若广，以乘并，亩法而一。并而半之者，以盈补虚也。

[二九] 今有箕田[48]，舌广二十步，踵广五步，正从三十步。问为田几何。

答曰：一亩一百三十五步。

[47] 并两邪而半之，以乘正从若广

“两邪”应理解为梯形的两底；“若”，是如同的意思，也可理解成或者的意思。“以乘正从若广”，即是乘以正从或者乘以广。

[48] 箕田

“箕田”也是一象形名称，就字义而论，其形状应是等腰梯形的田。

李籍《音义》：“箕田者，有舌有踵，其形哆哆，有如箕然。”“舌”是箕口的伸展部分，“踵”是箕底的收敛部分；这里舌、踵或舌广、踵广是分别指梯形的长、短底边。

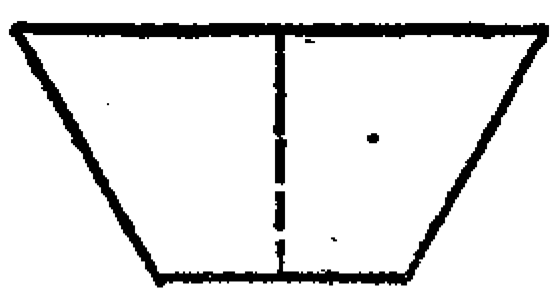


图 4

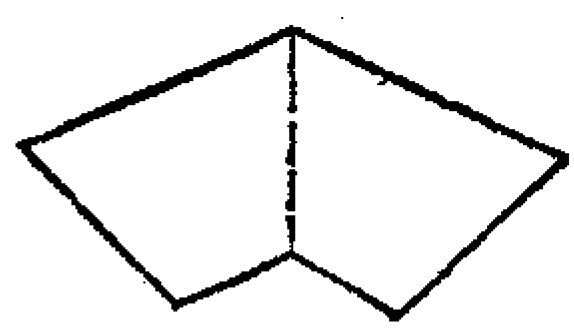


图 5

刘注称：“中分箕田则为两邪田”(图4)，就是过等腰梯形两底中点的连线分割为两个直角梯形；但是过一般梯形两底中点的连线未必能分割为两个直角梯形。据此可以知道刘徽认为箕田是等腰梯形的田。而李潢却以为是磬折形(图 5)，这种理解，似无根据。

[三〇] 又有箕田，舌广一百一十七步，踵广五十步，正从一百三十五步。问为田几何。

答曰：四十六亩二百三十二步半。

术曰：并踵舌而半之，以乘正从。亩法而一。 中分箕田则为两邪田，故其术相似。又可并踵舌，半正从以乘之。

[三一] 今有圆田，周三十步，径十步[49]。 臣淳风等谨按：术意以周三径一为率，周三十步，合径十步。今依密率[50]，合径九步十一分步之六。问为田几何。

答曰：七十五步。 此于徽术，当为田七十一步一百五十七分步之一百三。 臣淳风等谨依密率，为田七十一步二十二分步之一十三。

[49] 今有圆田，周三十步，径十步

圆周、圆径只知其一即可求得圆面积。本问既知周长，又设径长，并非多给已知条件，而是想说明半周、半径相乘之积等于圆面积一理。

[50] 密率

注文"密率"是指 $\pi=\frac{22}{7}$。

祖冲之（429—500）称 $\frac{22}{7}$ 为约率，$\frac{355}{113}$ 为密率。 李淳风却以 $\frac{22}{7}$ 为密率。戴校本说："径七周二十二乃祖氏之约率，非密率也。淳风等以为密率，失其实矣。"此论正确，但是他又说："徽率与祖氏之约率相较，则徽率密于约率。"刘徽求出圆率的两个近似值，一为 $\frac{157}{50}$，另一为 $\frac{3927}{1250}$。后者固然密于约率，而前者则疏于约率。可见戴震所论，似不完备。 李潢于《九章算术细草图说》也说："徽率密于约率，非确论也。"戴校本还说："按冲之密率，较徽率为密。其约率，较徽率为疏。淳风等所称密率皆约率。"戴震所

指徽率若是 $\frac{3927}{1250}$，则所论正确；若是 $\frac{157}{50}$，所论似不确切。

在这里，由于祖氏约率 $\frac{22}{7}$ 比徽率 $\frac{157}{50}$ 稍密，所以李淳风等可能把约率称为密率。

[三二] 又有圆田，周一百八十一步，径六十步三分步之一。臣淳风等谨按：周三径一，周一百八十一步，径六十步三分步之一。依密率，径五十七步二十二分步之一十三。问为田几何。

答曰：十一亩九十步十二分步之一。此于徽术，当为田十亩二百八步三百一十四分步之一百一十三。臣淳风等谨依密率，当为田十亩二百五步八十八分步之八十七。

术曰：半周半径相乘得积步[51]。按半周为从，半径为广，故广从相乘为积步也。假令圆径二尺，圆中容六觚之一面，与圆径之半，其数均等。合径率一而外周率三也。又按为图，以六觚之一面乘半径，因而三之，得十二觚之幂[52]。若又割之，次以十二觚之一面乘半径，因而六之，则得二十四觚之幂[53]。割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣[54]。觚面之外，犹有余径。以面乘余径，则幂出弧表[55]。若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径[56]。表无余径，则幂不外出矣[57]。以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂[58]。此以周径，谓至然之数，非周三径一之率也[59]。周三者从其六觚之环耳。以推圆规多少之较，乃弓之与弦也[60]。然世传此法，莫肯精覈。学者踵古，习其谬失。不有明据，辩之斯难。凡物类形象，不圆则方。方圆之率，诚著于近，则虽远可知也。由此言之，其用博矣。谨按图验，更造密率。恐空设法，数昧而难譬。故置诸检括，谨详其记注焉。割六觚以为十二觚术曰：置圆径二尺，半之为一尺，即圆里六觚之面也。令半径一尺为弦，半面五寸为句，为之求股。以句幂二十五寸减弦幂，余七十五寸[61]。开方除之，下至秒忽。又一退法，求其微数。微数无名者以为分子，以十为分母，约作五分忽之二。故得股八寸六分六厘二秒五忽五分忽之二。以减半径，余一寸三分三厘九毫七秒四忽五分忽之三，谓之小句。觚之半面又谓之小股。为之求弦。其幂二千六百七十九亿四千九百一十九万三千四百四十五忽，余分弃之。开方除之，即十二觚之一面也[62]。割十二觚以为二十四觚术曰：亦令半径为弦，半面为句，为之求股。置上小弦幂，四而一，得六百六十九亿八千七百二十九万八千三百六十一忽，余分弃之，即句幂也。以减弦幂，其余，开方除之，得股九寸六分五厘九毫二秒五忽五分忽之四。以减半径，余三分四厘七秒四忽五分忽之一，谓之小句。觚之半面又谓之小股。为之求小弦。其幂六百八十一亿四千八百三

十四万九千四百六十六忽，余分弃之。开方除之，即二十四觚之一面也。 割二十四觚以为四十八觚术曰：亦令半径为弦，半面为句，为之求股。置上小弦幂，四而一，得一百七十亿三千七百八万七千三百六十六忽，余分弃之，即句幂也。以减弦幂，其余，开方除之，得股九寸九分一厘四毫四秒四忽五分忽之四。以减半径，余八厘五毫五秒五忽五分忽之一，谓之小句。觚之半面又谓之小股。为之求小弦。其幂一百七十一亿一千二十七万八千八百一十三忽，余分弃之。开方除之，得小弦一寸三分八毫六忽，余分弃之。即四十八觚之一面。以半径一尺乘之，又以二十四乘之，得幂三万一千三百九十三亿四千四百万忽。以百亿除之，得幂三百一十三寸六百二十五分寸之五百八十四，即九十六觚之幂也。

割四十八觚以为九十六觚术曰：亦令半径为弦，半面为句，为之求股。置次上弦幂四而一，得四十二亿七千七百五十六万九千七百三忽，余分弃之，则句幂也。以减弦幂，其余，开方除之，得股九寸九分七厘八毫五秒八忽十分忽之九。以减半径，余二厘一毫四秒一忽十分忽之一，谓之小句。觚之半面又谓之小股。为之求小弦。其幂四十二亿八千二百一十五万四千一十二忽，余分弃之。开方除之，得小弦六分五厘四毫三秒八忽，余分弃之，即九十六觚之一面。 以半径一尺乘之，又以四十八乘之，得幂三万一千四百一十亿二千四百万忽。以百亿除之，得幂三百一十四寸六百二十五分寸之六十四，即一百九十二觚之幂也。以九十六觚之幂减之，余六百二十五分寸之一百五，谓之差幂[63]。倍之，为分寸之二百一十，即九十六觚之外，方田九十六，所谓以弦乘矢之凡幂也[64]。加此幂于九十六觚之幂，得三百一十四寸六百二十五分寸之一百六十九，则出于圆之表矣[65]。故还就一百九十二觚之全幂三百一十四寸，以为圆幂之定率，而弃其余分[66]。

以半径一尺除圆幂，倍之得六尺二寸八分，即周数[67]。令径自乘为方幂四百寸，与圆幂相折，圆幂得一百五十七为率，方幂得二百为率[68]。方幂二百，其中容圆幂一百五十七也。圆率犹为微少[69]。按弧田图令方中容圆，圆中容方，内方合外方之半。然则圆幂一百五十七，其中容方幂一百也[70]。又令径二尺与周六尺二寸八分相约，周得一百五十七，径得五十，则其相与之率也。周率犹为微少也[71]。

晋武库中汉时王莽作铜斛[72]，其铭曰："律嘉量斛[73]，内方尺而圆其外[74]，庣旁九厘五毫[75]，幂一百六十二寸，深一尺，积一千六百二十寸，容十斗。"以此术求之，得幂一百六十一寸有奇，其数相近矣[76]。此术微少，而差幂六百二十五分寸之一百五。以十二觚之幂为率消息，当取此分寸之三十六，以增于一百九十二觚之幂以为圆幂，三百一十四寸二十五分寸之四[77]。置径自乘之方幂四百寸，令与圆幂通相约，圆幂三千九百二十七，方幂得五千[78]。是为率，方幂五千中容圆幂三千九百二十七，圆幂三千九百二十七中容方幂二千五百也[79]。以半径一尺除圆幂三百一十四寸二十五分寸之四，倍之得六尺二寸八分二十五分分之八，即周数也[80]。全径二尺，与周数通相约，径得一千二百五十，周得三千九百二十七，即其相与之率[81]。若此者，盖尽其纤微矣。举而用之，上法仍约耳[82]。当求一千五百三十六觚之一面，得三千七十二觚之幂，而裁其微分，数亦宜然，重其验耳[83]。 臣淳风等谨按：旧术求圆，皆以周三径一为率。若用之求圆周之数，则周少径多。用之求其六觚之田，乃与此率合会耳。何则？假令六觚之田，觚间

各一尺为面，自然从角至角[84]，其径二尺可知。此则周六径二，与周三径一已合。恐此犹以难晓，今更引物为喻。设令刻物作圭形者六枚，枚别三面[85]，皆长一尺。攒此六物悉使锐头向里，则成六觚之周，角径亦皆二尺[86]。更从觚角外畔围绕为规，则六觚之径尽达规矣。当面径短，不至外规[87]。若以六觚言之，则为周六尺，径二尺，面皆一尺。面径股不至外畔[88]，定无二尺可知。故周三径一之率，于圆周乃是径多周少。径一周三，理非精密。盖术从简要，举大纲略而言之。刘徽特以为疎，遂乃改张其率。但周径相乘数难契合。徽虽出斯二法[89]，终不能究其纤毫也。祖冲之以其不精，就中更推其数。今者修撰，捃摭诸家，考其是非，冲之为密[90]。故显之于徽术之下，冀学者之所裁焉。

又术曰：周径相乘，四而一。 此周与上觚同耳。周径相乘各当以半，而今周径两全，故两母相乘为四，以报除之。于徽术以五十乘周，一百五十七而一，即径也。以一百五十七乘径，五十而一，即周也。新术径率犹当微少[91]。据周以求径，则失之长；据径以求周，则失之短。诸据见径以求幂者，皆失之于微少；据周以求幂者皆失之于微多。 臣淳风等谨依密率，以七乘周，二十二而一即径；以二十二乘径；七而一即周。依术求之即得。

又术曰：径自相乘，三之，四而一[92]。 按周径自乘为外方。三之，四而一者，是为圆居外方四分之三也[93]。若令六觚之一面乘半径，其幂即外方四分之一也。因而三之，即亦居外方四分之三也。是为圆里十二觚之幂耳。取以为圆，失之于微少[94]。于徽新术，当径自乘，又以一百五十七乘之，二百而一。 臣淳风等谨按密率，令径自乘，以十一乘之，十四而一，即圆幂也。

又术曰：周自相乘，十二而一[95]。 六觚之周其于圆径，三与一也。故六觚之周自相乘为幂，若圆径自乘者九方，九方凡为十二觚者十有二，故曰十二而一，即十二觚之幂也[96]。今此令周自乘，非但若为圆径自乘者九方而已。然则十二而一，所得又非十二觚之类也。若欲以为圆幂，失之于多矣[97]。以六觚之周自乘十二而一可也[98]。于徽新术，直令圆周自乘，又以二十五乘之，三百一十四而一，得圆幂。其率：二十五者，圆幂也；三百一十四者，周自乘之幂也。置周数六尺二寸八分，令自乘得幂三十九万四千三百八十四分，又置圆幂三万一千四百分，皆以一千二百五十六约之，得此率[99]。臣淳风等谨按：方面自乘即得其积。圆周求其幂，假率乃通。但此术所求，用三一为率。圆田正法，半周及半径以相乘。今乃用全周自乘，故须以十二为母。何者？据全周而求半周，则须以二为法，就全周而求半径，复假六以除之[100]。是二、六相乘，除周自乘之数。依密率以七乘之，八十八而一[101]。

[51] 半周半径相乘得积步

这是《九章算术》推求圆面积的一个重要公式，是古代劳动人民通过大量生产实践总结出来的正确成果。但是，这个公式究竟是如何形成的，由于经文过于简略，其他材料十分缺乏，因之不可

稽考。

刘注说："半周为从，半径为广，故广从相乘为积步也。"刘徽如何把半周看作"从"，把半径看作"广"，或者如何把圆变为与之等积的长方形。可参阅注[58]。

[52] 以六觚之一面乘半径，因而三之，得十二觚之幂

我国古代用来作为书写的六或八面体木简称为觚。陆机(261—303)《文赋》说："或操觚以率尔。"如《孙膑兵法》："将战书柧。"古代柧与觚字相通。此处之觚应理解为正多边形。"六觚"即是正六边形，"面"是正六边形的一边。

这里所说，是圆内接正六边形的一边（a_6）与圆半径（r）相乘，三倍起来，即得圆内接正十二边形的面积（$S_{12}=3a_6r$）。

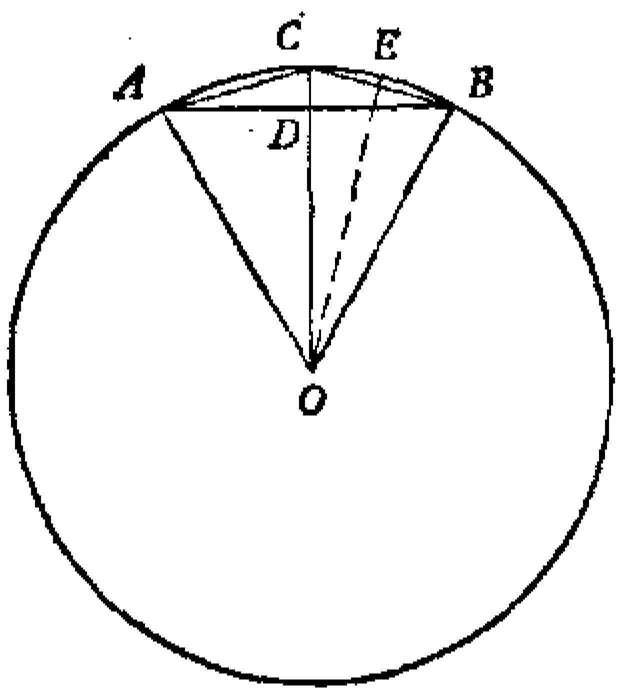


图 6

如图6，设 AB 为圆内接正六边形的一边(a_6)，AC 或 CB 为圆内接正十二边形的一边（a_{12}），而 OA，OB，OC 为圆半径(r)。

因筝形 $AOBC$ 面积

$$=\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{1}{2}a_6\cdot r$$

$$=\frac{1}{2}r^2。$$ 故圆内接正十二边形面积(S_{12})等于筝形 $AOBC$ 面积的六倍。于是有：

$$S_{12}=\left(\frac{1}{2}r^2\right)\times 6=3r^2=3a_6\cdot r。$$

即是"十二觚之幂"。

[53] 若又割之，……，则得二十四觚之幂

如图6，设圆半径为 $OC=r$，圆内接正十二边形一边为 $CB=a_{12}$，圆内接正二十四边形一边为 $EC=a_{24}$ 或 $EB=a_{24}$。

因　筝形 $COBE=\frac{1}{2}CB\cdot OE=\frac{1}{2}a_{12}\cdot r$。　故

圆内接正二十四边形面积 (S_{24}) 等于筝形 $COBE$ 面积的十二倍。于是有：$S_{24}=\left(\frac{1}{2}a_{12}\cdot r\right)\times 12=6a_{12}r$。即是"二十四觚之幂"。

[54] 割之弥细，所失弥少。……，而无所失矣

将圆周分割成六等分，便可得到圆内接正六边形；再将圆周分割成十二等分，就可得到圆内接正十二边形；又将圆周分割成二十四等分，即可得到圆内接正二十四边形；按照这样成倍增加地分割下去。若分割的次数越多，被分割的圆弧和所对应正多边形的边就越短。即是"割之弥细"。

若使边数成倍地增加下去，则圆内接正多边形的面积与圆面积的差越小。即"所失弥少"。

按照上述方法，若分割次数无限增加时，则正多边形势必与圆重合。如此，正多边形面积就与圆面积相等，而"无所失矣"。也就是说，当分割次数无限增加时，圆内接正多边形面积的极限就是圆面积。

若用近代符号表示，即是：当 $n\to\infty$ 时，$|S_{3\cdot2^n}-S|<\varepsilon$。

或　$\lim\limits_{n\to\infty}|S_{3\cdot2^n}-S|=0$，　即　$\lim\limits_{n\to\infty}S_{3\cdot2^n}=S$。

[55] 觚面之外，犹有余径。以面乘余径，则幂出弧表

"余径"是圆半径与圆内接正多边形边心距之差。"表"是外。

如图 7，在圆内接正多边形任一边 AB 之外，尚有余径 CD；正多边形一边 AB 与余径 CD 所组成的矩形有一部份图形落于圆外；也即正多边形面积与这些矩形面积之和大于圆面积，即"幂出弧表"。

[56] 若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径

当边数无限倍增时，圆内接正多边形的边就逐渐减小，即"觚之细者"。"觚之细者"势必与圆重合，即"与圆合体"。此时，正多边形的边心距与圆半径相等而无差别，则形外无有所谓余径了。

[57] 表无余径，则幂不外出矣

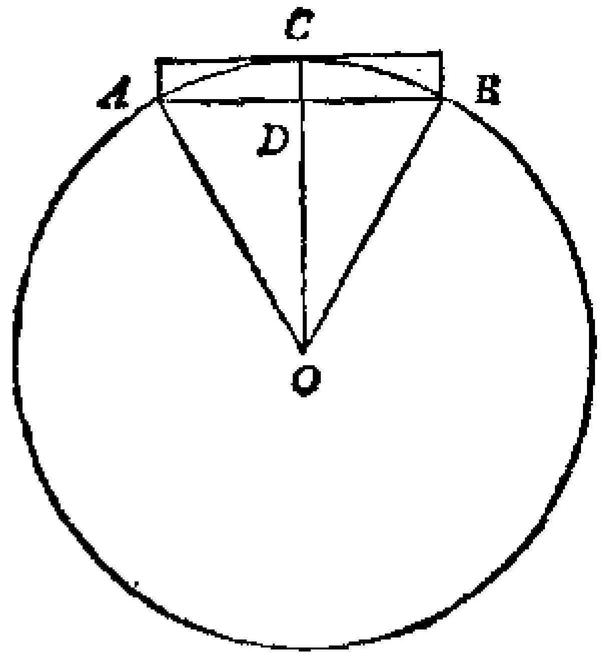


图 7

如在正多边形之外无有余径，则其图形不可能落于圆外；其面积也不可能大于圆面积。

[58] 以一面乘半径，……，故以半周乘半径而为圆幂

根据前注可知：圆内接正十二边形面积为：

$$S_{12}=6\left(\frac{1}{2}\cdot a_6\cdot r\right)=3(a_6\cdot r),$$

圆内接正二十四边形面积为：

$$S_{24}=12\left(\frac{1}{2}\cdot a_{12}\cdot r\right)=6(a_{12}\cdot r)。$$

依此类推，则得圆内接正 $3\cdot2^n$ 边形面积为：

$$S_{3\cdot2^n}=3\cdot2^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a_{3\cdot2^{n-1}}\cdot r\right)=3\cdot2^{n-2}(a_{3\cdot2^{n-1}}\cdot r),$$

其中 $a_{3\cdot2^{n-1}}$ 是圆内接正 $3\cdot2^{n-1}$ 边形的一边，r 是圆半径。圆内接正 $3\cdot2^{n-1}$ 边形的一边 $a_{3\cdot2^{n-1}}$ 与圆半径 r 的乘积 $(a_{3\cdot2^{n-1}}\cdot r)$，就是以 $a_{3\cdot2^{n-1}}$ 为对角线的筝形面积之二倍，而 $\left(\frac{1}{2}\cdot a_{3\cdot2^{n-1}}\cdot r\right)$ 等于筝形的面积。

注文“以一面乘半径”，就是以圆内接正多边形的一边乘圆半径，即得： $(a_6\cdot r)$，$(a_{12}\cdot r)$，$(a_{24}\cdot r)$，$\cdots$，$(a_{3\cdot2^{n-1}}\cdot r)$。

“觚而裁之，每辄自倍”，就是按圆内接正多边形的边进行分割，使其边数成倍地增加。因而得到圆内接正多边形面积为：

$$S_{12}=3(a_6\cdot r)=6\left(\frac{1}{2}a_6\cdot r\right),$$

$$S_{24}=6(a_{12}\cdot r)=12\left(\frac{1}{2}a_{12}\cdot r\right),$$

$$S_{48}=12(a_{24}\cdot r)=24\left(\frac{1}{2}\cdot a_{24}\cdot r\right),\cdots,$$

$$S_{3\cdot 2^n}=3\cdot 2^{n-2}(a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r)=3\cdot 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\cdot a_{3\cdot 2^{n-1}}\cdot r\right)。$$

当边数成倍增加时，易知 $3a_6$，$6a_{12}$，$12a_{24}$，$\cdots$，$3\cdot 2^{n-2}a_{3\cdot 2^{n-1}}$ 分别是圆内接正六、十二、二十四、……，$3\cdot 2^{n-1}$ 边形周长之半。当 $n\to\infty$ 时，则有

$$\lim_{n\to\infty}(3\cdot 2^{n-2}\cdot a_{3\cdot 2^{n-1}})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\cdot 2^{n-1}\cdot a_{3\cdot 2^{n-1}}}{2}\right)=\frac{C}{2}。$$

其中 C 为圆周。故得：

$$\lim_{n\to\infty}S_{3\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3\cdot 2^{n-1}\cdot a_{3\cdot 2^{n-1}}}{2}\cdot r\right]=\frac{C}{2}\cdot r=S。$$

就是注文所说：“故以半周乘半径而为圆幂。”

这就是刘徽推导“半周半径相乘得积步”公式的过程。可能由于是两数乘积，刘徽便称之为“半周为从，半径为广”。

[59] 此以周径，谓至然之数，非周三径一之率也

李潢说：“以犹用也，言此所用之周径乃至密之率。”也就是说，此时所用的圆周率乃是较精密之率，并非圆周率为三 ($\pi=3$) 之数。

[60] 周三者从其六觚之环耳。……，乃弓之与弦也

“周三者从其六觚之环”应理解为：并不是圆周等于圆径的三倍，而是圆内接正六边形的周长等于圆径的三倍。

若以此率 ($\pi=3$) 推求圆周的大小，推出的结果是弦而不是弧。即“乃弓之与弦也”。据此，刘徽对于崇古守旧的学者进行了

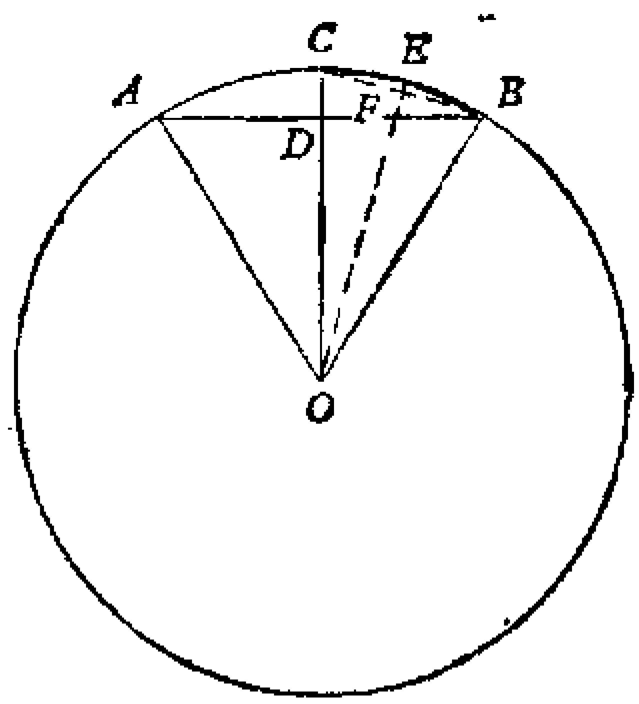


图 8

严厉的抨击。他说："然世传此法，莫肯精覈。学者踵古，习其谬失。"于是他便"谨按图验，更造密率"，"详其记注焉"。

[61] 割六觚以为十二觚术曰：……，余七十五寸。

由圆内接正六边形推求内接正十二边形一边的方法：如图 8，设圆直径为二尺，半径则为一尺，即得"圆里六觚之面也"。即

$AO = AB = 1$ 尺 $= 1000000$ 忽，或 $r = a_6 = 1000000$ 忽。

"令半径一尺为弦，半面五寸为句，为之求股"。即 $AO = 1$ 尺为弦，$AD = DB = 5$ 寸为句，推求 OD 为股之长。"以句幂二十五寸，减弦幂，余七十五寸"。即 $OD^2 = OB^2 - DB^2 = (10\text{寸})^2 - (5\text{ 寸})^2 = 75$ 平方寸。

[62] 开方除之，……，即十二觚之一面也

将七十五方寸开方，得八寸六分六厘二秒五忽，尚有余数。

由于忽是古代长度最小单位的名称，《孙子算经》所谓"度之所起，起于忽"即是，至于比一忽更小的名数，则是"微数无名"了。如需继续开方，便将无名的微数依次作为分子，以十、百、千等作为分母取其分数。这种分数就是十进分数。可见在刘徽时代，我国就已经有了十进分数即小数的概念。

"又退一法"是筹算开方求下一位根的一个步骤（参阅少广章）。

如图 8，开方可得股长为：

$$OD=\sqrt{OB^2-BD^2}=866025\ \frac{2}{5}\ 忽。$$

由半径减去此股，称为小句，

$$小句=CD=OC-OD=133974\ \frac{3}{5}\ 忽。$$

取正六边形一边之半为小股，求得小弦的平方。即：

$BD=500000$ 忽，

$BC^2=BD^2+CD^2=267949193445$ 平方忽。

“开方除之，即十二觚之一面”。即

$$a_{12}=BC=\sqrt{267949193445}。$$

[63] 以九十六觚之幂减之，……，谓之差幂

“差幂”乃是圆内接正一百九十二边形与正九十六边形的面积之差。即

$$S_{192}-S_{96}=314\frac{64}{625}-313\frac{584}{625}=\frac{105}{625}。$$

[64] 倍之，为分寸之二百一十，……，所谓以弦乘之凡幂也

此谓“差幂”的二倍等于正九十六边形之外九十六个矩形面积之和，即“为分寸之二百一十”。即 $\frac{210}{625}$。

如图 9 所示，AB 为圆内接正九十六边形的一边，CD 为矢。因三角形 ACB 占矩形 $ABFE$ 面积之半，故“差幂”的二倍等于由 AB，CD 组成矩形的面积之九十六倍。即 $2(S_{192}-S_{96})=\frac{210}{625}$。

此处“弧田”，并非弓形，实际上是指矩形。无妨改为“方田”。注文“方田九十六，所谓以弦乘矢之凡幂也”。不误，钱校本以所字连上读。恐非是。

前注文“觚面之外，犹有余径”。刘徽称 CD 为“余径”。以正六边形推求正十二边形一边时，又称 CD 为小句。此处则称之为“矢”，其所以称为“矢”，可能与弧田术有关。

[65] 加此幂于九十六觚之幂，……，则出于圆之表矣

以“差幂”的二倍与正九十六边形面积相加，其和大于圆面积，

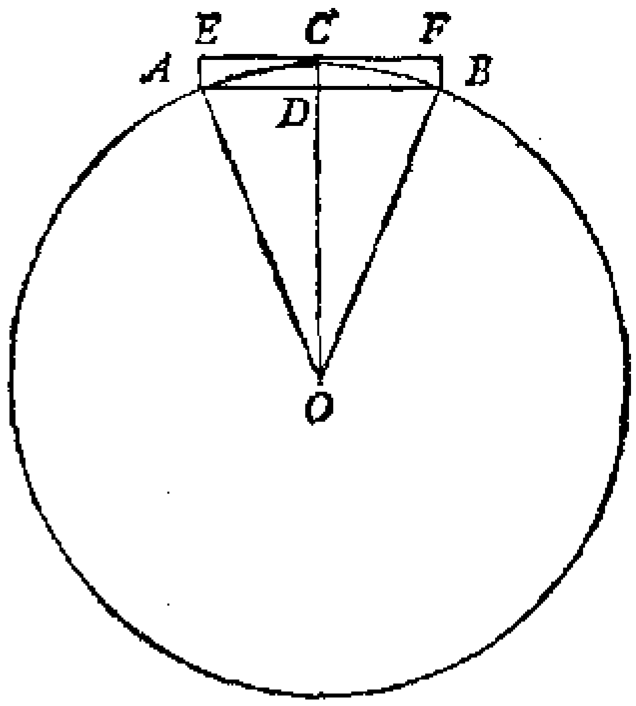


图 9

而图形显然出于圆外。设圆面积为 S，即得：

$$S_{96}+2(S_{192}-S_{96})=314\frac{169}{625}>S,$$

即

$$S_{192}+(S_{192}-S_{96})>S。$$

[66] 故还就一百九十二觚之全幂三百一十四寸，……，而弃其余分

由上文可知一百九十二觚之幂 $314\frac{64}{625}$ 方寸与差幂 $\frac{105}{625}$ 方寸之和大于圆幂；故仍取一百九十二觚之幂的整数部份 314 方寸作为圆面积，并舍去所余的分数部份 $\frac{64}{625}$。

[67] 以半径一尺除圆幂，倍之得六尺二寸八分，即周数

因"半周半径相乘得积步"，故得：

$$圆周=2\cdot\frac{圆幂}{半径}=2\cdot\frac{314\text{ 方寸}}{10\text{ 寸}}=6\text{ 尺 }2\text{ 寸 }8\text{ 分。}$$

[68] 令径自乘为方幂四百寸，……，方幂得二百为率

圆径二尺的平方得四百方寸，圆面积为三百一十四方寸，两者相比，得： 圆幂:方幂 = 314:400 = 157:200。

[69] 方幂二百，其中容圆幂一百五十七也。圆率犹为微少

正方形面积为 200 时，其内切圆面积为 157；而 157 是圆面

积的不足近似值，故“圆率犹为微少”（图 10）。

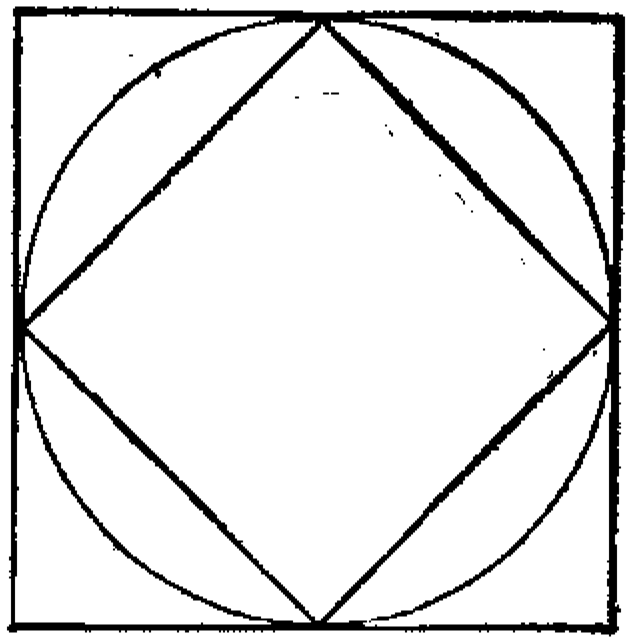


图 10

[70] 按弧田图令方中容圆，……，其中容方幂一百也

如图 10，圆内接正方形面积显然是其外切正方形面积的一半。因此，当圆面积为 157 时，其外切正方形面积应是 200，而内接正方形面积则是 100。

[71] 又令径二尺与周六尺二寸八分相约，……，周率犹为微少也

取 $2r=2$ 尺，$C=6$ 尺 2 寸 8 分，相约得：

$$\frac{C}{2r}=\frac{6\text{尺}2\text{寸}8\text{分}}{2\text{尺}}=\frac{157}{50}。$$

因 $\frac{157}{50}=3.14$ 是 π 的不足近似值，故注文称：“周率（157）犹为微少。”

这就是由圆内接正多边形面积求得的圆周率近似值，称为徽率。以上所述的方法，即是所谓刘徽割圆术。

刘徽在推求中，曾用及下列关系式，我们称为刘徽不等式：

$$S_{3\cdot2^n}<S<S_{3\cdot2^n}+(S_{3\cdot2^n}-S_{3\cdot2^{n-1}})。$$

其中 S 是圆面积，$S_{3\cdot2^n}$，$S_{3\cdot2^{n-1}}$ 分别是圆内接正 $3\cdot2^n$，$3\cdot2^{n-1}$ 边形面积。显然，当 n 无限增大时，“差幂”（$S_{3\cdot2^n}-S_{3\cdot2^{n-1}}$）逐渐逼近于零。可见当时刘徽就用了上、下限两边逼近的方法求得了圆周率的不足近似值。

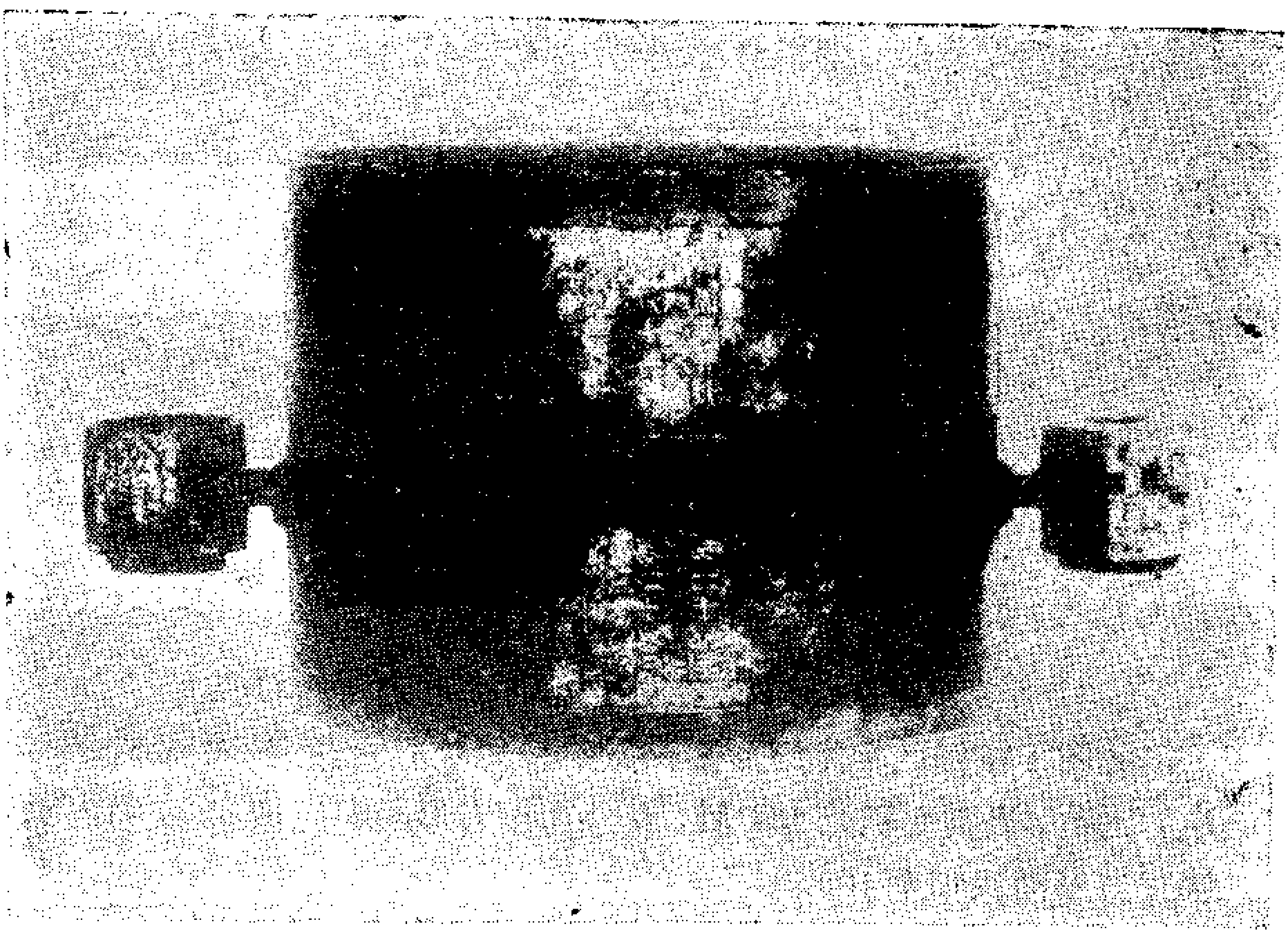


图 11

[72] 铜斛

西汉末年，王莽欲划一度量衡，于始建国元年(公元 9 年)命刘歆铸就百余套铜斛颁行天下，作为标准量器。

铜斛呈圆筒形，两旁有耳，也各为小圆筒形，铜斛及其右耳都有隔层，分为上下两部，连同左耳有斛、斗、升、合、龠五种量器(如图 11)。《汉书·律历志》称："其上为斛，其下为斗，左耳为升，右耳为合、龠。"铜斛正面刻有总铭，斛、斗、升、合龠也都有铭文。

[73] 律嘉量斛

《尔雅·释诂》："律，法也。"《汉书·律历志》："五量嘉矣。"颜注："嘉，善也。"可见"律嘉量斛"即是合于法定的而且是很好的斛量器。

[74] 内方尺而圆其外

因刘徽未曾目睹铜斛，故注文所引与铜斛铭文不尽相同。今按中国历史博物馆所保存的铜斛，将其斛铭抄录于下：

"律嘉量斛，方尺而圜其外，庣旁九氂五豪，冥百六十二寸，深尺，积千六百廿寸。容十斗。"

《攷工记》称："量之为鬴，深尺，内方尺而圆其外，其实一鬴。"其中"内方尺而圆其外"就是边长一尺的正方形有一外接圆。而斛铭"方尺而圜其外"应理解为：在边长一尺的正方形之外有一相离圆（图12）。

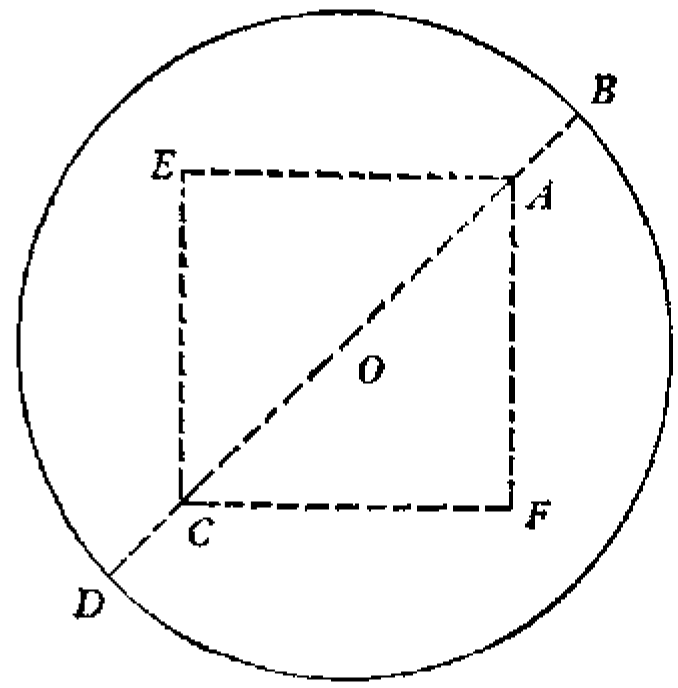


图 12

[75] 庣旁九厘五毫

《汉书·律历志》："旁有庣焉。"郑注："庣，过也"。颜注："庣，不满之处也。"李潢《九章算术细草图说》："庣者，当是内方斜径与外圆径之较也"。以上只解释"庣"字，未解释"旁"字。（日人嘉纳治兵衛《白鶴吉全集》所载始建国元年凤纹量升的铭文有"庣四氂八豪"一句。此处只用"庣"，而不用"庣旁"。）

《尔雅》称："旁，大也；广也"。《说文解字》："旁，薄也"。薄，即普，"大也，编也"。"庣旁"之旁可能作旁边或广解释。

"庣旁"，应是空隙处的宽广或空隙处的距离。"庣旁九厘五毫"，在这里具体是指：在边长一尺正方形（$AECF$）的对角线（AC）之两端（A，C）各延长一段（AB，CD），使其长都等于九厘五毫（$AB = CD = 9$ 厘 5 毫）（图 12）。

[76] 以此术求之，得幂一百六十一寸有奇，其数相近矣

"以此术求之"是指用徽率 $\frac{157}{50} = 3.14$ 进行计算。

因

$$\text{圆直径} = \sqrt{2} + 0.0095 \times 2 = 1.4142\cdots + 0.019 \doteq 1.4332\ \text{尺},$$

故

$$\text{圆面积} = \frac{1}{4} \times \frac{157}{50} \times (1.4332)^2 = 1.6124\ \text{方尺} = 161.24\ \text{方寸}。$$

此数与铜斛铭文"幂百六十二寸"之数相差不多。

[77] 此术微少，……，三百一十四寸二十五分寸之四

"此术"即是 $\frac{157}{50}=3.14$，是由一百九十二觚之幂得来，显见一百九十二觚之幂较圆幂微少。即：$S_{192}=314\frac{64}{625}<S$。

于一百九十二觚之幂加"差幂"，犹如于九十六觚之幂加倍"差幂"，则较圆幂为多。即：

$$S_{192}+(S_{192}-S_{96})=S_{96}+2(S_{192}-S_{96})$$
$$=313\frac{584}{625}+\frac{210}{625}=314\frac{169}{625}>S。$$

于一百九十二觚之幂加"此分寸之三十六"，则得：

$$314\frac{64}{625}+\frac{36}{625}=314\frac{4}{25}。$$

《易经》说："日中则昃，月盈则食，天地盈虚，时与消息。"在这里"消息"二字应理解为增增减减或有增必有减的意思。在上式中，这一加数 $\frac{36}{625}$ 究竟是如何得到的，注文只说"以十二觚之幂为率消息"。原文过于简略，不易得到确切解释。虽然各家有不同的揣测，恐未必符合刘徽的原意，因而只好付诸缺疑。

[78] 置径自乘之方幂四百寸，……，方幂得五千

这段注文是推求圆与其外切正方形的面积之比。即

$$\frac{\text{圆面积}}{\text{圆外切正方形面积}}=\frac{314\frac{4}{25}}{400}=\frac{3927}{5000}。$$

[79] 是为率，……，圆幂三千九百二十七中容方幂二千五百也

这是按照圆与其外切正方形面积的比率推求圆与其内接正方形面积的比率。

因

$$\text{圆内接正方形面积}=\frac{1}{2}\cdot\text{圆外切正方形面积}$$

及

$$\frac{\text{圆面积}}{\text{圆外切正方形面积}}=\frac{3927}{5000},$$

故得

$$\frac{\text{圆面积}}{\text{圆内接正方形面积}}=\frac{3927}{2500}。$$

[80] 以半径一尺……，即周数也

按术“半周半径相乘得积步”。即 半周×半径＝圆面积，可知

$$\text{圆周}=\frac{\text{圆面积}\times 2}{\text{半径}}=\frac{314\frac{4}{25}\times 2}{10}=\frac{15708}{250}=628\frac{8}{25}\text{分}$$

“即周数也”。

[81] 全径二尺，……，即其相与之率

这是推求圆周与直径的比率，即

$$\frac{\text{圆周}}{\text{直径}}=\frac{628\frac{8}{25}}{200}=\frac{15708}{5000}=\frac{3927}{1250}(=3.1416)。$$

[82] 举而用之，上法仍约耳

虽然求得圆周率较精密的值为 $\pi=\frac{3927}{1250}$，但是就实际应用而论，上法$\left(\text{即 }\pi=\frac{157}{50}\right)$尚属简便。即注文“举而用之，上法仍约耳”。因此，刘徽在注《九章算术》时，可能为了简便起见，未曾使用此率。

[83] 当求一千五百三十六觚之一面，……，重其验耳

按照上法，由一百九十二觚之一面，求到一千五百三十六觚之一面，从而得到三千零七十二觚之幂，略去其奇零尾数，便得前述之圆周率 $\pi=\frac{3927}{1250}$。显见对此率又得到一次验证。

设圆半径为 $r=1.000000$，按上法推导，乃得圆内接正一千五百三十六边形的一边为： $a_{1536}=0.004090612582$;

而圆内接正三千零七十二形面积当为:

$$S_{3072} = 1536 \times \frac{a_{1536} \cdot r}{2} = 3.141590462976。$$

若“裁其微分”,则得:　　$S_{3072} = 3.1416$,

或

$$\pi = \frac{3927}{1250} = 3.1416。$$

[84]自然从角至角

“自然从角至角”是从角的顶点到对角顶点的连线。此处应理解为:圆内接正六边形的长对角线。

[85] 枚别三面

“枚别三面”,即每一圭形都有三条边,各边皆长一尺。

[86] 角径亦皆二尺

“角径”是圆内接正六边形的长对角线。若半径一尺,“角径”理当“二尺”。

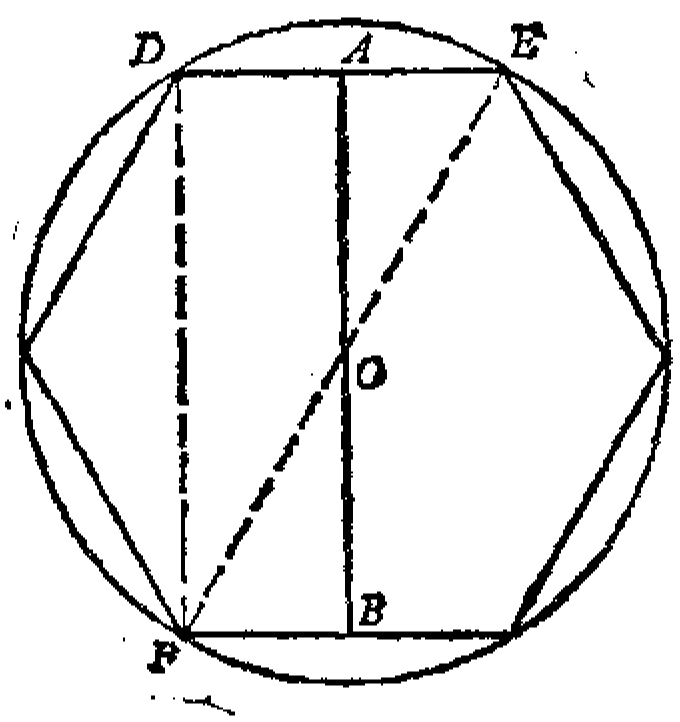


图 13

由注文“自然从角至角,其径二尺”可知,“角径亦皆二尺”不误。各版本皆讹作“一尺”,今为校正。

[87] 当面径短,不至外规

“面径”即圆内接正六边形两对边的距离(AB)。因“面径”较“角径”(EF)短,则“面径”达不到其外接圆(图 13)。

[88]面径股不至外畔

如图 13,在圆内接正六边形中,以“角径”(EF)为弦,“面”(DE)为句的句股形(DEF)之股(DF)与“面径”等长。因股短于弦,即“面径”亦短于弦,则“面径”达不到圆的周界,于是注称:“面径股不至外畔。”

[89] 徽虽出斯二法

“二法”,一指周一百五十七、径五十,即 $\pi = \dfrac{157}{50}$ ($=3.14$);一

指周三千九百二十七、径一千二百五十，即

$$\pi=\frac{3927}{1250}(=3.1416)。$$

[90] 冲之为密

“冲之为密”是指祖冲之的约率 $\pi=\frac{22}{7}$ 比徽率 $\pi=\frac{157}{50}$ 稍精密。

[91] 新术径率犹当微少

“新术”是徽率 $\frac{157}{50}$。若周率为157，则径率应比50微少。因此，下文乃有“据周以求径，则失之长”等语。

[92] 三之，四而一

“三之”是乘以三；“四而一”是除以四。因古率为三，术文“三之”是乘以 π 的略算。

设圆面积为 S，圆径为 $2r$。按术当为：

$$S=\frac{(2r)^2\pi}{4}(=\pi r^2),\qquad 即\qquad S=\frac{(2r)^2\times 3}{4}。$$

[93] 圆居外方四分之三也

在 $S=\frac{(2r)^2\times 3}{4}$ 中，$(2r)^2$ 是为圆的外切正方形面积，而圆面积 S 则为 $(2r)^2$ 的四分之三。

[94] 是为圆里十二觚之幂耳。取以为圆，失之于微少

按术“径自相乘，三之，四而一”计算，所得是 $(2r)^2$ 的四分之三，这并不是圆面积，而是圆内接正十二边形的面积。注文“令六觚之一面乘半径”至“亦居外方四分之三也”一段是其证明。显然，圆内接正十二边形面积小于圆面积。即：$S_{12}=3r^2<S=\pi r^2$。故注称：“取以为圆，失之于微少。”

[95] 周自相乘，十二而一

因古率为三，故 $4\pi=12$。术文“十二而一”，实际应是除以 4π 的略算。亦即：周自相乘，除以四率 (4π)，即得圆幂。

$$S=\frac{C^2}{4\pi}=\frac{(2\pi r)^2}{4\pi}=\pi r^2\quad 或\quad S=\frac{C^2}{4\pi}=\frac{C^2}{12}。$$

[96] 六觚之周自相乘为幂，……，即十二觚之幂也

设圆半径为 r，因圆内接正六边形的周 $(6r)$ 的平方，等于直径 $(2r)$ 平方的九倍。即 $(6r)^2=9(2r)^2$。

故注称："六觚之周自相乘为幂，若圆径自乘者九方。"

由于圆内接正十二边形面积为 $S_{12}=\frac{3}{4}(2r)^2=3r^2$，因而直径平方的九倍等于圆内接正十二边形面积的十二倍。即：

$$9(2r)^2=12(3r^2)=12\cdot S_{12}。$$

故称："九方凡为十二觚者十有二。"

若除以十二，即得"十二觚之幂也"。

$$S_{12}=\frac{9(2r)^2}{12}=\frac{12(3r^2)}{12}=3r^2。$$

[97] 今此令周自乘，……，失之于多矣

在 $(2\pi r)^2=\frac{4}{3}\cdot\pi^2\cdot S_{12}$ 中，"周自乘" $(2\pi r)^2$ 非但不是"圆径自乘" $(2r)^2$ 的九倍，其中 $\frac{4}{3}\pi^2$ 也不是十二；若"周自乘" $(2\pi r)^2$ 除以十二则更不是十二觚之幂。即

$$(2\pi r)^2\neq 9(2r)^2,\quad \frac{4}{3}\pi^2\neq 12,\quad \frac{(2\pi r)^2}{12}\neq S_{12}。$$

又由于圆面积 $S=\frac{\pi(2r)^2}{4}=\frac{1}{4\pi}(2\pi r)^2$，其中 $4\pi>12$；所以，若以 $\frac{(2\pi r)^2}{12}$ 为圆幂，便"失之于多矣"。

[98] 以六觚之周自乘十二而一可也

这句大意是：$\frac{(6r)^2}{12}=3r^2=S_{12}$。

由前文"六觚之周自相乘为幂"，"故曰十二而一，即十二觚之幂也"可知，此处注文"六觚之周"下，各版本皆脱落"自乘"二字。今以意校补。

[99]直令圆周自乘，……，皆以一千二百五十六约之，得此率

若取半径为 $r=100$，圆周率为 $\pi=\frac{157}{50}$，则得圆面积 S 与

圆周的平方 C^2 分别为:

$$S=\pi r^2=\frac{r}{4}(4\pi r)=31400,$$

$$C^2=(2\pi r)^2=\pi r(4\pi r)=394384。$$

若以 $4\pi r=1256$ 约分,则"得此率"为: $S:C^2=25:314$。

[100] 复假六以除之

因古率为三,注文"六"字应理解为 $2\pi=2\times3=6$; 若由圆周求其半径,则应除以 2π。即 $r=\frac{C}{2\pi}$。

[101] 依密率以七乘之,八十八而一

由周幂求圆幂,乃有 $S=\frac{C^2}{4\pi}$。若用古率,则有

$$S=\frac{C^2}{4\pi}=\frac{C^2}{2(2\times3)},$$

即是"二、六相乘,除周自乘之数"。若用"密率",则得

$$S=\frac{C^2}{4\pi}=\frac{C^2}{4\times\frac{22}{7}}=\frac{7C^2}{88},$$

即是注文"以七乘之,八十八而一"。

[三三] 今有宛田[102],下周三十步,径[103]十六步。问为田几何。

答曰:一百二十步。

[三四] 又有宛田,下周九十九步,径五十一步。问为田几何。

答曰:五亩六十二步四分步之一。

术曰:以径乘周,四而一。 此术不验。故推方锥以见其形。假令方锥下方六尺,高四尺。四尺为股,下方之半三尺为句,正面邪为弦[104],弦五尺也。令句弦相乘。四因之,得六十尺,即方锥四面见者之幂[105]。若令其中容

圆锥，圆锥见幂与方锥见幂，其率犹圆幂之与方幂也[106]。按方锥下方六尺，则方周二十四尺，以五尺乘而半之，则亦方锥之见幂。故求圆锥之数，折径[107]以乘下周之半，即圆锥之幂也。今宛田上径圆穹，而与圆锥同术，则幂失之于少矣[108]。然其术难用，故略举大较，施之大广田也。求圆锥之幂，犹求圆田之幂也。今用两全相乘，故以四为法，除之，亦如圆幂矣。开立圆术，说圆方诸率甚备，可以验此。

[102] 宛田

《尔雅》："宛，谓中央隆高。"李籍《音义》："畹，当作宛字之误也。宛田者，中央隆高。"《夏侯阳算经》丸田注称："形如覆半弹丸。"罗士琳在《算学启蒙后记》说："丸、畹音近；畹、畹形近似；畹虽不见于字书，殆如明云路《古今律历考》幂积之幂别作羃，同为算书习用字。"

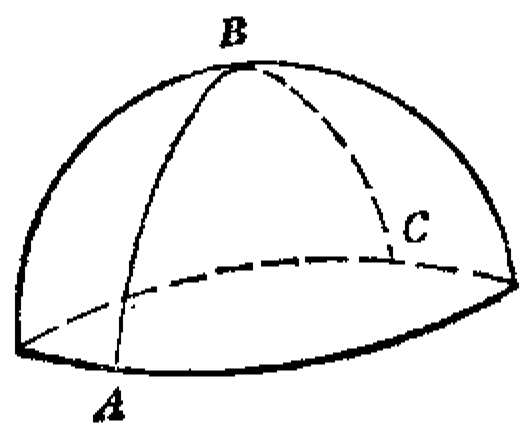


图 14

"宛田"形即现今所谓球冠形。

[103] 径

"径"是指球冠上与底面垂直的大圆弧。即现今所谓球面直径 $\overset{\frown}{ABC}$（图 14）。

[104] 正面邪为弦

"正面邪"是正四棱锥的斜高（VE）（图 15）。

若以棱锥的高（VO）为股，下底一边之半（OE）为句，斜高就

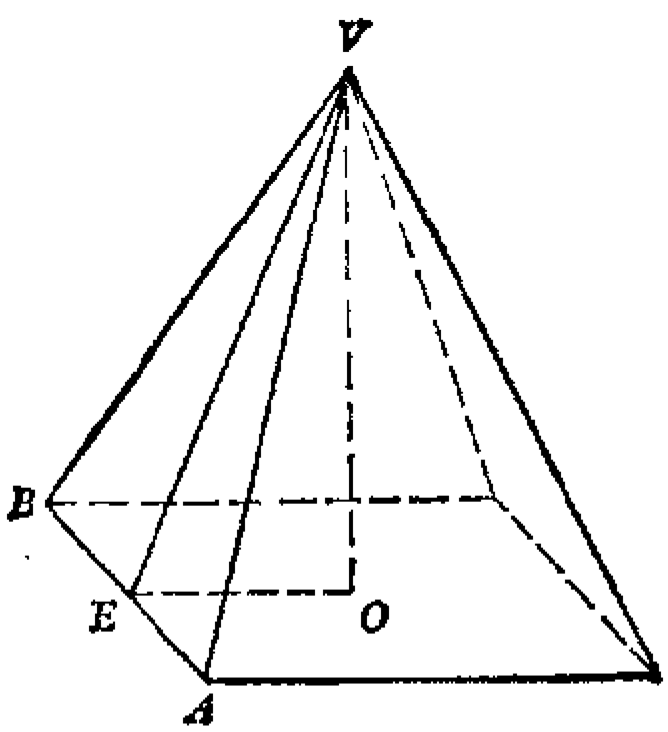


图 15

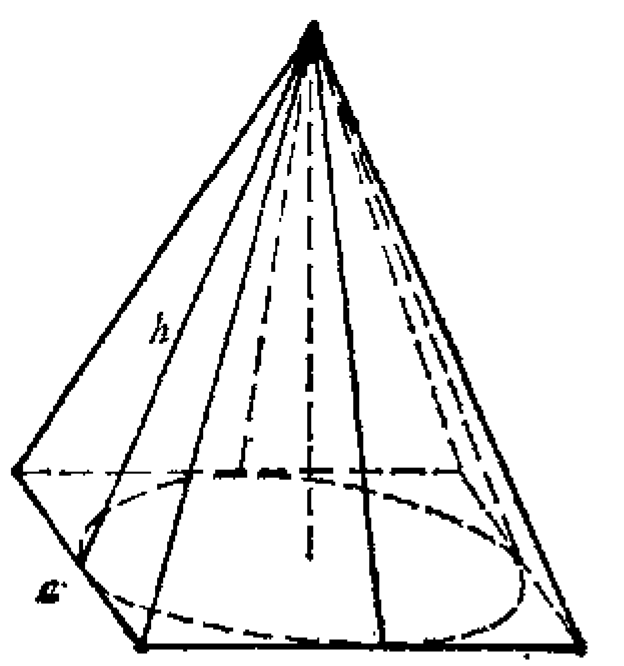


图 16

是句股形（EOV）的弦。故称："正面邪为弦，弦五尺也。"即：

$$VE=\sqrt{VO^2+OE^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5。$$

[105] 四面见者之幂

"四面见者之幂"，就是四棱锥四侧面的面积和。即：

$$S_{侧}=4\cdot\frac{AB\cdot VE}{2}=4AE\cdot VE=4\times3\times5=60\text{ 平方尺。}$$

[106] 若令其中容圆锥，……，其率犹圆幂之与方幂也

如图 16，于方锥内作一内切圆锥，则圆锥与方锥的侧面积之比等于其底面积之比。

设圆锥侧面积为 Q，方锥侧面积为 P，其斜高为 h，底面一边为 a；并设其底面积分别为 $S_{圆}$，$S_{方}$。则有：

$$\frac{Q}{P}=\frac{\frac{\pi ah}{2}}{2ah}=\frac{\pi}{4},\qquad \frac{S_{圆}}{S_{方}}=\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2}=\frac{\pi}{4},$$

即

$$\frac{Q}{P}=\frac{S_{圆}}{S_{方}}。$$

注文"其率犹圆幂之与方幂也"。钱校本将"圆"、"方"二字倒置，今校正。

[107] 折径

与圆锥轴在同一平面内的两条母线，称为圆锥的"径"。圆锥的任一母线称为"折径"。钱校本于"按方锥下"下漏一"方"字，今校补。

[108] 今宛田上径圆穹，而与圆锥同术，则幂失之于少矣

宛田的径是一圆弧。宛田面积的求法，按术计算乃与圆锥侧面积的求法相同，其结果则"失之于少"。刘徽评论正确。如图 17，在计算中，即使不用 $\overline{ANE}$ 而用 $\widehat{AME}$，其结果仍是失之于少。

今证明如下：　　设宛田 $E-ABCD$ 面积之确值为 S，球 O 半球为 r，则得：$S=2\pi r\cdot EG=2\pi r\cdot AG\cdot\mathrm{tg}\theta$。

按术文计算 $E-ABCD$ 的面积 S' 为：

$$S' = \frac{1}{4}(2\pi \cdot AG)\widehat{AEC} = \pi AG \cdot \widehat{AME} = 2\pi r \cdot AG \cdot \theta$$

因 $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ 故 $\theta < \operatorname{tg}\theta$，显见 $S' < S$。

［三五］今有弧田[109]，弦三十步，矢十五步。问为田几何。

答曰：一亩九十七步半。

［三六］又有弧田，弦七十八步二分步之一，矢十三步九分步之七。问为田几何。

答曰：二亩一百五十五步八十一分步之五十六。

术曰：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一。方中之圆，圆里十二觚之幂，合外方之幂四分之三也。中方合外方之半，则朱实合外方四分之一也[110]。弧田，半圆之幂也，故依半圆之体而为之术。以弦乘矢而半之则为黄幂，矢自乘而半之为二青幂，青黄相连为弧体。弧体法当应规，今觚面不至外畔，失之于少矣[111]。圆田旧术以周三径一为率，俱得十二觚之幂，亦失之于少也。与此相似，指验半圆之幂耳[112]。若不满半圆者，益复疎阔[113]。宜依句股锯圆材之术，以弧弦为锯道长，以矢为锯深，而求其径[114]。既知圆径，则弧可割分也。割之者半弧田之弦以为股，其矢为句，为之求弦，即小弧之弦也。以半小弧之弦为句，半圆径为弦，为之求股，以减半径，其余即小弧之矢也。割之又割，使至极细。但举弦矢相乘之数，则必近密率矣[115]。然于算数差繁，必欲有所寻究也。若但度田，取其大数，旧术为约耳。

［三七］今有环田[116]，中周九十二步，外周一百二十二步，径[117]五步。此欲令与周三径一之率相应，故言径五步也。据中外周，以徽术言之，当径四步一百五十七分步之一百二十二也。臣淳风等谨按：依密率，合径四步二十二分步之十七。问为田几何。

答曰：二亩五十五步。于徽术，当为田二亩三十一步一百五十七分步之二十三。臣淳风等谨依密率，为田二亩三十步二十二分步之十五。

术曰：并中外周而半之，以径乘之为积步。此田截齐中外之周为长。并而半之者，亦以盈补虚也。此可令中外周各自为圆田，以中圆减外圆，余则环实也[118]。

[109] 弧田

“弧田”即今之弓形。

[110] 方中之圆，……，则朱实合外方四分之一也

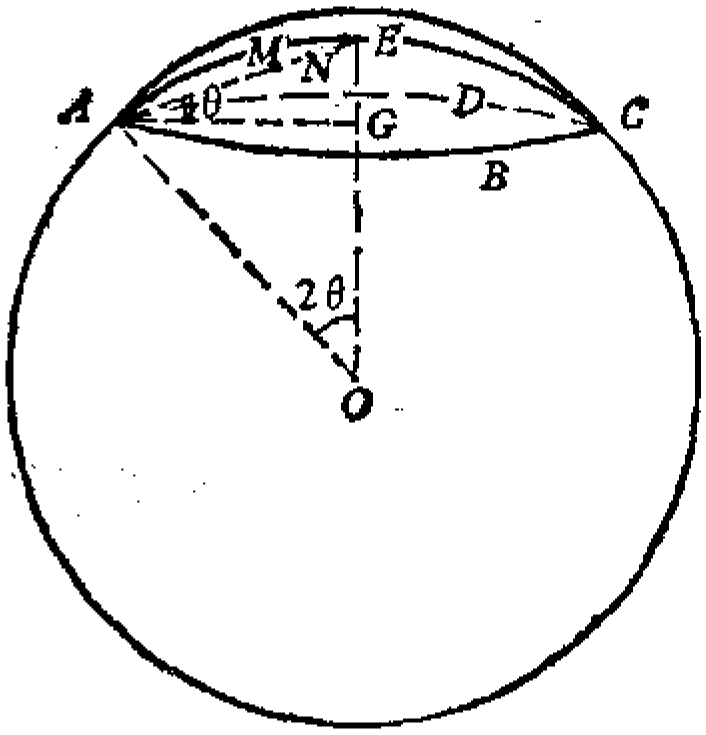


图 17

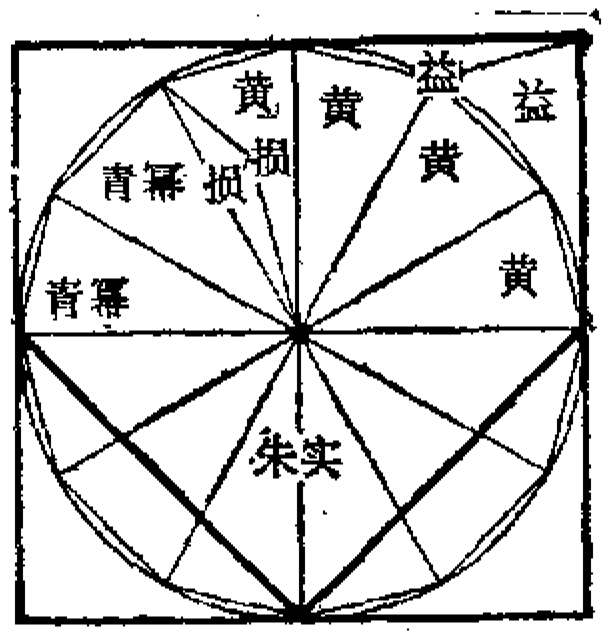


图 18

刘徽认为弧田原术不正确，以半圆验证。今按戴震所补的《弧田图》(图 18) 注释如下：

设圆外切正方形面积为 A，内接正方形面积为 B，内接正十二边形面积为 S_{12}。

将正十二边形分成十二个等积的三角形，其中四个取为黄幂，分割一三角形为两块，补入右上角，恰好密合。故得：

$$S_{12}=\frac{3}{4}A。$$

若取内接正方形之半为朱实，则得：$\frac{1}{2}B=\frac{1}{4}A$。

[111] 弧田，半圆之幂也，……，失之于少矣

当弧田为半圆时，按术计算如下(图 18)：

设圆半径为 r，弦为 $2r$，矢为 r。于是：

$$\frac{弦\times矢}{2}=\frac{1}{2}(2r)r=r^2，即四黄幂。$$

$$\frac{矢\times矢}{2}=\frac{1}{2}r^2，即二青幂。$$

$$\frac{r^2}{2}+r^2=\frac{3}{2}r^2$$ 即是“青黄相连”。

“青黄相连”并不是半圆幂，而是圆内接正十二边面积之半。若以此作为半圆弧田之幂，则显见“失之于少”。

[112] 指验半圆之幂耳

传本讹作“半圆之弧”；钱校本则为“半圆之觚”。今依殿本校改为“半圆之幂”。

[113] 若不满半圆者，益复疎阔

当弧田小于半圆时，按术计算，则误差更大。

今验证如下：设弓形 $ABCD$ 之弦为 b，高为 h，其圆半径为 r，圆心角为 4θ $\left(\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$（图 19）。

由句股形 OAD 及 ADB 求得：$r=\frac{b^2+4h^2}{8h}$，$\operatorname{tg}\theta=\frac{2h}{b}$。

因扇形 $O\text{-}ABC$ 面积为 $2\theta r^2$，$\triangle AOC$ 面积为 $\frac{b(r-h)}{2}$，故弓形 $ABCD$ 面积之确值 S 为：

$$\begin{aligned}S&=2\theta r^2+\frac{b(h-r)}{2}\\&=2\left(\frac{b^2+4h^2}{8h}\right)^2\cdot\operatorname{arctg}\frac{2h}{b}-\frac{b(b^2+4h^2)}{16h}+\frac{bh}{2}。\end{aligned}$$

按弧田术文计算，得弓形面积为：$s'=\frac{bh+b^2}{2}$。

因 $s'<s$，其相对误差应为：

$$E=\frac{s-s'}{s}=\frac{(b^2+4h^2)^2\operatorname{arctg}\frac{2h}{b}-2bh(b^2+4h^2)-16h^4}{(b^2+4b^2)^2\operatorname{arctg}\frac{2h}{b}-2bh(b^2-4h^2)}。$$

若以 $\frac{2h}{b}=e$ 代入上式整理得：

$$E=\frac{(1+e^2)^2\operatorname{arctg}e-e(1+e^2+e^3)}{(1+e^2)^2\operatorname{arctg}e-e(1-e^2)}。$$

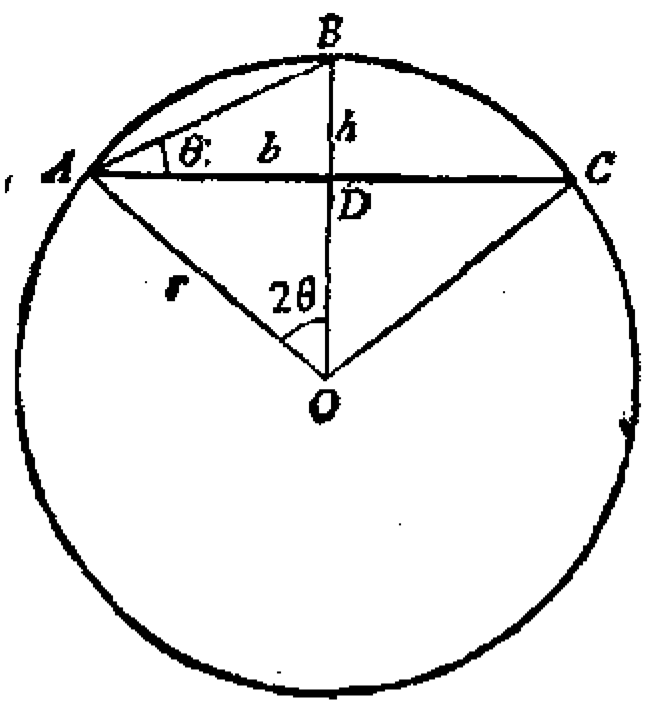


图 19

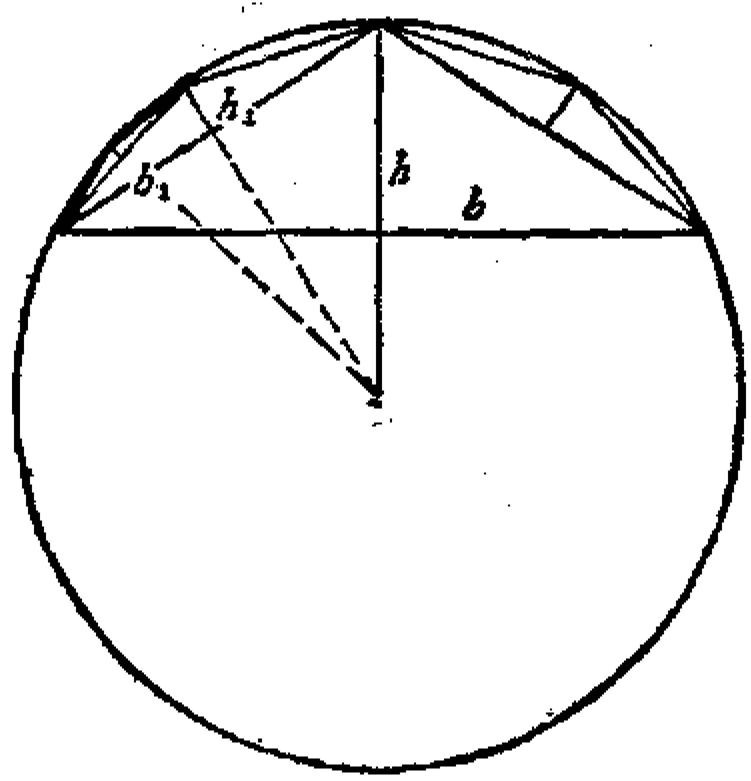


图 20

今取下列各值,代入上式,以兹核算:

设 $e_1=1$, 则 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$, 得

$$E_1=\frac{\pi-3}{\pi}\approx 4.51\%;$$

设 $e_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\theta_2=\frac{\pi}{6}$, 得

$$E_2=\frac{8\pi-12\sqrt{3}-3}{8\pi-6\sqrt{3}}\approx 9.14\%;$$

设 $e_3=\sqrt{2}-1$, 则 $\theta_3=\frac{\pi}{8}$, 得

$$E_3=\frac{\pi-3}{\pi-2}\approx 12.40\%;$$

设 $e_4=2-\sqrt{3}$, 则 $\theta_4=\frac{\pi}{12}$, 得

$$E_4=\frac{4\pi+12\sqrt{3}-33}{4\pi-6\sqrt{3}}\approx 16.17\%。$$

由以上各值可以看出,当弓形比半圆越小时,按术计算的弓形面积的相对误差则越大。刘注所说“益复疎阔”,正确无误。

[114] 宜依句股锯圆材之术,……,而求其径

“句股锯圆材之术”见句股章第九问。
按术，由弦 (b)、矢 (h) 可求得弓形所在圆的直径。

即：$$2r=\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{h}+h,\quad 或\quad 2r=\frac{1}{h}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2+h^2\right]。$$

[115] 既知圆径，……，则必近密率矣

刘徽不满旧弧田术，便提出了弓形面积的另一近似算法：

如图 20，于弓形内以弦为底作等腰三角形；又于其余各小弓形内也作等腰三角形；如此继续作下去，以各弦 b, b_1, b_2, $\cdots$ 及其所对应的矢 h, h_1, h_2, $\cdots$ 分别求得各等腰三角形的面积；将这些等腰三角形面积依次相加，其和则逐渐逼近于所求弓形面积。今以算式表示，即：

$$S=\frac{1}{2}bh+b_1h_1+2b_2h_2+4b_3h_3+\cdots+2^{n-2}b_{n-1}h_{n-1}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}2^{i-2}b_{i-1}h_{i-1}.$$

其中

$$b_i=\sqrt{\left(\frac{b_{i-1}}{2}\right)^2+h_{i-1}^2},\quad h_i=r-\sqrt{r^2-\left(\frac{b_i}{2}\right)^2}。$$
$$i=1,2,3,\cdots,\left(b_0=b,\ h_0=h,\ r=\frac{1}{2h}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2+h^2\right]\right)。$$

依此推算，则得：

$$S=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots\right)bh+\frac{3}{2^3}\left[1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\right.$$
$$+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}\right)+\frac{1}{2^6}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}\right)$$
$$\left.+\cdots\right]\frac{h^3}{6}+\cdots。$$

可见刘徽利用极限观念推证得十分正确。因此，他说：“但举弦矢相乘之数，则必近密率矣。”这里的“密率”应是精密的意思。

[116] 环田

"环田"即今之圆环形。

[117] 径

"径"是指圆环形的大圆与小圆的半径差。

如图 21，"径"即 $AB = R - r$。

[118] 并中外周而半之，以径乘之为积步。……，余则环实也

下术及注(参见注 [121]) 等价于此术及注，若就其字面而论，下术似是分数的环田术，此术则似整数的环田术。按理，此术及注当在第三十八问之前，但各本皆置于第三十八问之后。今从殿本一并移前。

"此田截齐中外之周为长"，即是取两周数的平均数。如图 21，设环田之外周为 C，半径为 R；中周为 c，半径为 r. 其平均数为：$\frac{C+c}{2} = \pi(R+r)$。

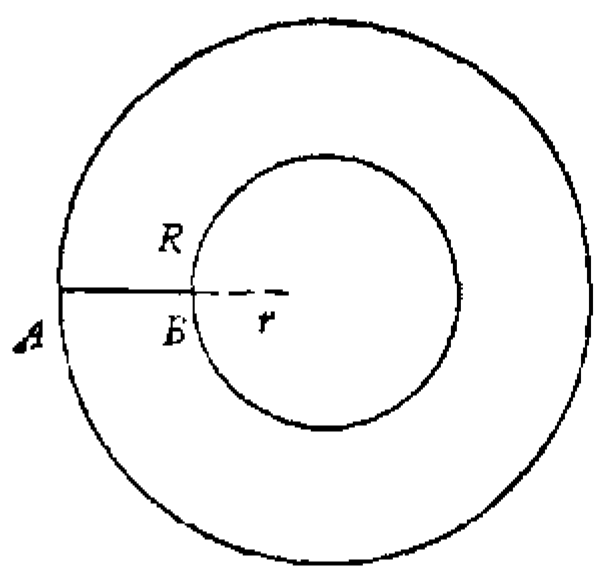


图 21

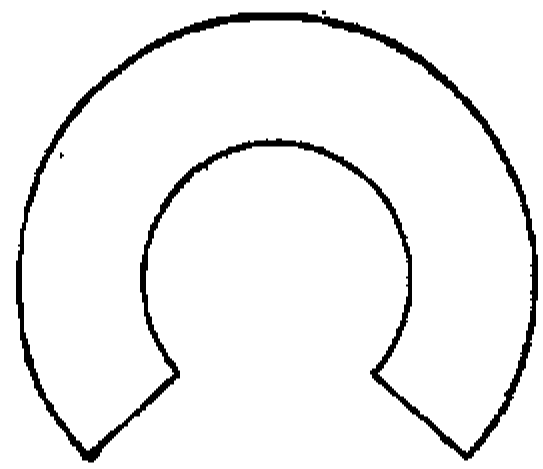


图 22

"中外周各自为圆田，以中圆减外圆"是推证环田术。故得环田面积 (S) 为：

$$S = \frac{C^2}{4\pi} - \frac{c^2}{4\pi} = \frac{C+c}{2}(R-r)。$$

据商功章曲池术刘注可知，可能把中外周引伸为直线，使圆环变成与之等积的等腰梯形。再用割补术求其面积。故说："并而半之者，亦以盈补虚也"。

[三八] 又有环田，中周六十二步四分步之三，外周一百一十三步二分步之一，径十二步三分步之二。此田环而不通匝[119]，故径十二步三分步之二。若据上周求径者，此径失之于多，过周三径一之率，盖为疎矣。于徽术当径八步六百二十八分步之五十一。臣淳风等谨按：依周三径一考之，合径八步二十四分步之一十一。依密率，合径八步一百七十六分步之一十三[120]。问为田几何。

答曰：四亩一百五十六步四分步之一。于徽术，当为田二亩二百三十二步五千二十四分步之七百八十七也。依周三径一为田，三亩二十五步六十四分步之二十五。臣淳风等谨按：密率，为田二亩二百三十一步一千四百八分步之七百一十七也。

术曰：置中外周步数，分母、子各居其下。母互乘子，分母相乘，通全步，内分子，并而半之。又可以中周减外周，余半之，以益中周。径亦通分内子，以乘周为实。分母相乘为法，除之为积步，余积步之分。以亩法除之，即亩数也[121]。按此术，置中外周步数于上，分母、子于下。母乘子者，为中外周俱有余分，故以互乘齐其子，母相乘同其母。子齐母同，故通全步，内分子。并而半之者，以盈补虚，得中平之周。周则为从，径则为广，故广从相乘而得其积。既合分母还须分母出之，故令周径分母相乘而连除之，即得积步。不尽，以等数除之而命分。以亩法除积步，得亩数也[122]。

[119] 此田环而不通匝。

如图22，此田是圆环形状，但不足一整圈。故称："环而不通匝。"

[120] 若据上周求径者，……，合径八步一百七十六分步之一十三

第三十八问所论环田，实际上是一个环缺。正如刘徽所说："此田环而不通匝。"

若仅就环缺而论，本问所给数据及其答案都是正确无误的。但是，刘徽却按整圈环形进行核算，并主张："此径失之于多，过周三径一之率，盖为疎矣。"李淳风等从之，乃"依周三径一考之"。

由于本问只论及环缺，而刘、李却以整圈环形进行考核。这种

考核，似无必要。

[121] 术曰：置中外周步数，……，即亩数也

在"术曰"之前，南宋本衍"密率"二字。

"密率"二字如何解释，各家说法不同。李淳风等以"密率"为一专用名词，表示 $\pi=\frac{22}{7}$。如第三十八问注文"依密率"等。而刘徽则以"密率"为一形容词，表示精密之数。如圆田术注文"谨按图验，更造密率"。以及弧田术注文"则必近密率矣"。若仅就这两种意见来说，此术文与前术文与"密率"二字的关系不大。因而疑为是传抄之误。今依殿本删去。

术文"通全步，内分子"之前当有"分母相乘"四字，之后应有"并而半之；又可"六字。钱校本以为是衍文，遂删去此十字。由注文"故以互乘齐其子，母相乘同其母"。"并而半之者，以盈补虚"可知，术文当有此十字。今依孔刻本校补。

李潢称："自'按此术'以下，是李淳风注，当在密率术下。密率术一节是李淳风补术。上注乃其自注也。"钱校本未置可否，并说："密率术曰以下至卷终，系《九章算术》经文，抑系刘徽或李淳风等注释，很难断定。南宋本与其他各本都用与经文相同的大号字，今仍其旧贯。"各版本都将此术列于卷终，独殿本置此术于注文"按此术"之前。

由于"按此术"以下的注文有"置中外周步数于上，分母、子于下，母乘子者"。足证此注是这术文的注文。因此，按照惯例并依殿本将这术文移至第三十八问之后，"按此术"之前。

[122] 按此术，置中外周步数于上，……，得亩数也

据商功章曲池术刘注可知，可能把中外周引伸为直线，使圆环或环缺变成与之等积的等腰梯形。再用割补术求其面积。因之注文乃有："并而半之者，以盈补虚，得中平之周。周则为从，径则为广，故广从相乘而得其积"。

九章算术卷第二

粟米[1] 以御交质变易

粟米之法[2]： 凡此诸率相与大通[3]，其特相求各如本率。可约者约之，别术然也。

粟率五十	粝米三十
粺米二十七	糳米二十四
御米二十一	小䵂十三半
大䵂五十四	粝饭七十五
粺饭五十四	糳饭四十八
御饭四十二	菽、荅、麻、麦各四十五
稻六十	豉六十三
飧九十	熟菽一百三半
糵一百七十五	

今有[4] 此都术[5]也。凡九数以为篇名，可以广施诸率，所谓告往而知来，举一隅而三隅反者也。诚能分诡数之纷杂，通彼此之否塞，因物成率，审辨名分，平其偏颇，齐其参差，则终无不归于此术也。术曰：以所有数乘所求率为实，以所有率为法，少者多之始，一者数之母，故为率者必等之于一[6]。据粟率五，粝率三，是粟五而为一，粝米三而为一也。欲化粟为粝米者，粟当先本是一。一者谓以五约之，令五而为一也。讫，乃以三乘之，令一而为三。如是则率等于一，以五为三矣[7]。然先除后乘或有余分，故术反之。又究言之，知粟五升为粝米三升。分言之，知粟一斗为粝米五分斗之三。以五为母，三为子。以粟求粝米者，以子乘，其母报除也。然则所求之率常为母也。 臣淳风等谨按：宜云"所求之率常为子，所有之率常为母"。今乃云"所求之率常为母"，知脱错也。实如法而一。

[1] 粟米

本章所论主要是比例算法。因在“粟米”问题里使用比例算法比较广泛，而且最早，故取作章名。

[2] 粟米之法

“粟率五十”以下，是各种粮食兑换的比率表。由于粟米(即谷子)五斗，去皮后可得粝米(即糙米)三斗，又可舂为粺米(即九折米)二斗七升，或糳米(即八折米)二斗四升，等等。故得：

粟米:粝米 = 50:30，

粟米:粺米 = 50:27，

粟米:糳米 = 50:24，

……………………。

此表所列各项，因以粟米为标准，所以称为“粟米之法”。李籍《音义》称：“粟者，禾之未舂。米者，糓实之无殼。粟者，米之率也。诸米不等，以粟为率，故曰粟米。”

[3] 大通

在此比率表中，每两种粮食都可按所列数据相互兑换折合。故称为“大通”。

[4] 今有

依今有数据，按比例关系推算所求数据，称为“今有术”。“今有术”即是现今的比例计算方法。“今有”是这一算法的名称。

古代，对于各个比例量定有专名。即“所有率”、“所有数”、“所求率”及“所求数”。按比例可得：

$$所求数 = \frac{所求率}{所有率} \times 所有数。$$

在计算中为了避免不能整除，乃先乘后除，故得：

$$所求数 = (所求率 \times 所有数) \div 所有率。$$

即术文所说“以所有数乘所求率为实，以所有率为法”。

本章共有四十六问，都是按今有数据推算所求数据的问题。《九章算术》称这种算法为“今有术”，刘徽、李淳风也以“今有术”作为这种算法的专名。

第一问是以粟求粝，第二问是以粟求粺，第三问是以粟求糳。可见本章各问都是依比例算法以此易彼。因此，“今有术”一名曾改为“互换术”。《永乐大典》引杨辉《续古摘奇算法》称：“粟米为问，互换为法。”杨辉《详解九章算法》（1261）将粟米各问列入互换门，称为“互换乘除法”。

由于“所有数”和“所求率”是异类量，而“所有数”和“所有率”是同类量，根据先乘后除一式，“今有术”一名又逐渐演变为“异乘同除术”。如朱世杰《算学启蒙》及程大位《算法统宗》都称为“异乘同除”法。

明末，李之藻编译《同文算指》介绍了“三率准则法”，并以第一、二、三、四率分别代替了“今有术”中各比例量的专名。徐光启译《几何原本》时，提出“比例”一名后，这名称一直沿用至今。

《几何原本》说：“比例者，两几何以几何相比之理。”又说：“两比例之理相似，为同理之比例。两几何相比，谓之比例。两比例相比，谓之同理之比例。”这里所说的“比例”即现今的“比”，“同理之比例”即现今的“比例”。可见徐光启所译不如顾炎武《日知录》“比例者，以比为例也”明确。

印度的“三率法”与我国的“今有术”是完全一致的。当印度“三率法”传入伊斯兰教国家，经由伊斯兰国家又传入西欧各国。在欧洲流传很广，并引起数学家的重视。当时欧洲的数学书如毕的斯克斯（Pitiscus, 1561—1613）《三角法》里的公式，几乎都是用“三率法”推证的。

[5] 都术

即总的方法或通法。

[6] 少者多之始，一者数之母，故为率者必等之于一

这是说，数是由少到多，“一”是一切数的开始。作为比率的数最好是一；若不是一时，可看作是一个整体。

[7] 据粟率五，……，以五为三矣

以“粟率五，粝率三”为例，对“为率者必等之于一”进行解释。

注文“粟五而为一，粝米三而为一也”。即：粟率五可看作一

个整体，粝率三也可看作一个整体。

“欲化粟为粝米”以下，是以五约粟米之数，将五看作一个整体。再乘以三，又将前一整体看作三。这就是率等于一。也即把率看作一个整体，实际上是把五看作三个整体。即“以五为三矣”。由于：粟米 1∶粝米 $x=5:3$ 故得：

$$粝米\ x=\frac{粟米\ 1}{5}\times 3=\frac{粟米\ 1\times 3}{5}。$$

[一] 今有粟一斗，欲为粝米。问得几何。

答曰：为粝米六升。

术曰：以粟求粝米，三之，五而一。臣淳风等谨按：都术以所求率乘所有数，以所有率为法。此术以粟求米，故粟为所有数。三是米率，故三为所求率。五是粟率，故五为所有率。粟率五十，米率三十，退位求之，故唯云三、五也。

[二] 今有粟二斗一升，欲为粺米。问得几何。

答曰：为粺米一斗一升五十分升之十七。

术曰：以粟求粺米，二十七之，五十而一。臣淳风等谨按：粺米之率二十有七，故直以二十七之，五十而一也。

[三] 今有粟四斗五升，欲为糳米。问得几何。

答曰：为糳米二斗一升五分升之三。

术曰：以粟求糳米，十二之，二十五而一。臣淳风等谨按：糳米之率二十有四，以为率太繁，因而半之，故半所求之率，以乘所有之数。所求之率既减半，所有之率亦减半，是故十二乘之，二十五而一也。

[四] 今有粟七斗九升，欲为御米，问得几何。

答曰：为御米三斗三升五十分升之九。

术曰：以粟求御米，二十一之，五十而一。

[五] 今有粟一斗，欲为小䵂，问得几何。

答曰：为小䵂二升一十分升之七。

术曰：以粟求小䵂，二十七之，百而一。臣淳风等谨按：小䵂之率十三有半，半者二为母，以二通之，得二十七，为所求率。又以母二通其粟率，得一百，为所有率。凡本率有分者，须即乘除也。他皆放此。

[六] 今有粟九斗八升，欲为大䵂。问得几何。

答曰：为大䵂一十斗五升二十五分升之二十一。

术曰：以粟求大䵂，二十七之，二十五而一。臣淳风等谨按：大䵂之率五十有四，因其可半，故二十七之。亦如粟求糳米，半其二率。

[七] 今有粟二斗三升，欲为粝饭。问得几何。

答曰：为粝饭三斗四升半。

术曰：以粟求粝饭，三之，二而一。臣淳风等谨按：粝饭之率七十有五，粟求粝饭，合以此数乘之。今以等数二十有五约其二率，所求之率得三，所有之率得二，故以三乘二除。

[八] 今有粟三斗六升，欲为粺饭。问得几何。

答曰：为粺饭三斗八升二十五分升之二十二。

术曰：以粟求粺饭，二十七之，二十五而一。臣淳风等谨按：此术与大䵂多同。

[九] 今有粟八斗六升，欲为糳饭。问得几何。

答曰：为糳饭八斗二升二十五分升之一十四。

术曰：以粟求糳饭，二十四之，二十五而一。臣淳风等谨按：糳饭率四十八，此亦半二率而乘除。

[一〇] 今有粟九斗八升，欲为御饭。问得几何。

答曰：为御饭八斗二升二十五分升之八。

术曰：以粟求御饭二十一之，二十五而一。臣淳风等谨按：此术半率亦与糳饭多同。

[一一] 今有粟三斗少半[8]升，欲为菽。问得几何。

答曰：为菽二斗七升一十分升之三。

[一二] 今有粟四斗一升太半[8]升，欲为答。问得几何。

答曰：为答三斗七升半。

[一三] 今有粟五斗太半升，欲为麻。问得几何。

答曰：为麻四斗五升五分升之三。

[一四] 今有粟一十斗八升五分升之二，欲为麦。问得几何。

答曰：为麦九斗七升二十五分升之一十四。

术曰：以粟求菽、荅、麻、麦，皆九之，十而一。臣淳风等谨按：四术率并四十五，皆是为粟所求，俱合以此率乘其本粟。术欲从省，先以等数五约之，所求之率得九，所有之率得十，故九乘十除，义由于此。

[一五] 今有粟七斗五升七分升之四，欲为稻。问得几何。

答曰：为稻九斗三十五分升之二十四。

术曰：以粟求稻，六之，五而一。臣淳风等谨按：稻率六十，亦约二率而乘除。

[一六] 今有粟七斗八升，欲为豉。问得几何。

答曰：为豉九斗八升二十五分升之七。

术曰：以粟求豉，六十三之，五十而一。

[一七] 今有粟五斗五升，欲为飧。问得几何。

答曰：为飧九斗九升。

术曰：以粟求飧，九之，五而一。臣淳风等谨按：飧率九十，退位，与求稻多同。

[一八] 今有粟四斗，欲为熟菽。问得几何。

答曰：为熟菽八斗二升五分升之四。

术曰：以粟求熟菽，二百七之，百而一。臣淳风等谨按：熟菽之率一百三半，半者其母二，故以母二通之。所求之率既被二乘，所有之率随而俱长，故以二百七之，百而一。

[一九] 今有粟二斗，欲为蘖。问得几何。

答曰：为蘖七斗。

术曰：以粟求蘖，七之，二而一。臣淳风等谨按：蘖率一百七十有五，合以此数乘其本粟。术欲从省，先以等数二十五约之，所求之率得七，所有之率得二，故七乘二除。

[二〇] 今有粝米十五斗五升五分升之二，欲为粟。问得几何。

答曰：为粟二十五斗九升。

术曰：以粝米求粟，五之，三而一。臣淳风等谨按：上术以粟求米，故粟为所有数，三为所求率，五为所有率。今此以米求粟，故米为所有数，五为所求率，三为所有率。准都术求之，各合其数。以下所有反求多同，皆准此。

[二一] 今有粺米二斗，欲为粟。问得几何。

答曰：为粟三斗七升二十七分升之一。

术曰：以粺米求粟，五十之，二十七而一。

[8] 少半，太半

"少半"是 $\frac{1}{3}$，"太半"是 $\frac{2}{3}$。

《史记·项羽本纪》："汉有天下太半。"吴韦昭说："凡数三分有二为太半，有一为少半。"

[二二] 今有糳米三斗少半升，欲为粟。问得几何。

答曰：为粟六斗三升三十六分升之七。

术曰：以糳米求粟，二十五之，十三而一。

[二三] 今有御米十四斗，欲为粟。问得几何。

答曰：为粟三十三斗三升少半升。

术曰：以御米求粟，五十之，二十一而一。

[二四] 今有稻一十二斗六升一十五分升之一十四，欲为粟。问得几何。

答曰：为粟一十斗五升九分升之七。

术曰：以稻求粟，五之，六而一。

[二五] 今有粝米一十九斗二升七分升之一，欲为粺米。问得几何。

答曰：为粺米一十七斗二升一十四分升之一十三。

术曰：以粝米求粺米，九之，十而一。臣淳风等谨按：粺率二十七，合以此数乘粝米。术欲从省，先以等数三约之，所求之率得九，所有之率得十，故九乘而十除。

[二六] 今有粝米六斗四升五分升之三，欲为粝饭。问得几何。

答曰：为粝饭一十六斗一升半。

术曰：以粝米求粝饭，五之，二而一。臣淳风等谨按：粝饭之率七十有五，宜以本粝米乘此率数。术欲从省，先以等数十五约之，所求之率得五，所有之率得二，故五乘二除，义由于此。

[二七] 今有粝饭七斗六升七分升之四，欲为飧。问得几何。

答曰：为飧九斗一升三十五分升之三十一。

术曰：以粝饭求飧，六之，五而一。臣淳风等谨按：飧率

九十，为粝饭所求，宜以粝饭乘此率。术欲从省，先以等数十五约之，所求之率得六，所有之率得五。以此，故六乘五除也。

［二八］今有菽一斗，欲为熟菽。问得几何。

答曰：为熟菽二斗三升。

术曰：以菽求熟菽，二十三之，十而一。臣淳风等谨按：熟菽之率一百三半，因其有半，各以母二通之，宜以菽数乘此率。术欲从省，先以等数九约之，所求之率得一十一半，所有之率得五也。

［二九］今有菽二斗，欲为豉。问得几何。

答曰：为豉二斗八升。

术曰：以菽求豉，七之，五而一。臣淳风等谨按：豉率六十三，为菽所求，宜以菽乘此率。术欲从省，先以等数九约之，所求之率得七，而所有之率得五也。

［三十］今有麦八斗六升七分升之三，欲为小䵂，问得几何。

答曰：为小䵂二斗五升一十四分升之一十三。

术曰：以麦求小䵂，三之，十而一。臣淳风等谨按：小䵂之率十三半，宜以母二通之，以乘本麦之数。术欲从省，先以等数九约之，所求之率得三，所有之率得十也。

［三一］今有麦一斗，欲为大䵂。问得几何。

答曰：为大䵂一斗二升。

术曰：以麦求大䵂，六之，五而一。臣淳风等谨按：大䵂之率五十有四，合以麦数乘此率。术欲从省，先以等数九约之，所求之率得六，所有之率得五也。

［三二］今有出钱一百六十，买瓴甓十八枚。瓴甓，甎也。问枚几何。

答曰：一枚，八钱九分钱之八。

［三三］今有出钱一万三千五百，买竹二千三百五十个。问

个几何。

答曰：一个，五钱四十七分钱之三十五。

经率[9]术曰：以所买率为法，所出钱数为实，实如法得一钱。按此今有之义，出钱为所有数，一枚为所求率，所买为所有率，而今有之，即得所求数。一乘不长，故不复乘，是以径将所买之率为法，以所出之钱为实，实如法得一钱。不尽者，等数除之而命分[10]。　臣淳风等谨按：今有之义，以所求率乘所有数，合以瓴甓一枚乘钱一百六十为实。但以一乘不长，故不复乘。是以径将所买之率与所出之钱为法、实也。

[9] 经率

"经率"就是除法。

第三十二、三十三两问，本是除法问题，但也可用今有术进行计算。如第三十二问：

所有率 ＝ 18 枚，　　所有数 ＝ 160 钱，

所求率 ＝ 1 枚，　　所求数 ＝ x 钱。

依

$$所求数=\frac{所有数\times所求率}{所有率},$$

即

$$x=\frac{160\times1}{18}=\frac{160}{18}=8\frac{8}{9}钱。$$

在运算中，因所求率为一，以所求率乘所有数，"一乘不长，故不复乘"，所以将所有率作为除数，所有数作为被除数，除之即得所求数。可见第三十二、三十三问是除法问题。

[10] 按此今有之义，……，等数除之而命分

"按此今有之义"至"等数除之而命分"一段，李潢认为是刘徽注文。他说："'臣淳风等谨按'一段，宜在刘注之后，传写者误置在前。又增'又'字于刘注'按此今有之义'之上，宜并正之。"所见正确。今将李注置于刘注之后，并删去"又"字。

刘注及李注显系经率术的注文，今依殿本将注文移至术文之后。

刘注"实如法得一枚。钱不尽者，……"是殿本原文。此处所问是一枚若干钱，答数单位应是"钱"不是"枚"。今以意删去"枚"字，改为"实如法得一钱。"

"等数"就是最大公约数，"等数而命分"是钱校本原文，显见于意欠通。又由方田章环田术刘注"以等数除之而命分"。商功章第五、六问刘注"等数约之而命分也"来看，恐未必符合刘徽原意。因而以意校改为"等数除之而命分"。

［三四］今有出钱五千七百八十五，买漆一斛六斗七升太半升。欲斗率之[11]，问斗几何。

答曰：一斗，三百四十五钱五百三分钱之一十五。

［三五］今有出钱七百二十，买缣一匹二丈一尺[12]。欲丈率之，问丈几何。

答曰：一丈，一百一十八钱六十一分钱之二。

［三六］今有出钱二千三百七十，买布九匹二丈七尺。欲匹率之，问匹几何。

答曰：一匹，二百四十四钱一百二十九分钱之一百二十四。

［三七］今有出钱一万三千六百七十，买丝一石二钧一十七斤。欲石率之，问石几何。

答曰：一石，八千三百二十六钱一百九十七分钱之一百七十八。

经术[13]此术犹经分。术曰：以所求率乘钱数为实，以所买率为法，实如法得一。臣淳风等谨按：今有之义，出钱为所有数，一斗为所求率，故以乘钱，又以分母乘之为实。所买为所有率，有分者通之，通分内子以为法。实如法而一，得钱数。不尽而命分者，因法为母，实余为子。实见不满，故以命之[14]。

[11] 欲斗率之

“欲斗率之”是打算以一斗为单位进行计算。

[12] 一匹二丈一尺

《汉书·食货志》：“布帛广二尺二寸为幅，长四丈为疋。”“疋”是“匹”的异体字。“一匹二丈一尺”，即六丈一尺。

[13] 经术

“经术”就是分数除法，如注文“此术犹经分”。

第三十四以后四问原是除法问题，也可以今有术计算。如第三十四问：

所有率 $=1$ 斛 6 斗 $7\frac{2}{3}$ 升 $=16\frac{23}{30}$ 斗，所有数 $=5785$ 钱，

所求率 $=1$ 斗，　　　　　　　　所求数 $=x$ 钱。

因

$$\text{所求数}=\frac{\text{所有数}\times\text{所求率}}{\text{所有率}}$$

故得：

$$x=\frac{5785\times 1}{16\frac{23}{30}}=\frac{5785\times 30}{16\times 30+23}=\frac{173550}{503}=345\frac{15}{503}\text{钱。}$$

可以看出，虽以今有术计算，实为分数除法。

[14] 臣淳风等谨按：今有之义，……，故以命之

注文“又以分母乘之为实”中的“分母”是所有率通分后的分母。如第三十四问，所有率 1 斛 6 斗 $7\frac{2}{3}$ 升 $=16\frac{23}{30}$ 升之分母 30 即是。

这一段是术文的注文，今依殿本移至术文之后。

戴震认为这段注文“舛误不可通”乃将注文校订。钱校本对于戴震所校提出批评，以为“不合注者原意”。钱校本将这段注文重加校订，今从钱校本。但是，如将此注改为“臣淳风等谨按：今有之义，所买为所有率，有分者通之，通分内子以为法。出钱为所有数，一斗为所求率，故以乘钱，又以分母乘之为实。实如法而一，得钱数。……”，则较为明确。

[三八] 今有出钱五百七十六，买竹七十八个。欲其大小率之[15]，问各几何。

答曰：

其四十八个，个七钱。

其三十个，个八钱。

[15] 欲其大小率之

此问大、小个竹价相差一钱，“欲其大、小率之”就是欲以大、小个竹为单位进行计算。第三十九问贵丝与贱丝每斤差一钱，“欲其贵贱斤率之”就是欲以一斤为单位进行计算。第四十问贵丝与贱丝每石差一钱，“欲其贵贱石率之”就是欲以一石为单位进行计算。余仿此。

[三九] 今有出钱一千一百二十，买丝一石二钧十八斤。欲其贵贱斤率之，问各几何。

答曰：

其二钧八斤，斤五钱。

其一石一十斤，斤六钱。

[四〇] 今有出钱一万三千九百七十，买丝一石二钧二十八斤三两五铢。欲其贵贱石率之，问各几何。

答曰：

其一钧九两一十二铢，石八千五十一钱。

其一石一钧二十七斤九两一十七铢，石八千五十二钱。

[四一] 今有出钱一万三千九百七十，买丝一石二钧二十八斤三两五铢。欲其贵贱钧率之，问各几何。

答曰：

其七斤一十两九铢，钧二千一十二钱。

其一石二钧二十斤八两二十铢，钧二千一十三钱。

[四二] 今有出钱一万三千九百七十，买丝一石二钧二十八斤三两五铢。欲其贵贱斤率之，问各几何。

答曰：

其一石二钧七斤十两四铢，斤六十七钱。

其二十斤九两一铢，斤六十八钱。

[四三] 今有出钱一万三千九百七十，买丝一石二钧二十八斤三两五铢。欲其贵贱两率之，问各几何。

答曰：

其一石一钧一十七斤一十四两一铢，两四钱。

其一钧一十斤五两四铢，两五钱。

其率[16]术曰：各置所买石、钧、斤、两以为法，以所率乘钱数为实，实如法而一。不满法者反以实减法，法贱实贵。其求石、钧、斤、两，以积铢各除法实，各得其积数，余各为铢[17]。如欲令无分，按出钱五百七十六。买竹七十八个，以除钱得七，实余三十。是为三十个复可增一钱。然则实余之数即是

贵者之数。故曰"实贵"也。本以七十八个为法，今以贵者减之，则其余悉是贱者之数。故曰"法贱"也。其求石、钧、斤、两，以积铢各除法实，各得其积数，余各为铢者，谓石、钧、斤、两积铢除实，又以石、钧、斤、两积铢除法，余各为铢。即合所问[18]。

[16] 其率

"其率"就是以大小率之或贵贱率之的意思。也就是推求所买物品每一单位值几钱。若按运算来说，就是带余除法。

[17] 其求石、钧、斤、两，……，余各为铢

术文"法贱实贵"以下，宜依殿本校补"其求石、钧、斤、两，以积铢各除法实，各得其积数，余各为铢"二十二字。

今以第四十问为例，说明"其求石、钧、斤、两"以下一段的大意：

1 两 = 24 铢，

1 斤 = 16 两 = 384 铢，

1 钧 = 30 斤 = 11520 铢，

1 石 = 4 钧 = 46080 铢，

以上分别为两、斤、钧、石的积铢数。因经文"欲其贵贱石率之"，故将所买丝化成以石为单位，即

$$1\text{石}\,2\text{钧}\,28\text{斤}\,3\text{两}\,5\text{铢} = 79949\text{铢} = \frac{79949}{46080}\text{石。}$$

故得：

$$13970 \div \frac{79949}{46080} = \frac{13970 \times 46080}{79949} = 8051\,\frac{68201}{79949}\text{。}$$

贱丝每石价 8051 钱，贵丝每石价8052钱。实余 68201 为贵丝铢数，法余 79949－68201 = 11748 为贱丝铢数。

今欲求贵贱丝石、钧、斤、两数，即以上列积铢数依次各除实法(即实余、法余)。如贵丝 68201 铢，以石的积铢数 46080 除之，得 1 石余 22121 铢。再以钧的积铢数 11520 除 22121，得 1 钧余 10601 铢。更以斤的积铢数 384 除 10601，得 27 斤余 233 铢。最后，以两的积铢数 24 除 233，得 9 两余 17 铢。于是：

贵丝 = 68201 铢 = 1 石 1 钧 27 斤 9 两 17 铢。

仿此得：贱丝 = 11748 铢 = 1 钧 9 两 12 铢。

[18] 如欲令无分，……，即合所问

“如欲令无分”以下一段，是其率术文的注文，今依殿本移至术文之后。

“如欲令无分”就使欲使每个竹价为整数，而无余分。

[四四] 今有出钱一万三千九百七十，买丝一石二钧二十八斤三两五铢。欲其贵贱铢率之，问各几何。

答曰：

其一钧二十斤六两十一铢，五铢一钱。

其一石一钧七斤一十二两一十八铢，六铢一钱。

[四五] 今有出钱六百二十，买羽二千一百翭。翭，羽本也。数羽称其本，犹数草木称其根株。欲其贵贱率之，问各几何。

答曰：

其一千一百四十翭，三翭一钱。

其九百六十翭，四翭一钱。

[四六] 今有出钱九百八十，买矢簳五千八百二十枚。欲其贵贱率之，问各几何。

答曰：

其三百枚，五枚一钱。

其五千五百二十枚，六枚一钱。

反其率[19]臣淳风等谨按：其率者，钱多物少；反其率者，钱少物多。多少相反，故曰反其率也。术曰：以钱数为法，所率为实，实如法而一。不满法者反以实减法，法少，实多。二物各以

所得多少之数乘法实，即物数。按其率出钱六百二十，买羽二千一百䩫。反之，当二百四十钱一钱四䩫，其三百八十钱一钱三䩫。是钱有二价，物有贵贱。故以羽乘钱，反其率也[20]。　臣淳风等谨按：其率者，以物数为法，钱为实。反之者，以钱数为法，物为实。不满法者，实余也。当以余物化为钱矣。法为凡钱，而今以化钱减之。故曰反以实减法也。法少者经分之所得，故曰法少。实多者，余分之所益，故曰实多。宜以多乘实，少乘法，故曰各以所得多少数乘法实，即物数也[21]。

[19] 反其率

"反其率"不是求贵贱物品每一单位值几钱，而是求一钱能买多少物品。因与"其率"相反，故称为"反其率"。

李淳风注称："其率者，钱多物少；反其率者，钱少物多。多少相反，故曰反其率也。"又说："其率者，以物数为法，钱为实。反之者，以钱数为法，物为实。"由此可知"其率"与"反其率"就已知数据而论，是大、小相反，就钱物而论，是法实相反。

[20] 按其率出钱六百二十，……，反其率也

如第四十五问，因钱少物多，故按反其率计算，乃有：

$$2100 \div 620 = 3\cdots\cdots240,$$

所得商为 3，即 1 钱买贵羽 3 䩫。由于 1 钱可买贱羽 4 䩫，其中余数 240 当为贱羽钱数，故得 $620 - 240 = 380$ 即是贵羽钱数。即注文"二百四十钱一钱四䩫，其三百八十钱一钱三䩫"。

"以羽乘钱"乃得：$380 \times 3 = 1140$，$240 \times 4 = 960$，即合所问。

[21] 其率者，以物数为法，……，即物数也

如上注，$2100 \div 620 = 3\cdots\cdots240$，其中 240 为"多"者的钱数，即"实多"。也就是将所余化为 240 钱，每钱 4 䩫。即是注文"余物化为钱矣"。其实，按除法计算，所余 240 应为 240 䩫，因贵贱羽每钱相差 1 䩫，故可将余数 240 化为钱。又因

$$620-240 = 380,$$

其中余数 380，即是"少者"的钱数，即"法少"。

以"多 (4)"乘实余 (240)，以"少 (3)"乘法余 (380)，得：

$$240 \times 4 = 960, \ 380 \times 3 = 1140。$$

就是物数，即注文"即物数也"。

注文"法少者，知经分之所得"。"实多者，知余分之所益"之两"知"字，显系衍文。今按南宋本、殿本注文，予以校删。

注文"即物数也"以下，钱校本有"其求石、钧、斤、两，以积铢各除法实，各得其数，余各为铢者，谓以石、钧、斤、两积铢除实，石、钧、斤、两积铢除法，余各为铢，即合所问"四十八字。并说："南宋本误衍'术曰'之前，今移补于此。"由"其率术"及"反其率术"的注文可知钱校本似嫌武断，今按殿本删此四十八字。

九章算术卷第三

衰分[1] 以御贵贱禀税

衰分衰分，差分也。术曰：各置列衰[2]，列衰，相与率也。重叠，则可约。副并为法，以所分乘未并者各自为实，法集[3]而衰别[4]。数本一也，今以所分乘上别[5]，以下集[5]除之，一乘一除适足相消，故所分犹存，且各应率而别也。于今有术，列衰各为所求率，副并为所有率，所分为所有数。又以经分言之，假令甲家三人，乙家二人，丙家一人，并六人，共分十二，为人得二也。欲复作逐家者，则当列置人数，以一人所得乘之。今此术先乘而后除也[6]。实如法而一。不满法者，以法命之。

[1] 衰分

“衰分”就是按一定比率分配的意思。如按1:2的比率分配物品，其中1:2就是衰。“衰”在这里读作cui（音崔）。

李籍《音义》说：“衰，差也。以差为平分，故曰衰分。”程大位《算法统宗》说：“衰者，等也。物之混者，求其等而分之。以物之多寡求出税，以人户等第求差徭，以物价求贵贱高低者也。”

衰分也称为差分，以现今术语来说，就是配分法或配分比例。

[2] 各置列衰

“各置列衰”就是将所配的比率按次序排列出来。如第一问的列衰为：5:4:3:2:1。

[3] 法集

在衰分术的除法中，把所配的比率相加之和作为除数，称为“法集”。如第一问的法集为$5+4+3+2+1=15$。

[4] 衰别

由上注可知，法数既是所配的比率相加之和，因所配的比率各自有别，所以称各比率数为“衰别”。如第一问的“法集”为15，“衰

别”各为 5，4，3，2，1。

[5] 上别、下集

古代用算筹进行除法时，将法(除)数摆在实(被除)数之下。这里将法数即“法集”摆在下行而称为“下集”；注文所说“上别”就是摆在“下集”之上的实数，也就是摆在上行的“衰别”。

今以第一问为例，按注文计算如下：

“法集”为：$5+4+3+2+1=15$，“衰别”各为 5，4，3，2，1。所分为 5 鹿，每人所配的鹿为：

$$\text{大夫得：}(5\times5\text{ 鹿})\div15=1\frac{2}{3}\text{ 鹿，}$$

$$\text{不更得：}(4\times5\text{ 鹿})\div15=1\frac{1}{3}\text{ 鹿，}$$

$$\text{簪袅得：}(3\times5\text{ 鹿})\div15=1\text{ 鹿，}$$

$$\text{上造得：}(2\times5\text{ 鹿})\div15=\frac{2}{3}\text{ 鹿，}$$

$$\text{公士得：}(1\times5\text{ 鹿})\div15=\frac{1}{3}\text{ 鹿，}$$

各人所得的比为：$1\frac{2}{3}:1\frac{1}{3}:1:\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=5:4:3:2:1$，故注文说：“各应率而别也”。

[6] 欲复作逐家者，……，今此术先乘而后除也

欲求每家得数，先按“经分言之”，“为人得二也”，求得每人得数为 $12\div6=2$，再乘以各家人数，即“欲复作逐家者，则当列置人数，以一人所得乘之”。因有：

甲家得：$(12\div6)\times3=6$，

乙家得：$(12\div6)\times2=4$，

丙家得：$(12\div6)\times1=2$。

由刘注可知，此类问题既可用衰分术计算，也可用今有术或经分术计算。

若用经分术计算，则是先除后乘。

若用衰分术计算，则是先乘后除。即注文“今此术先乘而后除

也"。

[一] 今有大夫、不更、簪裛、上造、公士，凡五人，共猎得五鹿。欲以爵次[7]分之，问各得几何[8]。

答曰：

大夫得一鹿三分鹿之二。

不更得一鹿三分鹿之一。

簪裛得一鹿。

上造得三分鹿之二。

公士得三分鹿之一。

术曰：列置爵数，各自为衰，爵数者，谓大夫五，不更四，簪裛三，上造二，公士一也。《墨子·号令篇》"以爵级为赐"，然则战国之初有此名也。副并为法。以五鹿乘未并者，各自为实。实如法得一鹿。于今有术，列衰各为所求率，副并为所有率，今有鹿数为所有数，而今有之，即得[9]。

[7] 爵次

"爵次"是爵名的次序。

《汉书·百官公卿表》："爵一级曰公士，二上造，三簪裛、四不更，五大夫，……，二十彻侯。皆秦制。"

[8] 今有大夫、不更、簪裛、上造、公士，凡五人，……，问各得几何

本问既可用配分比例计算，也可按等差数列计算。

我国古代早已注意到等差数列问题。不只《九章算术》有此类问题，《周髀算经》、《孙子算经》、《张邱建算经》也都有所记载。《张邱建算经》还叙述了等差数列前 n 项和的求法及公差的求法。即：

$$S=\frac{(a_1+a_n)n}{2},\qquad d=\left(\frac{2s}{2}-2a_1\right)\div(n-1)。$$

[二] 今有牛、马、羊食人苗。苗主责之粟五斗。羊主曰:“我羊食半马。”马主曰:“我马食半牛。”今欲衰偿之,问各出几何[10]。

答曰:

牛主出二斗八升七分升之四。

马主出一斗四升七分升之二。

羊主出七升七分升之一。

术曰:置牛四、马二、羊一,各自为列衰,副并为法。以五斗乘未并者各自为实。实如法得一斗。臣淳风等谨按:此术问意,羊食半马,马食半牛,是谓四羊当一牛,二羊当一马。今术置羊一、马二、牛四者,通其率以为列衰。

[三] 今有甲持钱五百六十,乙持钱三百五十,丙持钱一百八十,凡三人俱出关,关税百钱。欲以钱数多少衰出之,问各几何。

答曰:

甲出五十一钱一百九分钱之四十一。

乙出三十二钱一百九分钱之一十二。

丙出一十六钱一百九分钱之五十六。

术曰:各置钱数为列衰,副并为法,以百钱乘未并者,各自为实,实如法得一钱。臣淳风等谨按:此术甲、乙、丙持钱数以为列衰,副并为所有率,未并者各为所求率,百钱为所有数,而今有之,即得。

[四] 今有女子善织,日自倍,五日织五尺。问日织几何[10]。

答曰:

初日织一寸三十一分寸之十九。

次日织三寸三十一分寸之七。

次日织六寸三十一分寸之十四。

次日织一尺二寸三十一分寸之二十八。

次日织二尺五寸三十一分寸之二十五。

术曰：置一、二、四、八、十六为列衰，副并为法，以五尺乘未并者各自为实，实如法得一尺。

[9] 于今有术，……，而今有之，即得

"于今有术"以下至注终，是解说本问也可以今有术进行计算。按照惯例并依殿本将此注移至术文"实如法得一鹿"之后。

在"今有术"上，依殿本校补一"于"字。

[10] 今有牛、马、羊食人苗，……今有女子善织，……

第二、四两问固然可以衰分术计算，但这类问题实即等比数列问题。

[五] 今有北乡算八千七百五十八[11]，西乡算七千二百三十六，南乡算八千三百五十六，凡三乡，发徭三百七十八人。欲以算数多少衰出之，问各几何。

答曰：

北乡遣一百三十五人一万二千一百七十五分人之一万一千六百三十七。

西乡遣一百一十二人一万二千一百七十五分人之四千四。

南乡遣一百二十九人一万二千一百七十五分人之八千七百九。

术曰：各置算数为列衰，臣淳风等谨按：三乡算数约，可半

者为列衰。副并为法，以所发傜人数乘未并者，各自为实，实如法得一人。按此术，今有之义也。

[11] 北乡算八千七百五十八

"算"是秦和西汉初期分配徭役与摊派赋税的计算单位，并非钱数。

《汉书·食货志》称："诸贾人，末作，……率缗钱二千而一算。诸作有租及铸率缗钱四千而一算。非吏比者、三老、北边骑士，轺车一算；商贾人轺车二算；船五丈以上一算。"李籍《音义》称："计口出钱。汉律，人出一算，一算百二十钱，贾与奴婢倍算。"

经文"八千七百五十八"是北乡的"算"数。余仿此。

[六] 今有禀粟，大夫、不更、簪裛、上造、公士，凡五人，一十五斗。今有大夫一人后来，亦当禀五斗。仓无粟，欲以衰出之，问各几何。

答曰：

大夫出一斗四分斗之一。

不更出一斗。

簪裛出四分斗之三。

上造出四分斗之二。

公士出四分斗之一。

术曰：各置所禀粟斛斗数，爵次均之，以为列衰，副并而加后来大夫亦五斗，得二十以为法。以五斗乘未并者各自为实。实如法得一斗。禀前五人十五斗者，大夫得五斗，不更得四斗，簪裛得三斗，上造得二斗，公士得一斗。欲令五人各依所得粟多少，减与后来大夫，即与前来大夫同。据前来大夫已得五斗，故言亦也。各以所得斗数为衰并得十五，而加后来大夫亦五斗，凡二十为法也。是为六人共出五斗，后来大夫亦俱损折。今有术副并为所有率，未并者各为所求率，五斗为所有

数，而今有之，即得。

［七］今有禀粟五斛，五人分之，欲令三人得三，二人得二。问各几何。

答曰：

三人，人得一斛一斗五升十三分升之五。

二人，人得七斗六升十三分升之十二。

术曰：置三人，人三；二人，人二；为列衰。副并为法。以五斛乘未并者，各自为实。实如法得一斛。

返衰[12]术曰：列置衰而令相乘，动者为不动者衰[13]。以爵次言之，大夫五，不更四。欲令高爵得多者，当使大夫一人受五分，不更一人受四分，人数为母，分数为子。母同则子齐，齐即衰也。故上衰分宜以五、四为列焉[14]。今此令高爵出少，则当使大夫五人共出一人分，不更四人共出一人分，故谓之返衰。人数不同，则分数不齐，当令母互乘子，母互乘子则动者为不动者衰也[15]。亦可先同其母，各以分母约其同，为返衰[16]。副并为法，以所分乘未并者各自为实，实如法而一[17]。

［12］返衰

所配比率的倒数，称为"返衰"。如 5:4:3:2:1 为列衰，而 $\frac{1}{5}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}:\frac{1}{1}$ 则称为返衰。

第七问的解法应是衰分术；第八、九两问当用返衰术进行计算。

［13］动者为不动者衰

所列的返衰一般为分数；母互乘子后之值称为"动者"，原来分数则称为"不动者"。设所列的返衰为：

$$\frac{b}{a},\ \frac{d}{c},\ \frac{f}{e},$$

母互乘子之值为：bce, dae, fac 称为"动者"，而 $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{f}{e}$ 称为

"不动者"。

"动者为不动者衰"，就是 bce，dae，fac 为 $\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$，$\frac{f}{e}$ 之列衰。即

$$\frac{b}{a}:\frac{d}{c}:\frac{f}{e}=\frac{bce}{ace}:\frac{dae}{cae}:\frac{fac}{eac}=bce:dae:fac。$$

[14] 人数为母，……，故上衰分宜以五、四为列焉

刘徽为了说明"返衰"，乃先以"大夫五，不更四"为例说明大夫一人与不更一人之衰。

因大夫、不更都是一人，故以 1 为分母，其爵次的比率为 5:4，即是以其衰为分子，则所得分数为：$\frac{5}{1}:\frac{4}{1}$。即"人数为母，分数为子"。故称"大夫一人受五分，不更一人受四分"。

上述分数 $\frac{5}{1}$，$\frac{4}{1}$ 的分母相同，分子相齐，因知 5:4 就是大夫、不更之衰。也即"母同则子齐，齐即衰也。故上衰分宜以五、四为列焉"。

[15] 人数不同，……，动者为不动者衰也

这段是说明如何推求返衰。

刘徽举例说"今此令高爵出少，则当使大夫五人共出一人分，不更四人共出一人分"。由于人数为母，分数为子，于是得：$\frac{1}{5}:\frac{1}{4}$。

又因"人数不同"，故母不同子不齐。于是"当令母互乘子，母互乘子则动者为不动者衰也"。即

$$\frac{1}{5}:\frac{1}{4}=\frac{4}{20}:\frac{5}{20}=4:5。$$

[16] 亦可先同其母，各以分母约其同，为返衰

刘徽给出求返衰的另一方法。若以上例为例，即是先使各分母相乘，即 $5\times4=20$，称为同，然后将同除以各分数的分母，得：

$20 \div 5 = 4$，$20 \div 4 = 5$，则以 4:5 为返衰。

[17] 以爵次言之，大夫五、不更四。……，实如法而一

这段是返衰术的注文，按照惯例应在术文之后，但传本误置于“术曰”之前。今依殿本将这段注文移至返衰术文之后。

[八] 今有大夫、不更、簪褭、上造、公士，凡五人，共出百钱。欲令高爵出少，以次渐多，问各几何。

答曰：

大夫出八钱一百三十七分钱之一百四。

不更出一十钱一百三十七分钱之一百三十。

簪褭出一十四钱一百三十七分钱之八十二。

上造出二十一钱一百三十七分钱之一百二十三。

公士出四十三钱一百三十七分钱之一百九。

术曰：置爵数各自为衰，而返衰之，副并为法。以百钱乘未并者各自为实。实如法得一钱。

[九] 今有甲持粟三升，乙持粝米三升，丙持粝饭三升。欲令合而分之，问各几何。

答曰：

甲二升一十分升之七。

乙四升一十分升之五。

丙一升一十分升之八。

术曰：以粟率五十、粝米率三十、粝饭率七十五为衰，而返衰之，副并为法。以九升乘未并者各自为实。实如法得一升。按此术三人所持升数虽等，论其本率，精粗不同。米率虽少，令最得多。饭率虽多，返使得少。故令返之，使精得多而粗得少。于

今有术，副并为所有率，未并者各为所求率，九升为所有数，而今有之，即得。

[一〇] 今有丝一斤[18]，价直二百四十。今有钱一千三百二十八，问得丝几何。

答曰：五斤八两一十二铢五分铢之四。

术曰：以一斤价数为法，以一斤乘今有钱数为实，实如法得丝数。按此术，今有之义，以一斤价为所有率，一斤为所求率，今有钱为所有数，而今有之，即得。

[18] 今有丝一斤，……

由第十问至章终各问，并非衰分问题，是简比例、复比例问题。按其类别宜列于粟米章。

李潢《九章算术细草图说》称："此下十一问，皆粟米术，与衰分无涉。疑《永乐大典》误收，纂《九章》者，承其误耳。"所见正确。今仍其旧贯。

[一一] 今有丝一斤，价直三百四十五。今有丝七两一十二铢，问得钱几何。

答曰：一百六十一钱三十二分钱之二十三。

术曰：以一斤铢数为法，以一斤价数，乘七两一十二铢为实，实如法得钱数。按此术亦今有之义。以丝一斤铢数为所有率，价钱为所求率，今有丝为所有数，而今有之，即得。

[一二] 今有缣一丈价，直一百二十八。今有缣一匹九尺五寸，问得钱几何。

答曰：六百三十三钱五分钱之三。

术曰：以一丈寸数为法，以价钱数乘今有缣寸数为实，实如法得钱数。臣淳风等谨按：此术亦今有之义。以缣一丈寸数为所有率，价钱为所求率，今有缣寸数为所有数，而今有之，即得。

[一三] 今有布一匹，价直一百二十五。今有布二丈七尺，问得钱几何。

答曰：八十四钱八分钱之三。

术曰：以一匹尺数为法，今有布尺数乘价钱为实，实如法得钱数。按此术亦今有之义。以一匹尺数为所有率，价钱为所求率，今有布为所有数，今有之，即得。

[一四] 今有素一匹一丈，价直六百二十五。今有钱五百，问得素几何。

答曰：得素一匹。

术曰：以价直为法，以一匹一丈尺数乘今有钱数为实，实如法得素数。按此术亦今有之义。以价钱为所有率，五丈尺数为所求率，今有钱为所有数，今有之，即得。

[一五] 今有与人丝一十四斤，约得缣一十斤。今与人丝四十五斤八两，问得缣几何。

答曰：三十二斤八两。

术曰：以一十四斤两数为法，以一十斤乘今有丝两数为实，实如法得缣数。此术亦今有之义。以一十四斤两数为所有率，一十斤为所求率，今有丝为所有数，今有之，即得。

[一六] 今有丝一斤，耗七两。今有丝二十三斤五两，问耗几何。

答曰：一百六十三两四铢半。

术曰：以一斤展十六两为法，以七两乘今有丝两数为实，实如法得耗数。按此术亦今有之义。以一斤为十六两为所有率，七两为所求率，今有丝为所有数，而今有之，即得。

[一七] 今有生丝三十斤，干之，耗三斤十二两。今有干丝一十二斤，问生丝几何。

答曰：一十三斤一十一两十铢七分铢之二。

术曰：置生丝两数，除耗数，余，以为法。余四百二十两，即干丝率。三十斤乘干丝两数为实。实如法得生丝数。凡所谓率者，细则俱细，粗则俱粗，两数相推而已。故品物不同，如上缣丝之比，相与为率。三十斤凡四百八十两。今生丝率四百八十两，干丝率四百二十两，则其数相通。可俱为铢，可俱为两，可俱为斤，无所归滞也。若然宜以所有干丝斤数，乘生丝两数为实。今斤两错互而亦同归者，使干丝以两数为率，生丝以斤数为率，譬之异类，亦各有一定之势。　臣淳风等谨按：此术，置生丝两数，除耗数，余即干丝之率，于今有术为所有率。三十斤为所求率。干丝两数为所有数。凡所谓率者，细则俱细，粗则俱粗。今以斤乘两者，干丝即以两数为率，生丝即以斤数为率，譬之异物，各有一定之率也。

［一八］今有田一亩，收粟六升太半升。今有田一顷二十六亩一百五十九步，问收粟几何。

答曰：八斛四斗四升一十二分升之五。

术曰：以亩二百四十步为法，以六升太半升乘今有田积步为实，实如法得粟数。按此术亦今有之义。以一亩步数为所有率，六升太半升为所求率，今有田积步为所有数，而今有之，即得。

［一九］今有取保一岁，价钱二千五百。今先取一千二百，问当作日几何。

答曰：一百六十九日二十五分日之二十三。

术曰：以价钱为法，以一岁三百五十四日乘先取钱数为实，实如法得日数。按此术亦今有之义。以价为所有率，一岁日数为所求率，取钱为所有数，而今有之，即得。

［二〇］今有贷人千钱，月息三十。今有贷人七百五十钱，九日归之，问息几何。

答曰：六钱四分钱之三。

术曰：以月三十日乘千钱为法。以三十日乘千钱为法者，得三万，是为贷人钱三万，一日息三十也。以息三十乘今所贷钱

数，又以九日乘之，为实。实如法得一钱。以九日乘今所贷钱为今一日所有钱，于今有术为所有数，息三十为所求率，三万钱为所有率。此又可以一月三十日约息三十钱，为十分一日，以乘今一日所有钱为实。千钱为法。为率者当等之于一也。故三十日或可乘本，或可约息，皆所以等之也。

九章算术卷第四

少广[1]以御积幂方圆

少广臣淳风等谨按：一亩之田广一步，长二百四十步。今欲截取其从多，以益其广，故曰少广[2]。术曰：置全步及分母子，以最下分母徧乘诸分子及全步，臣淳风等谨按：以分母乘全步者，通其分也。以母乘子者，齐其子也。各以其母除其子，置之于左。命通分者，又以分母徧乘诸分子及已通者，皆通而同之，并之为法。臣淳风等谨按：诸子悉通，故可并之为法。亦不宜用合分术，列数尤多，若用乘则算数至繁，故别制此术，从省约。置所求步数，以全步积分乘之为实。此以田广为法，以亩积步为实。法有分者，当同其母，齐其子，以同乘法实，而并齐于法。今以分母乘全步及子，子如母而一，并以并全法，则法实俱长，意亦等也。故如法而一，得从步数。实如法而一，得从步[3]。

[1] 少广

李籍《音义》称："广少，从多，截从之多，益广之少，故曰少广。"程大位《算法统宗》也称："此章如田，截从之多，益广之少，故曰少广。"若按字义而论，"少广"就是广少而从多，需截多以益少。

此处少广应理解为：由已知长方形面积或长方体体积求其一边的长。

[2] 今欲截取其从多，以益其广。

钱校本为："今欲截取其从少，以益其广"，于意欠通。今以意改为"今欲截取其从多，以益其广"。

[3] 少广术曰：置全步及分母子，……，得从步

以第四问为例，按术解说如次：

已知矩形面积为 1 亩 $=240$ 平方步，其宽为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ 步，求其长。

先求此形的宽边，再求其长边。“置全步及分母子”，即是将宽边步数按上下排列起来(图 1)。

“以最下分母徧乘诸分子及全步”，就是以最下分母 5 乘各分数的分子，其积都得 5 (图 2)。

“各以其母除其子，置之于左”。即是各分子乘以 5 后，分别除

图 1	图 2	图 3	图 4
1,	5,	20,	60,
$\frac{1}{2}$,	$\frac{5}{2}$,	$\frac{20}{2}=10$,	30,
$\frac{1}{3}$,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{20}{3}$,	20,
$\frac{1}{4}$,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{20}{4}=5$,	15,
$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{5}=1$	$\frac{20}{5}=4$	12

以其分母，则得：5，$\frac{5}{2}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{5}{5}$。这里可理解为：若将 1 扩大 5 倍时，则 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$ 各相当于 $\frac{5}{2}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{5}{5}$。

“命通分者，又以分母徧乘诸分子及已通者，皆通而同之，并之为法”。就是按上述逐次以分母乘各分子：先以 4 乘各分子，再除以其分母(图 3)；以 3 乘各分子，再除以其分母；等等。直至各分数化为整数时为止。这样，最后得各数为 60，30，20，15，12 (图 4)。可理解为：若将 1 扩大 60 倍时，则 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$ 各相当于 30，20，15，12。然后以相加之和

$$60+30+20+15+12=137$$

作为除数。

137是$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$和的分子，而60则是1，2，3，4，5的最小公倍数，可做为和的分母。因得：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}。$$

“置所求步数，以全步积分乘之为实。实如法而一，得从步”。将1亩的平方步数240乘以公分母60，作为被除数，除以137。按术计算，即得：

$$240\times 60\div 137=105\frac{15}{137},$$

是此矩形的长边。

在本章之前通分时，是以各数分母的连乘积做为公分母，此处则是用这种算法求得公分母。以最小公倍数做为各分数的公分母，在数学的发展中是一大进步。我国使用的这一算法，虽然不是求最小公倍数的标准算法，但是，它离标准算法却接近了许多。这一点是非常珍贵的。

[一] 今有田广一步半。求田一亩，问从几何。

答曰：一百六十步。

术曰：下有半，是二分之一。以一为二，半为一，并之得三，为法。置田二百四十步，亦以一为二乘之，为实。实如法得从步。

[二] 今有田广一步半、三分步之一。求田一亩，问从几何。

答曰：一百三十步一十一分步之一十。

术曰：下有三分，以一为六，半为三，三分之一为二，并之得一十一为法。置田二百四十步，亦以一为六乘之，为实。实如法得从步。

[三] 今有田广一步半、三分步之一、四分步之一。求田一亩，问从几何。

答曰：一百一十五步五分步之一。

术曰：下有四分，以一为一十二，半为六，三分之一为四，四分之一为三，并之得二十五，以为法。置田二百四十步，亦以一为一十二乘之，为实。实如法而一，得从步。

[四] 今有田广一步半、三分步之一、四分步之一、五分步之一。求田一亩，问从几何。

答曰：一百五步一百三十七分步之一十五。

术曰：下有五分，以一为六十，半为三十，三分之一为二十，四分之一为一十五，五分之一为一十二，并之得一百三十七，以为法。置田二百四十步，亦以一为六十乘之，为实。实如法得从步。

[五] 今有田广一步半、三分步之一、四分步之一、五分步之一、六分步之一。求田一亩，问从几何。

答曰：九十七步四十九分步之四十七。

术曰：下有六分，以一为一百二十[4]，半为六十，三分之一为四十，四分之一为三十，五分之一为二十四，六分之一为二十，并之得二百九十四，以为法。置田二百四十步，亦以一为一百二十乘之，为实。实如法得从步。

[4] 以一为一百二十

此处以一为六十即可，因 1，2，3，4，5，6 的最小公倍数是

60，不是 120。

“以一为一百二十，半为六十，…… 亦以一为一百二十乘之，……”。可能在运算中，未将 $\frac{6}{4}$ 约分所致。

[六] 今有田广一步半、三分步之一、四分步之一、五分步之一、六分步之一、七分步之一。求田一亩，问从几何。

答曰：九十二步一百二十一分步之六十八。

术曰：下有七分，以一为四百二十，半为二百一十，三分之一为一百四十，四分之一为一百五，五分之一为八十四，六分之一为七十，七分之一为六十，并之得一千八十九，以为法。置田二百四十步，亦以一为四百二十乘之，为实。实如法得从步。

[七] 今有田广一步半、三分步之一、四分步之一、五分步之一、六分步之一、七分步之一、八分步之一。求田一亩，问从几何。

答曰： 八十八步七百六十一分步之二百三十二。

术曰：下有八分，以一为八百四十，半为四百二十，三分之一为二百八十，四分之一为二百一十，五分之一为一百六十八，六分之一为一百四十，七分之一为一百二十，八分之一为一百五，并之得二千二百八十三，以为法。置田二百四十步，亦以一为八百四十乘之，为实。实如法得从步。

[八] 今有田广一步半、三分步之一、四分步之一、五分步之一、六分步之一，七分步之一，八分步之一、九分步之一。求田一亩，问从几何。

答曰： 八十四步七千一百二十九分步之五千九百六十四。

术曰：下有九分，以一为二千五百二十，半为一千二百六十，三分之一为八百四十，四分之一为六百三十，五分之一为五百四，六分之一为四百二十，七分之一为三百六十，八分之一为三百一十五，九分之一为二百八十，并之得七千一百二十九，以为法。置田二百四十步，亦以一为二千五百二十乘之，为实。实如法得从步。

[九] 今有田广一步半，三分步之一、四分步之一、五分步之一、六分步之一、七分步之一、八分步之一、九分步之一、十分步之一。求田一亩，问从几何。

答曰： 八十一步七千三百八十一分步之六千九百三十九。

术曰：下有一十分，以一为二千五百二十，半为一千二百六十，三分之一为八百四十，四分之一为六百三十，五分之一为五百四，六分之一为四百二十，七分之一为三百六十，八分之一为三百一十五，九分之一为二百八十，十分之一为二百五十二，并之得七千三百八十一，以为法。置田二百四十步，亦以一为二千五百二十乘之，为实。实如法得从步。

[一〇] 今有田广一步半、三分步之一、四分步之一、五分

步之一、六分步之一、七分步之一、八分步之一、九分步之一、十分步之一、十一分步之一。求田一亩，问从几何。

答曰：七十九步八万三千七百一十一分步之三万九千六百三十一。

术曰：下有一十一分，以一为二万七千七百二十，半为一万三千八百六十，三分之一为九千二百四十，四分之一为六千九百三十，五分之一为五千五百四十四，六分之一为四千六百二十，七分之一为三千九百六十，八分之一为三千四百六十五，九分之一为三千八十，一十分之一为二千七百七十二，一十一分之一为二千五百二十，并之得八万三千七百一十一，以为法。置田二百四十步，亦以一为二万七千七百二十乘之，为实。实如法得从步。

[一一] 今有田广一步半、三分步之一、四分步之一、五分步之一、六分步之一、七分步之一、八分步之一、九分步之一、十分步之一、十一分步之一、十二分步之一。求田一亩，问从几何。

答曰：七十七步八万六千二十一分步之二万九千一百八十三。

术曰：下有一十二分，以一为八万三千一百六十[5]，半为四万一千五百八十，三分之一为二万七千七百二十，四分之一为二万七百九十，五分之一为一万六千六百三十二，六分之一为一万三千八百六十，七分之一为一万一千八百八十，八分之一为一万三百

九十五，九分之一为九千二百四十，一十分之一为八千三百一十六，十一分之一为七千五百六十，十二分之一为六千九百三十，并之得二十五万八千六十三，以为法。置田二百四十步，亦以一为八万三千一百六十乘之，为实。实如法得从步。臣淳风等谨按：凡为术之意，约省为善。宜云下有一十二分，以一为二万七千七百二十。半为一万三千八百六十，三分之一为九千二百四十，四分之一为六千九百三十，五分之一为五千五百四十四，六分之一为四千六百二十，七分之一为三千九百六十，八分之一为三千四百六十五，九分之一为三千八十，十分之一为二千七百七十二，十一分之一为二千五百二十，十二分之一为二千三百一十，并之得八万六千二十一，以为法。置田二百四十步，亦以一为二万七千七百二十乘之，以为实，实如法得从步。其术亦得，知不繁也。

[5] 以一为八万三千一百六十

李淳风指出："凡为术之意，约省为善。宜云下有一十二分，以一为二万七千七百二十，……。"所见正确，因 1，2，3，4，……，12 的最小公倍数是 27720，不是 83160。

[一二] 今有积五万五千二百二十五步。问为方几何。

答曰：二百三十五步。

[一三] 又有积二万五千二百八十一步。问为方几何。

答曰：一百五十九步。

[一四] 又有积七万一千八百二十四步。问为方几何。

答曰：二百六十八步。

[一五] 又有积五十六万四千七百五十二步四分步之一。问为方几何。

答曰：七百五十一步半。

[一六] 又有积三十九亿七千二百一十五万六百二十五

步。问为方几何。

答曰：六万三千二十五步。

开方[6]求方幂之一面也。术曰：置积为实。借一算步之，超一等。言百之面十也，言万之面百也。议所得，以一乘所借一算为法，而以除[7]。先得黄甲之面，上下相命，是自乘而除也。除已，倍法为定法。倍之者，豫张两面朱幂定袤，以待复除，故曰定法。其复除，折法而下[8]。欲除朱幂者，本当副置所得成方。倍之为定法，以折、议、乘而以除。如是当复步之而止，乃得相命，故使就上折下。复置借算步之如初，以复议一乘之，欲除朱幂之角黄乙之幂，其意如初之所得也。所得副，以加定法，以除[9]。以所得副从定法。再以黄乙之面加定法者，是则张两青幂之袤。复除折下如前[10]。若开之不尽者为不可开，当以面命之[11]。术或有以借算加定法而命分者，虽粗相近，不可用也。凡开积为方，方之自乘当还复其积分。令不加借算而命分，则常微少。其加借算而命分，则又微多[12]。其数不可得而定。故惟以面命之，为不失耳。譬犹以三除十，以其余为三分之一，而复其数可举[13]。不以面命之，加定法如前，求其微数。微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细，则朱幂虽有所弃之数，不足言之也[14]。若实有分者，通分内子为定实。乃开之，讫，开其母报除。臣淳风等谨按：分母可开者，并通之积先合二母。既开之后一母尚存，故开分母求一母为法，以报除也。若母不可开者，又以母乘定实，乃开之，讫，令如母而一[15]。臣淳风等谨按：分母不可开者，本一母也。又以母乘之，乃合二母。既开之后，亦一母存焉。故令如母而一，得全面也。　又按此术："开方"者，求方幂之一面也。"借一算"者假借一算，空有列位之名，而无除积之实。方隅得面，是故借算列之于下也。"步之超一等"者，方十自乘其积有百，方百自乘其积有万，故超位至百而言十，至万而言百也。"议所得，以一乘所借一算为法，而以除"者，先得黄甲之面，以方为积者两相乘。故开方除之，还令两面上下相命，是自乘而除之也。"除已，倍法而定法"者，实积未尽，当复更除，故豫张两面朱幂定袤，以待复除，故曰定法也。"其复除，折法而下"者，欲除朱幂，本当副置所得成方，倍之为定法，以折、议、乘之而以除，如是当复步之而止，乃得相命，故使就上折之而下也。"复置借算步

之如初，以复议一乘之，所得副，以加定法，以除”者，欲除朱幂之角、黄乙之幂。“以所得副从定法”者，再以黄乙之幂加定法，是则张两青幂之袤，故如前开之，即合所问。

［6］开方

此处“开方”是开平方。注文“求方幂之一面也”是说由正方形面积求其一边之长。

［7］置积为实。……，以一乘所借一算为法，而以除

“实”是被开方数。“借一算”即是借一算筹用以定位。如李淳风注称：“假借一算，空有列位之名，而无除积之实”。“步之”是指所借的算筹一步一步地移动。“一等”即是数位的一位。《张邱建算经》不称“等”而称为“位”。“超一等”就是使所借的算筹由个位越过十位移至百位，或由百位越过千位移至万位，与笔算开方中分节相当。又因 100 的平方根为 10，10000 的平方根为 100，故借算移至百位，其平方根应为十位，借算移至万位，其平方根应为百位。即注文所说：“言百之面十也，言万之面百也”。

商					
实	5	5	2	2	5
法					
借算					1

图 5

“议所得”在这里是指议得初商。“一乘”即是乘一次。“而以除”的“除”字是作减解释。

今以第十二问为例注释如下：

“置积为实”，将被开方数 55225 置于“实”。其布式如图 5。

“借一算步之，超一等”，使所借的算筹由右向左移动，每移一次超一位，共移两次至万位止。如图 6。

因“实”的万位数字为 5，而且 $2^2 < 5 < 3^2$，故议得初商为 2，

商					
实	5	5	2	2	5
法					
借算	1				

图 6

商			2		
实	5	5	2	2	5
法					
借算	1				

图 7

商	2
实	5 5 2 2 5
法	2
借算	1

图 8

商	2
实	1 5 2 2 5
法	2
借算	1

图 9

由于借算在万位，应置初商 2 于百位。如图 7 。

以初商 2 乘所借算一次为 20000，置于“实”下为“法”。即“以一乘所借一算为法”。如图 8 。

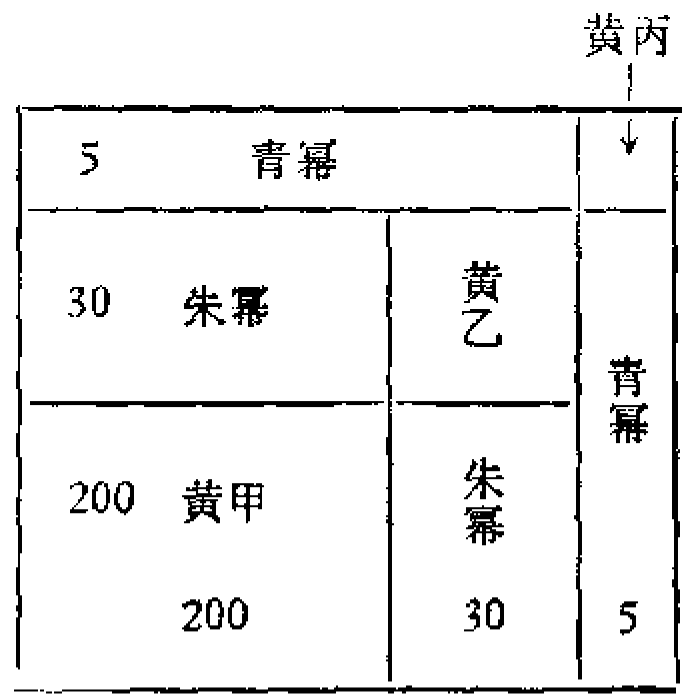


图 10

以初商 2 乘“法” 20000 得 40000，由“实”减去得： 55225—40000 = 15225。即是“而以除”。如图 9 。

根据刘注，按戴震所补的图，将上述计算步骤注释如次：如图 10，设正方形的面积为 55225，议得黄甲的边为 200，也即商的百位数字为 2 。“上(商、2)下(法、20000)相命”，即 $2 \times 20000 = 40000$，也可看作黄甲的一边自乘 $200^2 = 40000$。由正方形面积减去黄甲之差 $55225 - 40000 = 15225$，为朱幂、青幂、黄乙、黄丙的和。即“自乘而除也”。

若设 a, b, c 分别是 55225 平方根的百、十、个位数字，乃有：

$$\sqrt{55225} = 100a + 10b + c,$$

或

$$55225 = (100a + 10b + c)^2 = 10000a^2 + 1000(2ab) + 100(b^2 + 2ac) + 10(2bc) + c^2。$$

求得初商 $a = 2$，则得：

$$55225 - 10000a^2 = 1000(2ab) + 100(b^2 + 2ac) + 10(2bc) + c^2,$$

或

$$55225-40000=15225=(4000+100b)b+400c+10(2bc)+c^2。$$

[8] 除已，倍法为定法。其复除，折法而下

商			2		
实	1	5	2	2	5
法		4			
借算			1		

图 11

由“实”减 40000 后，取法数 2 的二倍 4 称为“定法”。并向右移至千位以表示 4000。今欲求平方根的十位数字，也须移借算于百位。即术文：“除已，倍法为定法。其复除，折法而下。”如图 11。

如上注所述，既减去黄甲，所余为朱幂、青幂及黄乙、黄丙的和。今欲求朱幂的宽，故须二倍朱幂的长以试除。即注文“倍之者，豫张两面朱幂定袤，以待复除，故曰定法”。如图 12。

由上式：

$$15225=(4000+100b)b+400c+10(2bc)+c^2$$

可知其中 $(4000+100b)b=(400+10b)\cdot 10b$ 是二朱幂与黄乙的和。二朱幂的长为 400，其宽为 $10b$，黄乙的一边长为 $10b$。

注文“所得成方，倍之为定法，以折、议、乘而以除”。就是将所得 200 可看作朱幂的长，倍之 $2\times 200=400$ 为定法。以 $10b$ 为朱幂的宽，然后以 b 试除，可得次商。

注文“所得成方”不误。钱校本改为“所得乘方”，似不妥当。

[9] 复置借算步之如初，……，以加定法，以除

欲求平方根的十位数字，需置借算于百位。因“实”的千位数字为 15，且 $4\times 3<15<4\times 4$，乃议得次商为 3。置 3 于商的十位。以次商 3 乘借算得 $3\times 100=300$ 与定法相加为 $4000+300=4300$。再乘以次商，则得：$3\times 4300=12900$，由“实”减去得：

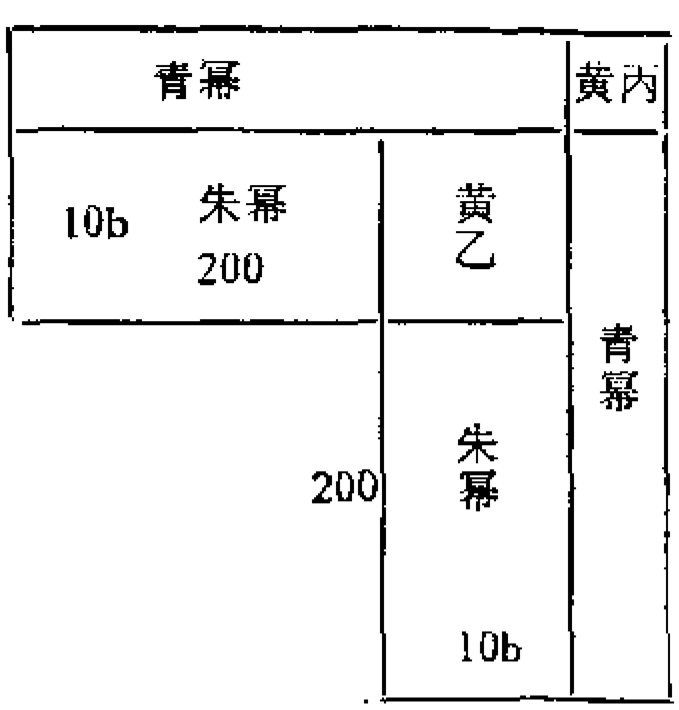


图 12

$$15225-12900=2325。$$

即术文所说："以复议一乘之，所得副，以加定法，以除。"如图 13。

由上所述可知，求得朱幂的宽为 30，于是二朱幂与黄乙的和为：

$$(2\times 200+30)\times 30=(4000+300)\times 3=12900$$

而 $15225-12900=2325$ 所余乃是二青幂与黄丙的和（图 14）。求得次商 $b=3$ 后，乃有：

$$15225-12900=2325=400c+10(2bc)+c^2,$$

即

$$2325=(400+60+c)c。$$

商	2 3
实	2 3 2 5
法	4 3
借算	1

图 13

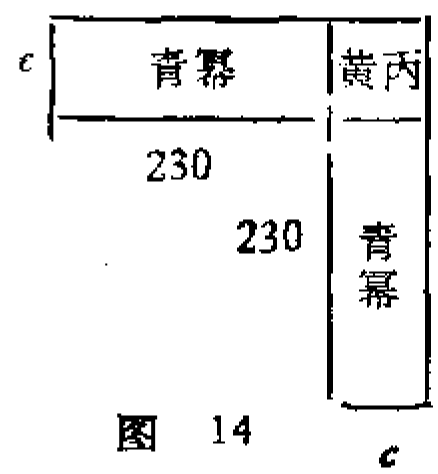


图 14

［10］以所得副从定法。复除折下如前

商	2 3
实	2 3 2 5
法	4 6
借算	1

图 15

商	2 3 5
实	2 3 2 5
法	4 6 5
借算	1

图 16

商	2 3 5
实	
法	4 6 5
借算	1

图 17

因青幂的长是 $200+30=230$，二青幂的长共为 460，也可看作 $430+30=460$。即"以所得副从定法"为定法。如注文说："再以黄乙之面加定法者，是则张两青幂之袤。"

欲求平方根的个位数字，故"复除折下如前"。也即"议所得，以一乘所借一算为法，而以除"。

将借算移至个位，因十位以上数字为 232，且 $46\times 5<232<46\times 6$，于是议得三商为 5，置三商于个位，以借算一乘，所得与

定法相加，即 $460+5=465$，以三商 5 与之相乘，得 $465\times5=2325$，由“实”减之适尽。也即求得平方根为 235。如图 15，16，17。

由上述可知，求得青幂的宽为 5，则得二青幂及黄丙的和为：

$$(2\times200+2\times30+5)\times5=(400+60+5)\times5$$
$$=(460+5)\times5=2325。$$

因与所余相等，故知方幂 55225 的一边为 235。

[11] 若开之不尽者，为不可开，当以面命之

若被开方的数非完全平方数，则开方不尽而有余，古代称为“不可开”。

若仅就字义而论，“以面命之”当是以“面”数而命分。即 $\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{a}$。如同李潢所说：“以面为母，以余为子。”这一说法显然是不合理的。李俨认为“以面命之”即是：

$$\sqrt{a^2+r}=a\cdots\cdots\text{余 } r.$$

所列等式虽是合理的，但恐未必符合《九章算术》的原意。

在其它古籍如《周髀算经》及《夏侯阳算经》中，对于开方不尽时，只有“有奇”或“奇”字样，而没有“以面命之”或“以奇命之”的词句。对于“有奇”或“奇”应理解为：

$$\sqrt{a^2+r}=a\cdots\cdots\text{奇 } r。$$

可是对于《九章算术》的“以面命之”究竟如何理解，似有进一步探讨的必要。

[12] 术或有以借算加定法而命分者，……，则又微多

古代对于非完全平方数平方根的近似值一般有两种取法：“以借算加定法而命分”即“加借算而命分”以及“不加借算而命分”。即

$$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1}，\quad 及 \quad \sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a}。$$

刘徽指出：“凡开积为方，方之自乘当还复其积分。”于是说前者“微多”，后者“微少”。即

$$a+\frac{r}{2a+1}<\sqrt{a^2+r}<a+\frac{r}{2a}。$$

今证明如下：因 $\frac{r^2}{4a^2}>0$，

故

$$a^2+r+\frac{r^2}{4a^2}>a^2+r,$$

开方得：

$$a+\frac{r}{2a}>\sqrt{a^2+r}。$$

可见嫌分母$2a$“微少”。若以 $2a+1$ 为分母，又嫌其“微多”。

因 $$a^2<a^2+r<(a+1)^2$$

故

$$r<(a+1)^2-a^2=2a+1,$$

而

$$\left(a+\frac{r}{2a+1}\right)^2=a^2+r-\frac{[(2a+1)-r]r}{(2a+1)^2}<a^2+r,$$

于是

$$\sqrt{a^2+r}>a+\frac{r}{2a+1}。$$

[13] 其数不可得而定。……，而复其数可举

若以 $2a$ 而命分，“则常微少”。若以 $2a+1$ 而命分，“则又微多”。可见“其数不可得而定”。

若理解“以面命之”为

$$\sqrt{a^2+r}=a\cdots\cdots余\ r,$$

则既不“微多”，又不“微少”，即是“为不失耳”。

若理解“以面命之”为

$$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{a},$$

这一等式显然是错误的。而刘徽却举例说："譬犹以三除十，以其余为三分之一，而复其数可举。"即是：

$$10 \div 3 = 3 + \frac{1}{3}。$$

可以用逆运算求得其原数来证明这种方法是正确无误的：

$$3 \times 3 + 1 = 10。$$

据此，可以看出，刘徽既正确地认为

$$a + \frac{r}{2a+1} < \sqrt{a^2+r} < a + \frac{r}{2a},$$

如果理解"以面命之"为 $\sqrt{a^2+r} = a \cdots$ 余 r，则刘徽又正确地认为 $\sqrt{a^2+r} = a \cdots$ 余 r "为不失耳"。如果理解"以面命之"为 $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{a}$，则却又错误地认为 $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{a}$ "为不失耳"。他还错误地以除不尽的情况解说开方不尽的情况。

刘徽的原意究竟如何，实难考核。因而这里不当过于强说。

[14] 不以面命之，……，不足言之也

对于开方不尽的数，刘徽给出求平方根近似值的另一方法，即是继续开方，求其微数。逐次以微数为分子，并分别以十、百等数为分母。即"其一退以十为母，其再退以百为母"。余类推。则"退之弥下，其分弥细"。迨开到某位为止时，虽弃其所余（朱幂），而误差很小，即"不足言之也"。

应该指出，这段注文不仅有极限观念，还有小数概念。至于小数，一般说是鲁道夫 (C. Rudolff) 于 1530 年和斯台汶 (S. Stevin 1548—1620) 于 1585 年较先创立并使用小数的，众所周知，在其百余年前，阿尔·卡西 (Al-Kashi) 于 1427 年就曾用过小数。其实最早建立小数概念的应归功于刘徽。刘徽创立小数概念后，可能未曾引起人们注意，以至埋没多年。

[15] 若实有分者，……，讫，令如母而一

对于分数开平方，《九章算术》给出两种方法，即：

$\sqrt{\frac{a}{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{b}$，$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$。

若被开方数为分数，且分母为完全平方数，如分母为 b^2，可看作是由二母 b 所合成，既开之后，则有一母，故李注说："一母尚存。"即 $\sqrt{\frac{a}{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{b}$。

若分母非完全平方数，李注说："本一母也"则分子、分母都乘以分母，化为"合二母"。既开之后，"亦一母存焉"。这就是现今所谓化分母为有理式。即 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$。

［一七］今有积一千五百一十八步四分步之三。问为圆周几何。

答曰：一百三十五步。于徽术，当周一百三十八步一十分步之一。　臣淳风等谨按：此依密率为周一百三十八步五十分步之九。

［一八］今有积三百步。问为圆周几何。

答曰：六十步。于徽术，当周六十一步五十分步之十九。臣淳风等谨按：依密率，为周六十一步一百分步之四十一。

开圆术曰[16]：置积步数，以十二乘之，以开方除之，即得周。此术以周三径一为率，与旧圆田术相返覆也[17]。于徽术以三百一十四乘积，如二十五而一，所得，开方除之，即周也。开方除之即径。是为据见幂以求周，犹失之于微少。其以二百乘积，一百五十七而一，开方除之即径，犹失之于微多。　臣淳风等谨按：此注于徽术，求周之法，其中不用"开方除之即径"六字，今本有者衍賸也。依密率八十八乘之，七而一。按周三径一之率，假令周六径二，半周半径相乘得幂三，周六自乘得三十六，俱以等数除幂，得一周之数十二也。其积本周自乘合以一乘之，十二而一，得积三也。术为一乘不长，故以十二而一得此积。今还原置此积三，以十二乘之，复其本周自乘之数。凡物自乘，开方除之，复其本数。故开方除之即周。

［16］开圆术

由圆面积求直径或圆周的方法，称为“开圆术”。

[17] 与旧圆田术相返复也

方田章圆田术是由圆周 (C) 推求面积 (S) 的方法，即：

$$S=\frac{C^2}{4\pi}=\frac{C^2}{12}。$$

此处则是根据圆面积 (S) 以求圆周 (C)。这两种是互为逆运算，故注称“相返复也”。即

$$C=\sqrt{4\pi S}=\sqrt{12S}。$$

[一九] 今有积一百八十六万八百六十七尺。此尺谓立方之尺也。凡物有高深而言积者，曰立方。问为立方几何。

答曰：一百二十三尺。

[二〇] 今有积一千九百五十三尺八分尺之一。问为立方几何。

答曰：一十二尺半。

[二一] 今有积六万三千四百一尺五百一十二分尺之四百四十七。问为立方几何。

答曰：三十九尺八分尺之七。

[二二] 又有积一百九十三万七千五百四十一尺二十七分尺之一十七。问为立方几何。

答曰：一百二十四尺太半尺。

开立方[18]立方适等，求其一面也。术曰：置积为实。借一算步之，超二等。言千之面十，言百万之面百。议所得，以再乘所借一算为法，而除之[19]。再乘者亦求为方幂，以上议命而除之，则立方等也。除已，三之为定法[20]。为当复除，故豫张三面，以定方幂为定法也。复除，折而下[21]。复除者，三面方幂以皆自乘之数，须得折、议，定其厚薄尔。开平幂者方百之面十，开立幂者方千之面十。据

定法已有成方之幂，故复除当以千为百，折下一等也。以三乘所得数置中行。设三廉之定长。复借一算置下行。欲以为隅。方立方等未有定数，且置一算定其位。步之，中超一，下超二等[22]。上方法，长自乘而一折。中廉法，但有长故降一等。下隅法，无面长故又降一等也。复置议，以一乘中，为三廉备幂也。再乘下，令隅自乘为方幂也，皆副以加定法。以定法除[23]。三面、三廉、一隅皆已有幂，以上议命之而除去三幂之厚也。除已，倍下、并中从定法。凡再以中，三以下，加定法者，三廉各当以两面之幂，连于两方之面，一隅连于三廉之端，以待复除也。言不尽意，解此要当以棊，乃得明耳。复除，折下如前[24]。开之不尽者，亦为不可开。术亦有以定法命分者，不如故幂开方，以微数为分也。若积有分者，通分内子为定实。定实乃开之，讫，开其母以报除。臣淳风等按：分母可开者，並通之积先合三母。既开之后，一母尚存，故开分母，求一母为法，以报除也。若母不可开者，又以母再乘定实，乃开之。讫，令如母而一[25]。臣淳风等谨按：分母不可开者，本一母也。又以母再乘之，令合三母，既开之后，一母犹存，故令如母而一，得全面也。　　按开立方者，立方适等，求其一面之数也。"借一算步之，超二等"者，立方求积，方再自乘。就积开之，故超二位，言千之面十，言百万之面百也。"议所得，以再乘所借一算为法，而以除"者，求为方幂，以议命之而除，则立方等也。"除已，三之为定法"者，为积未尽，当复更除。故豫张三面已定方幂为定法也。"复除，折而下"者，三面方幂皆已有自乘之数，须得折、议，定其厚薄。据开平方百之面十，其开立方即千之面十。而定法已有成方之幂，故复除之当以千为百，折下一等也。"以三乘所得数置中行"者，设三廉之定长也。"复借一算置下行"者，欲以为隅。方立方等未有数，且置一算定其位也。"步之，中超一，下超二"者，上方法长自乘而一折，中廉法但有长故降一等，下隅法无面长故又降一等也。"复置议以一乘中"者，为三廉备幂也。"再乘下"者，当令隅自乘为方幂也。"皆副以加定法，以定法除"者，三面三廉一隅皆已有幂，以上议命之而除去三幂之厚也。"除已，倍下，并中从定法"者，三廉各当以两面之幂连于两方之面，一隅连于三廉之端，以待复除也。其开之不尽者，折下如前，开方即合所问。有分者，通分内子开之。讫，开其母以报除。可开者，以通分之积先合三母，既开之后，一母尚存。故开分母者求一母为法以报除。若母不可开者，又以母再乘定实，乃开之。讫，令如母而一。分母不可开者本一母，又以母再乘，令合三母。既开之后，亦一母尚存。故令如母而一，得全面也。

［18］开立方

由正方体体积，推求其一棱的长，称为“开立方”。如刘注：“立方适等，求其一面也”。

［19］置积为实。借一算步之，超二等。……，而除之

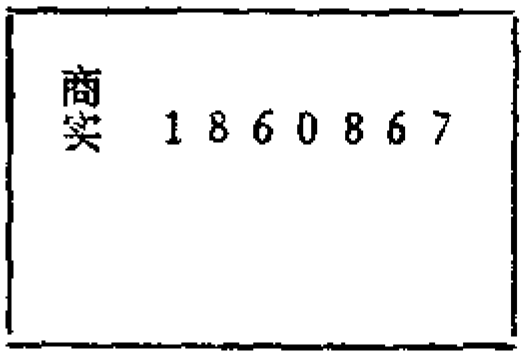


图 18

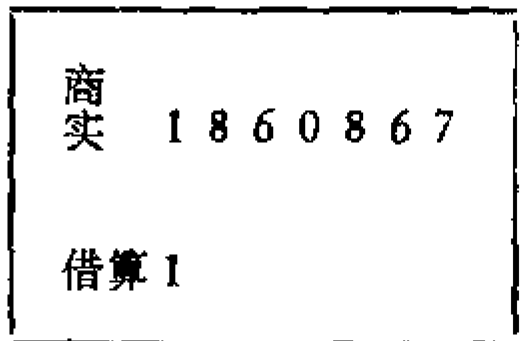


图 19

“积”是被开立方数，称为实。如第十九问，置 1860867，如图 18。即“置积为实”。

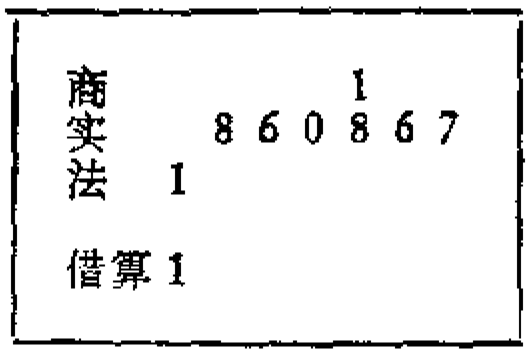


图 20

“借一算步之，超二等”。借一算筹置于“实”之下，由个位起向左移至千位，再移至百万位，每移一步应超两位，即“超二等”。与现今开立方的分节相当。如图 19。刘注“言千之面十，言百万之面百”。是说借算在千位，商在十位，借算在百万位，商在百位。

“议所得，以再乘所借一算为法，而除之。”因实的百万数字为 1，议得初商数字为 1。又因借算居于百万位，故置初商数字 1 于百位。

以初商 1 两次乘借算 1000000 得 $1000000 \times 1 \times 1 = 1000000$ 称为法。以议得的初商 1 乘法，由实减去得：$1860867 - 1000000 \times 1 = 860867$。如图 20。即注文“再乘者亦求为方幂，以上议命而除之，则立方等也”。按图形说，就是由原正方体内减去棱长为 100 的正方体(图 21，22)。

因积数 1860867 为正方体体积，设 a，b，c 分别为其边长的百、十、个位数字。故有：

$$\sqrt[3]{1860867} = 100a + 10b + c,$$

或 $1860867 = 1000000a^3 + 100000(3a^2b) + 10000(3a^2c + 3ab^2) + 1000(6abc + b^3) + 100(3ac^2 + 3b^2c) + 10(3bc^2) + c^3$。

"议所得"即是求得 $a = 1$，"以再乘所借一算为法，而以除"。

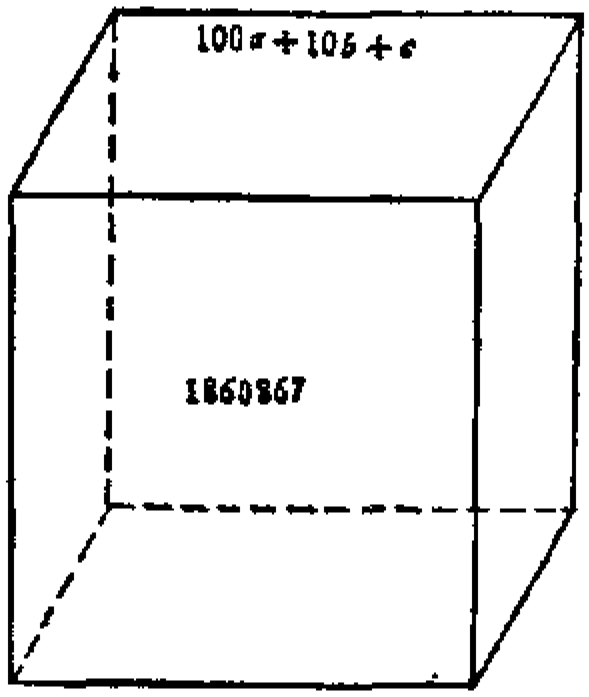


图 21

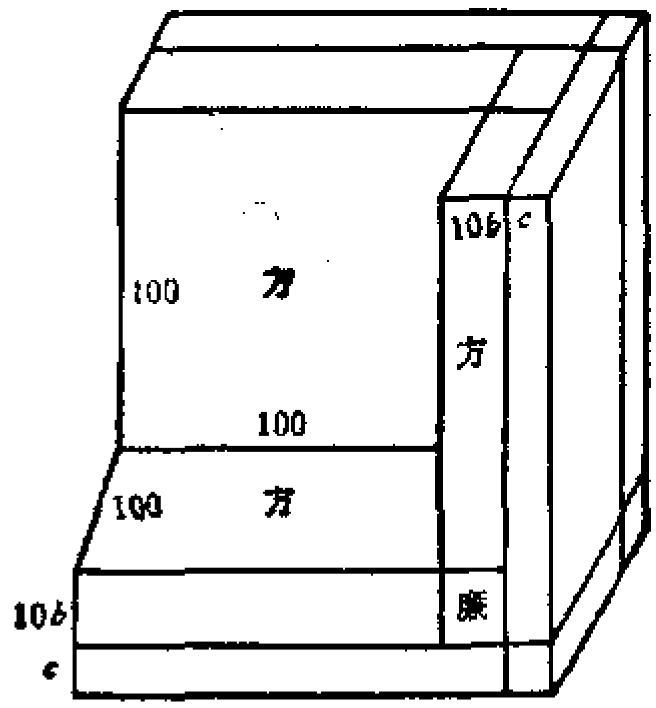


图 22

即：$1860867 - (1000000 \times 1^2) \times 1 = 100000(3a^2b) + 10000(3a^2c + 3ab^2) + 1000(6abc + b^3) + 100(3ac^2 + 3b^2c) + 10(3bc^2) + c^3$。

[20] 除已，三之为定法

由实 1860867 减 1000000 得 860867，然后以 3 乘法

商				1		
实	8	6	0	8	6	7
法	3					
借算	1					

图 23

商				1		
实	8	6	0	8	6	7
法	3					
借算			1			

图 24

$(1000000 \times 1 \times 1)$，退一位称为"定法" 300000，"定法"乃是豫张三面，以定方幂为定法也"。如图 23。

由正方体减去棱长为 100 的正方体后其余部分是由六个"方"、六条"廉"及两个"隅"所组成(如图 22)。

在底面为 $100 \times 100 = 10000$ 厚为 $10b$ 的三个"方"，底为 $10b \times 10b = 100b^2$ 高为 100 的三条"廉"，以及棱长为 $10b$ 的一个"隅"中，为了推求其体积，便把三方之积：

$$100 \times 100 \times 10b \times 3 = 100000b \times 3 = 300000b,$$

置于“实”之下称为“定法”。

商				1		
实	8	6	0	8	6	7
法	3					
中行		3				
下行			1			
借算			1			

图 25

[21] 复除，折而下

如注文所说：“复除者，三面方幂以皆自乘之数，须得折、议，定其厚薄尔。”即是说：三个“方”的底面积皆有自乘之数 100×100，故须使“定法”折而下，置 3 于十万位。

注文说“开立幂者方千之面十”，欲“议定其厚薄”，即是求立方根的十位数字，须使借算移至千位。如图 24。

[22] 以三乘所得数置中行。……，中超一，下超二等

因三条“廉”的体积为：

$$100 \times 10b \times 10b \times 3 = 10000b^2 \times 3 = 30000b^2,$$

故置于“中行”，称为“三廉之定长”或“廉法”。

因一“隅”的体积为：$10b \times 10b \times 10b = 1000b^3$，故置于“下行”，“下行”乃表示“隅法”。如图 25。

欲求三“方”的体积，乃“三之为定法”，又因每“方”都只有长边 100 自乘之数，故需退一位至十万位。即注文“上方法，长自乘而一折”。乃得 300000。

此处欲求三“廉”、一“隅”的体积，即“三乘所得数置中行”，称为“廉法”，又“借一算置下行”为“隅法”。因每“廉”只有一长边 100，故退一位至万位。因“隅”无长边，故再退一位至千位。即注文“中廉法，但有长故降一等。下隅法，无面长故又降一等也”。

术文“中超一，下超二等”之“超”应作退位解。即中行的数退一位称为“廉法”，下行的数退两位称为“隅法”。

据此，上注的等式可写为：

$$\begin{aligned}860867 = {} & (300000 + 30000b + 1000b^2)b + 10000(3a^2c) \\ & + 1000(6abc) + 100(3ac^2 + 3b^2c) + 10(3bc^2) \\ & + c^3。\end{aligned}$$

其中 $300000b$ 为三“方”体积，300000 为“方法”即“定法”；$30000b^2$

为三"廉"体积，30000 为"廉法"，置于"中行"，$1000b^3$ 为一"隅"体积，1000 为"隅法"，置于"下行"。

[23] 复置议，以一乘中，……，以定法除

以定法 300000 试除实 860867，议得次商数字为 2，因借算于千位，故置次商数字于十位。以次商数字 2 乘中行"廉法"得 $30000 \times 2 = 60000$。再乘下行"隅法"得 $1000 \times 2 \times 2 = 4000$。即"一乘中，再乘下"。将此二数副置一旁与定法 300000 相加，即"皆副以加定法"。即：

$$300000 + 60000 + 4000 = 364000,$$

作为定法。如图 26。

商				1	2			
实	8	6	0	8	6	7	副置	
法	3	6	4					
中行		3					6	
下行			1					4
借算			1					

图 26

商				1	2			
实	1	3	2	8	6	7	副置	
法	3	6	4					
中行		3					6	
下行			1					4
借算			1					

图 27

以次商数字 2 乘定法 364000 得 728000，由实数 860867 减去得 132867。即"以除定法"。也就是"三面、三廉、一隅皆已有幂，以上议命之而除去三幂之厚也"。如图 27。

议得 $b = 2$，得三"方"的厚为 $10 \times 2 = 20$，而三方三廉一隅体积和为：$(300000 + 60000 + 4000) \times 2 = 728000$，由实 860867 减之不尽，下余 132867。其余 132867 仍可视为三方、三廉、一隅的体积（图 28）。

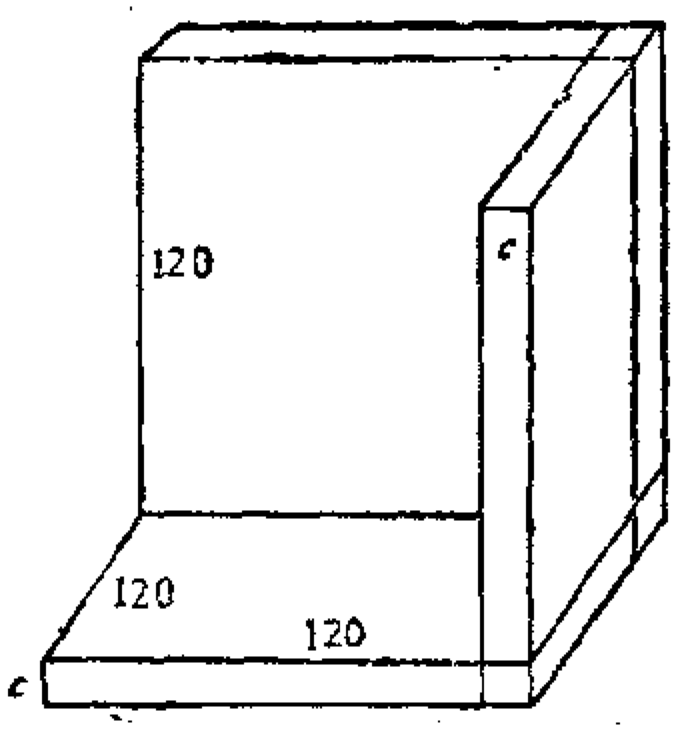


图 28

即 $860867 - 728000 = 132867$

$$= 10000(3a^2c) + 1000(6abc) + 100(3ac^2 + 3b^2c) + 10(3bc^2) + c^3。$$

[24] 除已，倍下、并中从定法。复除，折下如前

由实 860867 减 728000 余 132867，然后，以 2 乘副置下行的数 4000 得 8000，与副置中行的数 60000 以及定法相加得：

$$8000 + 60000 + 364000 = 432000,$$

即是“除已，倍下、并中从定法”。

将 432000 置于法，并向右退一位为 43200 称为“定法”。今欲求立方根的个位数字，须将借算由千位移至个位。即“复除，折下如前”。如图 29。

因原来三“方”三“廉”一“隅”的体积为：

$$[30000 + 6000 + 400] \times 10b = 36400 \times 10b,$$

欲求下余三“方”的体积，须知其面积。又知下余三“方”面积等于

商				1	2	
实	1	3	2	8	6	7
法		4	3	2		
中行						
下行						
借算						1

图 29

商				1	2	
实	1	3	2	8	6	7
法		4	3	2		
中行				3	6	
下行						1
借算						1

图 30

原来“方”的面积的二倍、原来“廉”的面积的六倍与原来“隅”的面积的三倍之和。故术文称：“倍下、并中从定法。”“复除，折而下”。也即注文所说“三廉各当以两面之幂，连于两方之面，一隅连于三廉之端，以待复除也”。

其次则“以三乘所得数置中行。复借一算置下行。步之，中超一，下超二”。

因下余三廉的体积为：

$$120 \times c \times c \times 3 = 120c^2 \times 3 = 360 \cdot c^2。$$

故置中行称为“廉法”。因一隅体积为 $c \times c \times c = c^3$，置于下行以表示“隅法”。如图 30。

商				1	2	3	
实	1	3	2	8	6	7	
法		4	4	2	8	9	108
中行				3	6		9
下行						1	
借算						1	

图 31

再则“复置议，以一乘中，再乘下，皆副以加定法。以定法除”。即：以 132867 除以 43200，议得末商数字为

3，置3于商的个位。以3乘中行“廉法”360得1080，以3再乘下行“隅法”1得9，皆副置一旁，与“定法”43200相加得：

$$1080+9+43200=44289。$$

作为法。如图31。

以末商数字3乘法44289得132867称为定法。由实减之适尽，即知1860867之立方根为123。

于上注等式

$132867=10000(3a^2c)+1000(6abc)+100(3ac^2+3b^2c)+10(3bc^2)+c^3$ 中，已知 $a=1$，$b=2$，故有：

$$132867=(43200+360\cdot c+1\cdot c^2)c,$$

议得 $c=3$，即

$$132867=(43200+360\times3+1\times3\times3)\times3=44289\times3,$$

乃有：

$$\sqrt[3]{1860867}=123。$$

[25] 若积有分者，……，令如母而一

对于分数开立方，《九章算术》给出两种方法：

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{b},$$

及

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}。$$

若被开立方数为分数，且分母为完全立方数，开方时应化为假分数，先求分子的立方根，再以分母立方根除之即得。

即

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{b}。$$

若分母非完全立方数，应以分母的平方乘分子、分母，即“本一母也，又一母再乘之，令合三母”。再分别开立方。
即

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}。$$

[二三] 今有积四千五百尺。亦谓立方之尺也。问为立圆径几何。

答曰：二十尺。依密率，立圆径二十尺，计积四千一百九十尺二十一分寸之一十。

[二四] 又有积一万六千四百四十八亿六千六百四十三万七千五百尺。问为立圆径几何。

答曰：一万四千三百尺。依密率，为径一万四千六百四十三尺四分尺之三。

开立圆术[26]曰：置积尺数，以十六乘之，九而一，所得开立方除之，即丸径[27]。立圆，即丸也。为术者，盖依周三径一之率。令圆幂居方幂四分之三，圆囷居立方亦四分之三，更令圆囷为方率十二，为丸率九，丸居圆囷又四分之三也。置四分自乘得十六分，三自乘得九，故丸居立方十六分之九也。故以十六乘积，九而一，得立方之积。丸径与立方等，故开立方而除，得径也[28]。然此意非也。何以验之？取立方棊八枚，皆令立方一寸，积之为立方二寸。规之为圆囷，径二寸，高二寸。又复横规之，则其形有似牟合方盖矣。八棊皆似阳马，圆然也。按合盖者，方率也。丸居其中，即圆率也。推此言之，谓夫圆囷为方率，岂不阙哉[29]？以周三径一为圆率，则圆幂伤少。令圆囷为方率，则丸积伤多[30]。互相通补，是以九与十六之率偶与实相近，而丸犹伤多耳[31]。观立方之内，合盖之外，虽衰杀有渐，而多少不掩。判合总结，方圆相缠，浓纤诡互，不可等正。欲陋形措意，惧失正理。敢不阙疑，以俟能言者[32]。　黄金方寸，重十六两。金丸径寸，重九两。率生于此，未曾验也。《周官·考工记》：“㮚氏为量，改煎金锡则不耗。不耗然后權之，權之然后准之，准之然后量之。”言炼金使极精，而后分之，则可以为率也。令丸径自乘，三而一，开方除之，即丸中之立方也。假令丸中立方五尺，五尺为句，句自乘幂二十五尺，倍之得五十尺，以为弦幂，谓平面方五尺之弦也。以此弦为股，亦以五

尺为句，并句股幂得七十五尺，是为大弦幂。开方除之，则大弦可知也。大弦则中立方之长邪，邪即丸径也。故中立方自乘之幂于丸径自乘之幂，三分之一也。令大弦还乘其幂，即丸外立方之积也。大弦幂开之不尽，令其幂七十五再自乘之为面，命得外立方积四十二万一千八百七十五尺之面。又令中立方五尺自乘又以方乘之，得积一百二十五尺。一百二十五尺自乘为面，命得积一万五千六百二十五尺之面。皆以六百二十五约之，外立方积六百七十五尺之面，中立方积二十五尺之面也[33]。　张衡算又谓立方为质，立圆为浑。衡言质之与中外之浑：六百七十五尺之面开方除之，不足一，谓外浑积二十六也。内浑二十五之面，谓积五尺也。今徽令质言中浑，浑又言质，则二质相与之率，犹衡二浑相与之率也。衡盖亦先二质之率推以言浑之率也[34]，衡又言质六十四之面，浑二十五之面。质复言浑，谓居质八分之五也。又云，方八之面，圆五之面。圆浑相推，知其复以圆困为方率，浑为圆率也，失之远矣。衡说之自然，欲协其阴阳奇耦之说而不顾疏密矣。虽有文辞，斯乱道破义，病也。置外质积二十六，以九乘之，十六而一，得积一十四尺八分之五，即质中之浑也。以分母乘全内子得一百一十七。又置内质积五，以分母乘之得四十，是为质居浑一百一十七分之四十，而浑率犹为伤多也[35]。假令方二尺，方四面并得八尺也，谓之方周。其中令圆径与方等，亦二尺也。圆半径以乘圆周之半，即圆幂也。半方以乘方周之半，即方幂也。然则方周者方幂之率也；圆周者圆幂之率也。按如衡术，方周率八之面，圆周率五之面也。令方周六十四尺之面，即圆周四十尺之面也。又令径一尺方周四尺，自乘得十六尺之面，是为圆周率一十之面，而径率一之面也。衡亦以周三径一之率为非是，故更著此法。然增周太多，过其实矣[36]。　臣淳风等谨按：祖暅之谓刘徽、张衡二人皆以圆困为方率，丸为圆率[37]，乃设新法。祖暅之开立圆术曰：以二乘积开立方除之，即立圆径[38]。其意何也？取立方棊一枚，令立枢于左后之下隅，从规去其右上之廉。又合而横规之，去其前上之廉。于是立方之棊，分而为四。规内棊一，谓之内棊。规外棊三，谓之外棊[39]。更合四棊，复横断之。以句股言之，令余高为句，内棊断上方为股，本方之数，其弦也。句股之法，以句幂减弦幂，则余为股幂，若令余高自乘，减本方之幂，余即内棊断上方之幂也。本方之幂，即内外四棊之断上幂。然则余高自乘，即外三棊之断上幂矣。不问高卑，势皆然也[40]。然固有所归同而涂殊者尔。　而乃控远以演类，借况以析微。按阳马方高数参等者，倒而立之，横截去上，则高自乘与断上幂数，亦等焉[41]。夫叠棊成立积，缘幂势既同，则积不容异[42]。由此观之，规之外三棊旁蹙为一，即一阳马也。三分立方，则阳马居一，内棊居二可知矣[43]。合八小方成一大方，合八内棊成一合盖。内棊居小方三分之二，则合盖居立方亦三分之二，较然验矣。置三分之二以圆幂率三乘之，如方幂率四而一，约而定之，以为丸率。故曰丸居立方二分之一也[44]。等数既密，心亦昭晰。张衡放旧，贻哂于后。刘徽循故，未暇校新[45]。夫岂难哉，抑未之思也。依密率，此立圆积本以圆径再自乘，十一乘之，二十一而一。约此积今欲求其本积故以二十一乘之，十一而一。凡物再自乘，开立方除之复其本数。故立方除之，即丸径也[46]。

[26] 开立圆

古代称圆为"圜"或"平圆"，以表示平面的圆形。古代称球为"丸"或"立圆"，以区别于"平圆"。如刘注"立圆，即丸也"。

由球的体积以开立方的方法求其直径，称为"开立圆"。

[27] 置积尺数，以十六乘之，九而一，……，即丸径

"置积尺数"至"即丸径"系古代由球体积求其直径的方法。设球积为 $V_{球}$，直径为 d，按术计算为：

$$d=\sqrt[3]{\frac{16V_{球}}{9}}。$$

[28] 为术者，盖依周三径一之率。……，得径也

因取 $\pi=3$，正方形与其内切圆面积之比为 $4:\pi=4:3$。正方体与其内切圆柱体积之比也为 $4:\pi=4:3$。

若视等边圆柱为方，其内切球为圆；令方率为 12，圆率为 9，其比也为 $12:9=4:3$。即注文"丸居圆囷又四分之三也"。"圆囷"即是现今的正圆柱，此处所指乃是等边圆柱。

据上所述，则得：

$$V_{立方}:V_{柱}=4:\pi=4:3,$$
$$V_{柱}:V_{球}=4:\pi=4:3,$$

故有：

$$V_{球}:V_{立方}=(3\times3):(4\times4)=9:16。$$

因正方体的棱等于其内切球直径，故得：

$$V_{球}=\frac{9}{16}\cdot d^3=\frac{9}{16}\cdot V_{立方}$$

或

$$d^3=V_{立方}=\frac{16}{9}\cdot V_{球}。$$

因而

$$d=\sqrt[3]{\frac{16\cdot V_{球}}{9}}。$$

"为术者"至"得径也"一段，系术文的注文，由于刘徽认为此术不合理，故提出不同意见，乃称"然此意非也"，更以模型验证。

[29] 取立方棊八枚，……，岂不阙哉

取棱长一寸的正方体之模型八枚，进行验证。集八棊于一起，拼成棱长二寸的正方体。由一侧面截成内切圆柱，即"规之为圆囷"。又以他一侧面"横规之"，也截成一内切圆柱。此二圆柱共同部份的形状"有似牟合方盖矣"。如图 32 及图 33。

古代称伞为"盖"。"牟"与"侔"通，相同的意思。"牟合方盖"，即合于一起的两个全同的方伞。

在两圆柱共同部份的每一棊都类似于阳马。"阳马"乃是底为正方形或长方形一侧棱与底垂直的四棱锥。因阳马的侧棱都是直线，而此棊的侧棱多为曲线(圆弧及椭圆弧)，故注文补称："圆然也。"如图 34。

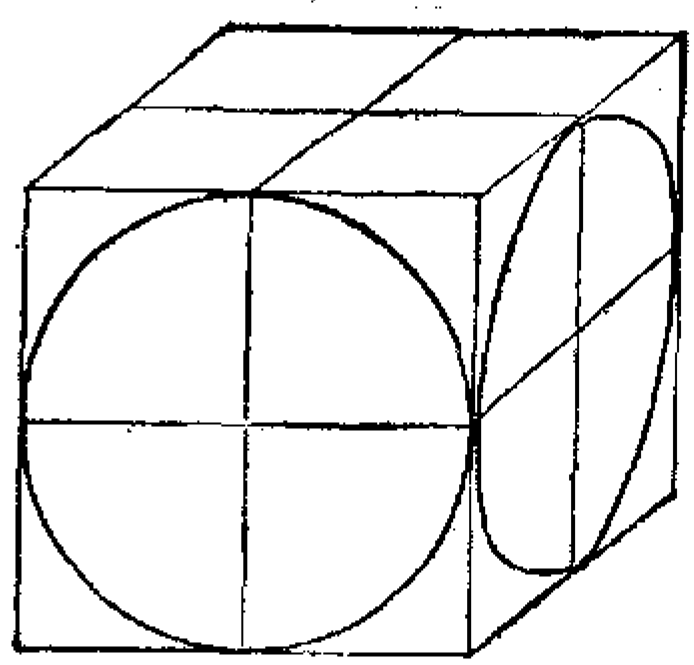


图 32

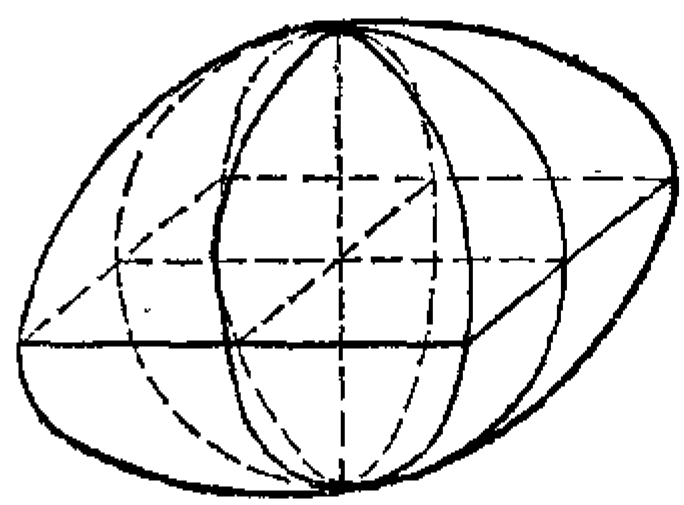


图 33

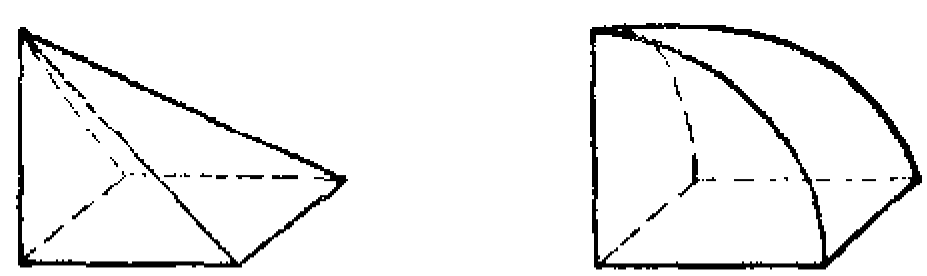


图 34

"合盖"的截面为正方形，因而内切球的对应截面则是该正方形的内切圆，故注文："合盖者，方率也。丸居其中，即圆率也。"

其意即："合盖"与其内切球体积的比等于正方形与其内切圆面积的比。即

$$\frac{\text{合盖体积}}{\text{内切球体积}}=\frac{4}{\pi}=\frac{4}{3}。$$

"合盖"与其内切球体积的比为 4:3(π)，既然正确，而"圆囷"与其内切球体积的比也为 4:3(π)，则显然错误。故注称"岂不阙哉?"

[30] 以周三径一为圆率，……，则丸积伤多

因

$$\frac{3}{4}d^2<\frac{\pi}{4}d^2=\text{圆面积}。$$

其中 d 为直径。故"以周三径一为圆率，则圆幂伤少"。

又由上注，"丸"为圆率，"合盖"应为方率。即

$\dfrac{\text{合盖体积}}{\text{内切球体积}}=\dfrac{4}{\pi}$，或 $\text{内切球体积}=\dfrac{\pi}{4}\text{合盖体积}$。今以"圆囷"为方率，而"圆囷"体积大于"合盖"体积，即

$$\frac{\text{圆囷体积}}{\text{内切球体积}}>\frac{4}{\pi}\quad\text{或}\quad\text{内切球体积}<\frac{\pi}{4}\text{圆囷体积},$$

故"丸积伤多"。

[31] 互相通补，……，而丸犹伤多耳

因注文过于简略，刘徽究竟如何推证，难于了解。今猜测如下：

设合盖、合盖的内切球、正方体及其内切圆柱的体积各为 $V_{\text{合}}$、$V_{\text{球}}$、$V_{\text{立方}}$、$V_{\text{柱}}$。由上注可知

$$\frac{V_{\text{合}}}{V_{\text{球}}}=\frac{4}{\pi},$$

正方体与其内切圆柱体积之比为

$$\frac{V_{\text{立方}}}{V_{\text{柱}}}=\frac{4}{\pi},$$

于是

$$\frac{V_{合}}{V_{球}}\cdot\frac{V_{立方}}{V_{柱}}=\frac{16}{\pi^2},$$

或

$$\frac{V_{柱}}{V_{合}}\cdot V_{球}=\frac{\pi^2}{16}V_{立方}。$$

若取 $\pi=3$，虽然 $\frac{9}{16}d^3$ 与 $\frac{\pi^2}{16}d^3$ 相近，但是 $V_{柱}>V_{合}$，则球体积 $V_{球}$ 仍小于 $\frac{9}{16}d^3$。即：

$$V_{球}<\frac{9}{16}d^3,$$

故称："丸犹伤多耳"。

[32] 观立方之内，……，以俟能言者

立方以内、"合盖"以外之形，由上至下虽逐渐减小，但其多少难定。又因"立方"与"圆囷"相缠一起，粗细结合，其形不正。欲推究此不规则图形性质（如图 35），惟恐与理违背，只好阙疑，以待后人解决。

[33] 黄金方寸，重十六两。……，中立方积二十五尺之面也

一立方寸黄金重十六两，直径为一寸的金球重九两。张衡认为未曾验证，须按《考工记》的记载，使黄金炼之极精进行验证。

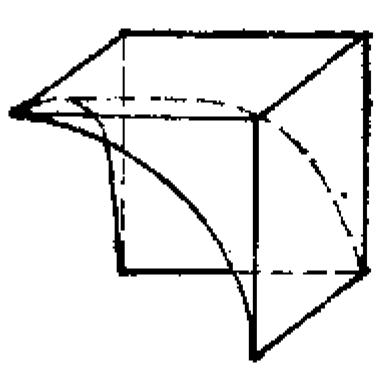


图 35

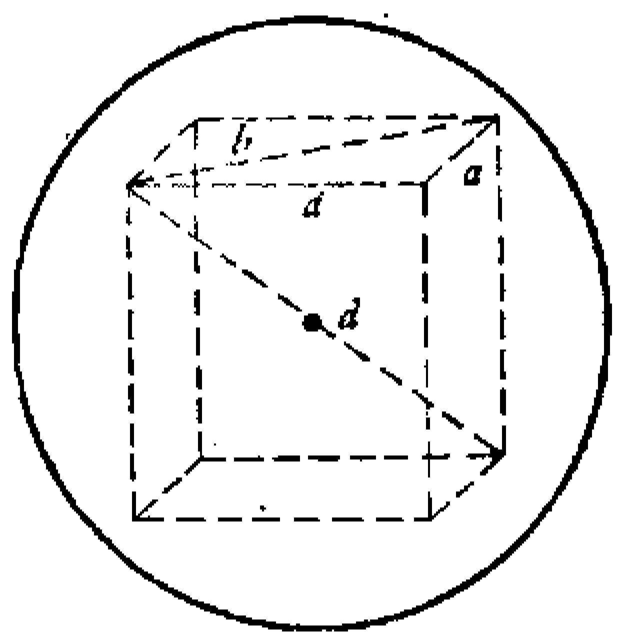


图 36

设球直径为 d，内接正方体的一边为 a（如图 36），

则
$$a=\sqrt{\frac{d^2}{3}},$$

并"假令丸中立方五尺"以说明之。设 $a=5$ 尺为句，则"句幂"为 $a^2=25$，而 $2a^2=50$ 为"弦幂"。再以此弦为股 (b)，由句股定理得

$$a^2+b^2=25+50=75,$$

即"大弦幂"，故得"大弦" d 为：

$$d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{75}。$$

大弦 d 即球内接正方体的对角线，也即球的直径。如"大弦则中立方之长邪，邪即丸径也"。

可见

$$a^2:d^2=25:75=1:3,$$

乃有

$$\frac{a^2}{d^2}=\frac{1}{3}，或\ a=\sqrt{\frac{d^2}{3}}。$$

令大弦 d 与其幂相乘，乃得球的外切正方体体积：

$$d^3=(\sqrt{75})^3。$$

因"大弦幂开之不尽"，故取 $d^6=(\sqrt{75})^6=421875$，其平方根为外切正方体体积，即

$$d^3=\sqrt{421875}。$$

又取球内接正方体一边的六次方，

得
$$a^6=5^6=15625,$$

其平方根为内接正方体体积，即 $a^3=\sqrt{15625}$。

以 625 约简上述二数，则得

$$\frac{d^6}{a^6}=\frac{421875}{15625}=\frac{675}{25},\ \frac{d^3}{a^3}=\frac{\sqrt{675}}{\sqrt{25}}。$$

即“外立方积六百七十五尺之面，中立方积二十五尺之面也”。

[34] 张衡算又谓立方为质，……，推以言浑之率也

张衡又称正方体为“质”，称球为“浑”。

因 $a^3:d^3=\sqrt{25}:\sqrt{675}$ 可视为：

$$\frac{\text{球之内接正方体体积}}{\text{球之外切正方体体积}}=\frac{a^3}{d^3}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{675}}\doteq\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{675+1}}=\frac{5}{26},$$

而

$$\frac{\text{正方体之内切球体积}}{\text{正方体之外接球体积}}=\frac{a^3}{d^3}\left(=\frac{125}{\sqrt{75^3}}\doteq\frac{5}{26}\right),$$

故有

$$\frac{\text{球之内接正方体体积}}{\text{球之外切正方体体积}}=\frac{\text{正方体之内切球体积}}{\text{正方体之外接球体积}}\doteq\frac{5}{26}。$$

刘徽曾用正方体与其内切球体积之比及球与内接正方体体积之比以推算二“质”之比。这种算法，犹如张衡由二“质”之比，推算二“浑”之比。

[35] 衡又言质六十四之面，……，而浑率犹为伤多也

张衡又提出：“质六十四之面，浑二十五之面。”即

$$\frac{\text{正方体体积}}{\text{内切球体积}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}}=\frac{8}{5},$$

或

$$\text{内切球体积}=\frac{5}{8}\times\text{正方体体积}。$$

即注文“质复言浑，谓居质八分之五也”。

因旧术 $\frac{\text{正方体体积}}{\text{内切球体积}}=\frac{16}{9}$，$\frac{\text{正方形面积}}{\text{内切圆面积}}=\frac{4}{3}$，张衡比照旧术而得：“方八之面，圆五之面。”即

$$\frac{\text{正方形面积}}{\text{内切圆面积}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}},$$

于是有：

$$a^2:\frac{\pi a^2}{4}=\sqrt{8}:\sqrt{5}=4:\pi,$$

则得：

$$\pi=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{8}}=\sqrt{10}。$$

刘徽认为张衡所说正方形与其内切圆面积之比 $\sqrt{8}:\sqrt{5}$，误差较大，“失之远矣”。并对他提出批评：“衡说之自然，欲协其阴阳奇耦之说而不顾疎密矣。”又说：“虽有文辞，斯乱道破义，病也。”刘徽批评得十分正确。

为此，刘徽乃假令正方体体积为 26，依旧术其内接球体积当为：

$$V_{球}=\frac{26\times 9}{16}=14\frac{5}{8}=\frac{117}{8}。$$

按前文“二质相与之率”为 26:5，既设正方体体积为 26，则球的内接正方体体积为 5 。

于是球与其内接正方体体积之比为：

$$\frac{V_{球}}{V_{立方}}=\frac{\frac{117}{8}}{5}=\frac{117}{40},$$

或

$$V_{立方}=\frac{40}{117}\cdot V_{球}。$$

设内接正方体的一边为 a，上式则为：

$$\frac{117}{40}\cdot a^3=\frac{9}{16}\left(\frac{26}{5}a^3\right)。$$

其中 $\left(\frac{26}{5}\cdot a^3\right)$ 即球外切正方体体积，对照上文，“以九与十六之率”，“而丸犹伤多耳”。所以此处也称：“而浑率犹为伤多也。”

[36] 假令方二尺，……，然增周太多，过其实矣

假设正方形一边为 $a=2$ 尺，则“方周”为 $p=4a=8$ 尺。其内切圆直径 $d=a=2$ 尺，C 为圆周，圆面积为 $S=\frac{dC}{4}$，而正方形面积为 $S'=\frac{ap}{4}$。由于 $\frac{S'}{S}=\frac{\frac{ap}{4}}{\frac{dC}{4}}=\frac{p}{C}$，可见方周 (p) 即是方幂 (S') 的比率，圆周 (C) 即是圆幂 (S) 的比率。即注文“方周者方幂之率也，圆周者圆幂之率也”(图 37)。

如按张衡的方法，则得：“方周率八之面，圆周率五之面也。”即 $\frac{S'}{S}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}$。如令方周为 $\sqrt{64}$，则圆周当为 $\sqrt{40}$。乃得

$$\frac{S'}{S}=\frac{p}{C}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{40}}。$$

按这一比率，若正方形一边 $a=1$ 尺，内切圆径亦为 $d=1$ 尺，则方周 $p=4$ 尺，而 $p=\sqrt{p^2}=\sqrt{16}$，所对应之圆周为

$$C=\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{64}}\cdot p=\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{64}}\cdot\sqrt{16}=\sqrt{10}。$$

即“是为圆周率一十之面”。

因张衡不满古率 $\pi=3$，乃创此率，但 $\sqrt{10}>\pi$，所以说：“增周太多，过其实矣。”刘徽评论正确。李潢也说：“周率一十之面，开方除之，得三一六有奇，故云增周太多。”

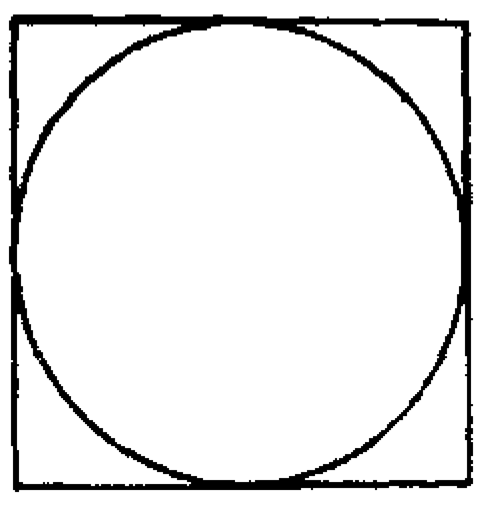


图 37

注文“然则方周者方幂之率也，圆周者圆幂之率也”，各本都讹作“方周知”，“圆周知”。今校改。

[37] 祖暅之谓刘徽、张衡二人……，丸为圆率

刘徽对于以圆囷为方率，丸为圆率，已加批判。不知祖氏父子何以如是云云。

[38] 祖暅之开立圆术曰：……，即立圆径

设球体积为 $V_{球}$，其直径为 d，若取 $\pi=3$，则

$$d=\sqrt[3]{2V_{球}}。$$

[39] 取立方棊一枚，……，规外棊三，谓之外棊

取正方体模型一枚，以左后之下隅 O 为圆心，以棱长（AO）为

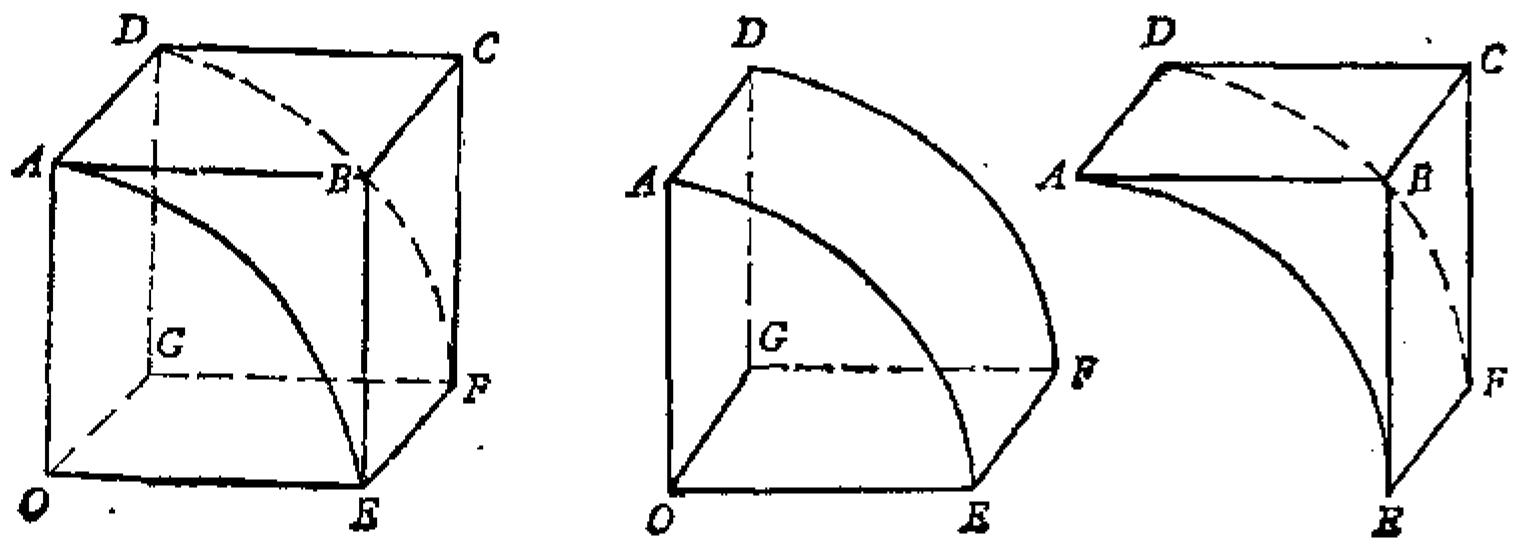


图 38

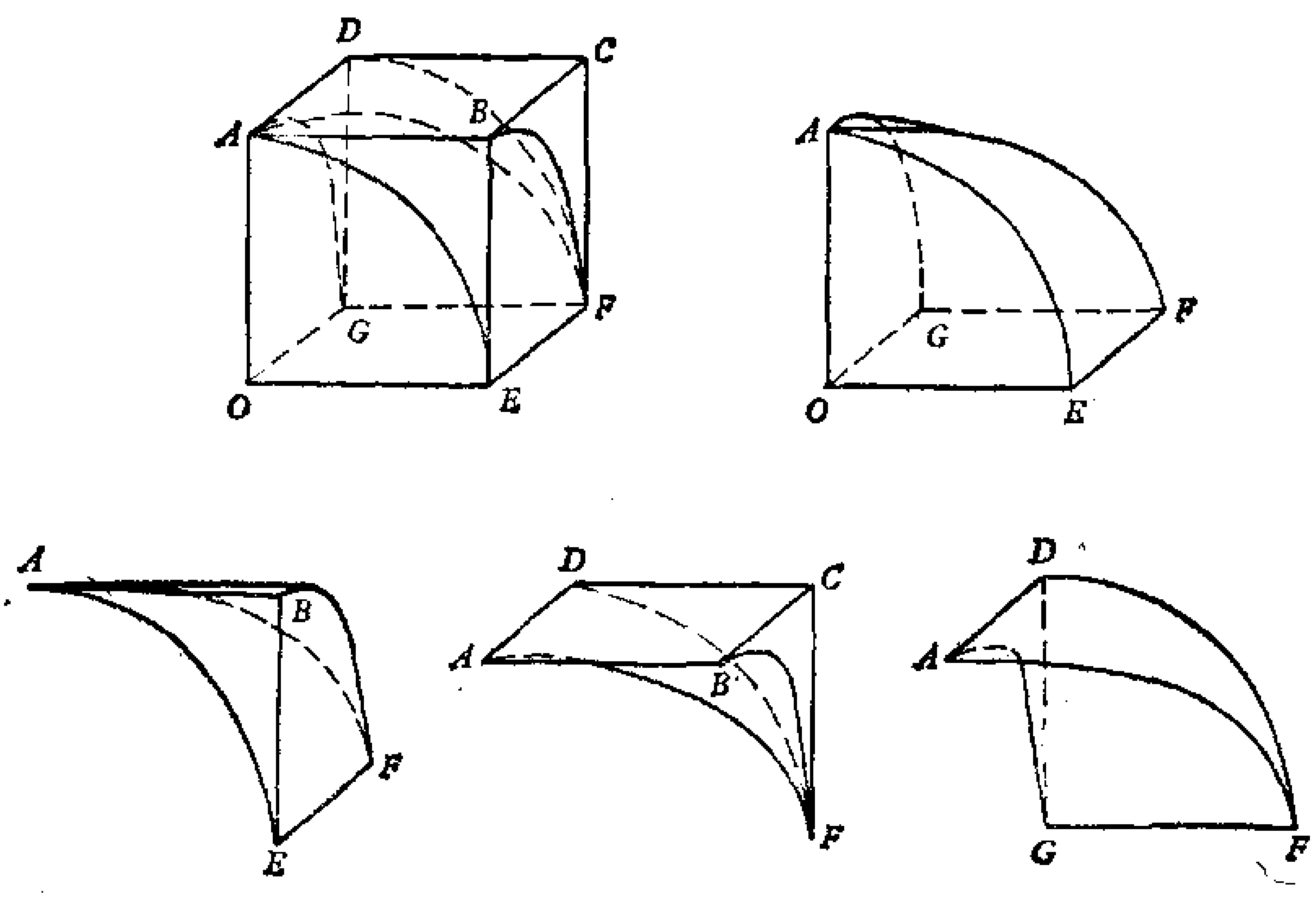


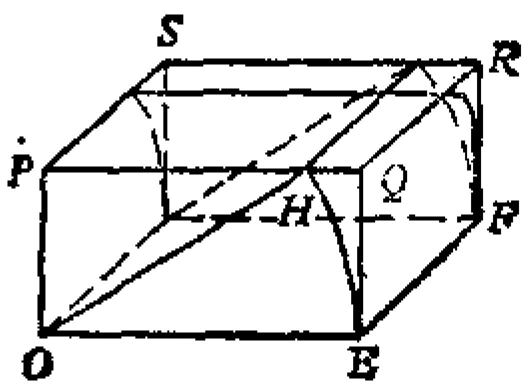
图 39

半径作圆柱面，截去其右上部分 $EF-ABCD$，即“从规去其右上之廉”。如图 38。

“又合而横规之，去其前上之廉”。使两部份又合在一起，以 E 为圆心，以 EB 为半径作圆柱面，截去其前上部分 $FG-ABCD$。原来是一个立方棊，今则“分而为四”。即 $A-OEFG$，$AB-EF$，$F-ABCD$，$AD-GF$。其中 $A-OEFG$ 在规内，称为“内棊”，$AB-EF$，$F-ABCD$，$AD-GF$ 在规外，都称为“外棊”。如图 39。

[40] 更合四棊，复横断之。……，势皆然也

又将分得的四棊合成一个立方，然后用横断面 $PQRS$ 截开。如图 40。



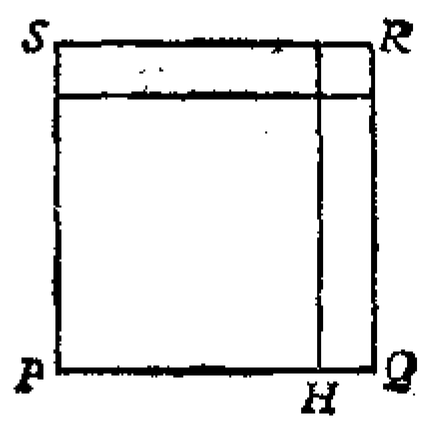


图 40

以“余高”OP 为句，“内棊断上方”PH 为股，“本方”OE 或 OH 为弦。

按句股定理，有 $OE^2-OP^2=PH^2$。其中 PH^2 为内棊截面面积，OE^2 为内外四棊截面面积之和，故知 OP^2 为外三棊截面面积之和。

即注文“余高自乘，减本方之幂，余即内棊断上方之幂也”。“余高自乘，即外三棊之断上幂矣”。

看来，不拘截面位置高低，都有此种关系。故称“不问高卑，势皆然也”。

[41] 按阳马方高数参等者，倒而立之，……，亦等焉

合外三棊成一凹体，此体形状犹如倒立的阳马。祖暅乃以倒立的阳马立说。

取底面相邻两边及高三者相等的阳马 $F-ABCD$，使倒立之，

作横截面 $HQRS$（图 41）。

因 $RF = QR$，故“余高” RF 平方等于其断上幂，即截面 $HQRS$ 的面积。

即 $RF^2 = QR^2$。

[42] 夫叠棊成立积，缘幂势既同，则积不容异

“缘幂势既同，则积不容异”。其意义为：介于两平行平面之间的两立体，若任一等高处的截面面积对应相等，则两立体的体积必然相等。

设两立体的高都是 H，截面的高为 h，截面面积分别为 S_1，S_2，两立体体积各为 V_1，V_2（图 42）。即：

若 $S_1 = S_2$，则 $V_1 = V_2$。

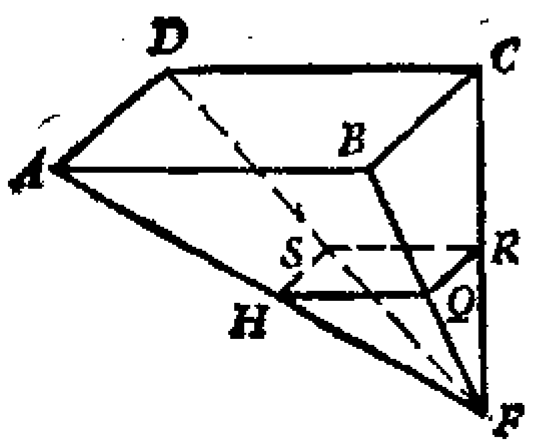


图 41

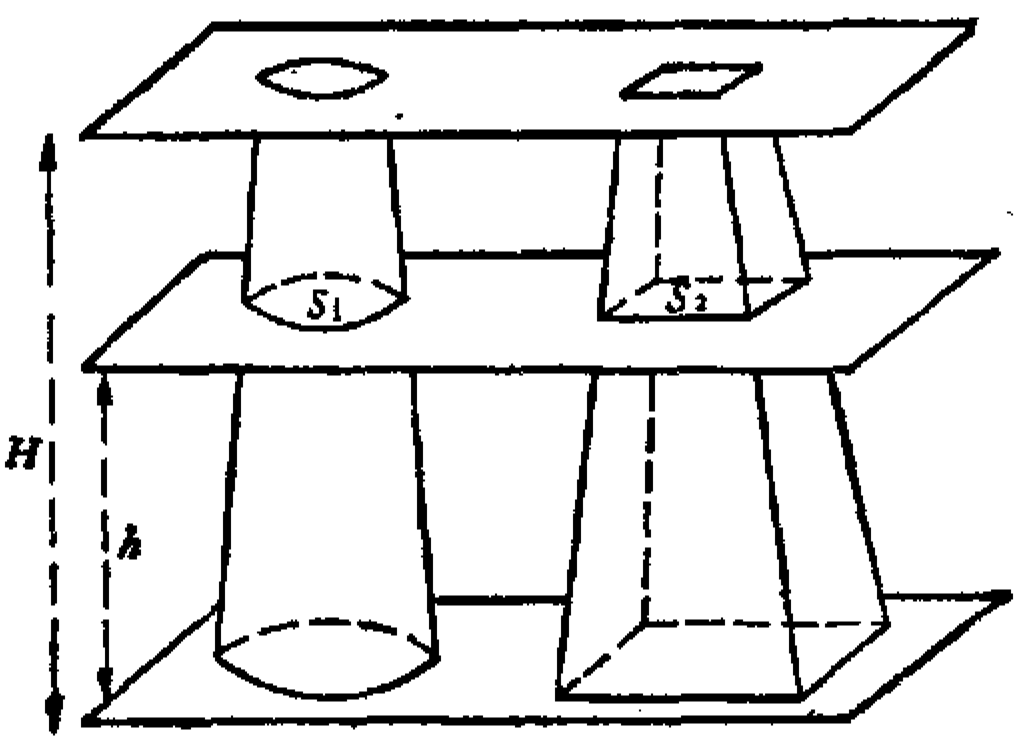


图 42

“缘幂势既同，则积不容异”一理，固然是祖氏父子所创，但是，商功章羡除术刘注说：“推此上连无成不方，故方锥与阳马同实。”其实，这就是“缘幂势既同，则积不容异”。

另外，刘徽也论述了正方形与其内切圆面积之比为 $4:\pi$，正四棱台与其内切圆台体积之比为 $4:\pi$，正四棱锥与其内切圆锥体积之比为 $4:\pi$，“牟合方盖”与其内切球体积之比为 $4:\pi$。

这一原理曾被意大利数学家卡瓦列利（Cavalieri，1598—1647）

于 1635 年在《用连续不可分量之新方法说明之几何》中提出，世人称为卡瓦列利公理。其实，他既迟于祖氏父子一千一百余年，又晚于刘徽一千三百多年。因此，无妨称这一原理为刘、祖公理或刘、祖定理。

[43] 由此观之，……，内棊居二可知矣

根据"缘势幂既同，则积不容异"，可知外三棊的体积与同底等高的阳马体积相等。

由边长为 a 的正方体中，规得外三棊的体积设为 V，又于 h 处作截面，截面面积设为 S。据前文可知：$S = h^2$。

又设底面两边及高皆为 a 之倒立阳马体积为 V'，于高 h 处作截面面积为 S'，则 $S' = h^2$。如图 43。

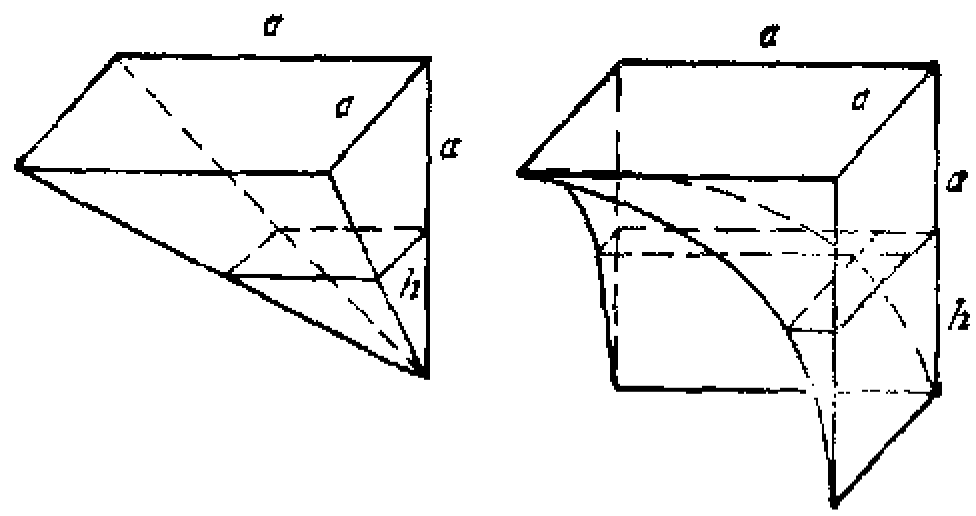


图 43

按刘、祖公理，因 $S = S'$，故 $V = V'$。也即注文"规之外三棊旁蹙为一，即一阳马也"。

因阳马体积为 $V' = \frac{1}{3}a^3$，故知外三棊体积为：

$$V = \frac{1}{3}a^3。$$

由此显见内棊体积为 $\frac{2}{3}a^3$。即注文"三分立方，则阳马居一，内棊居二可知矣"。

[44] 合八小方成一大方，……，故曰丸居立方二分之一

以同样八立方合成一大立方，则八内棊成一“合盖”之形。

设内棊体积为 $V_{内}$，小立方体积为 $V_{小}$，“合盖”体积为 $V_{合}$，大立方体积为 $V_{大}$，球体积为 $V_{球}$，乃有：

$$\frac{V_{内}}{V_{小}}=\frac{8\cdot V_{内}}{8\cdot V_{小}}=\frac{V_{合}}{V_{大}}=\frac{2}{3},$$

又因前文刘徽注称：“合盖者，方率也。丸居其中，即圆率也。”即：

$$\frac{V_{球}}{V_{合}}=\frac{\pi}{4}。$$

故：

$$\frac{V_{球}}{V_{大}}=\frac{V_{球}}{V_{合}}\cdot\frac{V_{合}}{V_{大}}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\pi}{6}。$$

若取 $\pi=3$，乃得

$$\frac{V_{球}}{V_{大}}=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}，或\ V_{球}=\frac{1}{2}\cdot V_{大}=\frac{1}{2}d^3。$$

故称：“丸居立方二分之一也。”

因之，球直径 $d=\sqrt[3]{2V}$。即前文“以二乘积开立方除之，即立圆径”。

[45] 张衡放旧，贻哂于后。刘徽循故，未暇校新

就此点而论，张衡固是循古守旧，批评得正确。但对于刘徽之评论显然不对。

[46] 依密率，……，故立方除之，即丸径也

李淳风以为：若依密率 $\pi=\frac{22}{7}$ 计算，则得：

$$\frac{V_{球}}{V_{大立方}}=\frac{\pi}{6}=\frac{\frac{22}{7}}{6}=\frac{11}{21}。$$

若以直径求球积，则得 $V_{球}=\frac{11}{21}d^3$，若以球积求球径，则得：

$d=\sqrt[3]{\frac{21}{11}V_{球}}$，即"丸径也"。

九章算术卷第五

商功以御功程积实

［一］今有穿地积一万尺。问为坚、壤各几何。

答曰：

为坚七千五百尺。

为壤一万二千五百尺。

术曰：穿地四，为壤五，壤谓息土。为坚三，坚谓筑土。为墟四[1]。墟谓穿坑。此皆其常率。以穿地求壤，五之；求坚，三之；皆四而一。今有术也。以壤求穿，四之；求坚，三之；皆五而一。以坚求穿，四之；求壤，五之；皆三而一。臣淳风等谨按：此术並今有之义也。重张穿地积一万尺为所有数，坚率三、壤率五各为所求率，穿率四为所有率[2]，而今有之，即得。

城，垣，隄，沟，壍，渠[3]，皆同术。

术曰：并上下广而半之，损广补狭。以高若深乘之，又以袤乘之，即积尺[4]。按此术并上下广而半之者，以盈补虚，得中平之广。以高若深乘之，得一头之立幂。又以袤乘之者，得立实之积，故为积尺。

［1］穿地四，为壤五，为坚三，为墟四

"穿地"即挖地。李籍《音义》说："掘地也。"《说文解字》称："壤，柔土也。"注文"壤为息土"。息土即是松土。南宋罗泌《路史》称："息生之土，长而不穷。""坚谓筑土"即是将土轧实。"墟谓穿坑"即挖坑。

术文“穿地四，为壤五，为坚三，为墟四”是一般穿、壤、坚、墟体积的比率。即“此皆其常率”。

注文“坚谓筑土”，钱校本误为“坚为筑土”。今从殿本校正。

[2] 穿率四为所有率

“此术竝今有之义也”以下，是李淳风注解第一问的计算方法。注文应为“穿率四为所有率”，钱校本误为“墟率四为所有率”。今依殿本校正。

[3] 城、垣、隄、沟、壍、渠

“城、垣、隄、沟、壍、渠”的形状，是正截面为等腰梯形的直棱柱。如图 1 。因其功用不同，故其名称也异。

城即城墙，如《史记 · 齐世家》：“楚方城以为城，江汉以为沟。”垣即是墙，如《书 · 梓材》：“若作室家，既勤垣墉，惟其涂塈茨。”隄就是堤坝。沟是水沟，《考工记 · 匠人》：“匠人为沟洫，……，九夫为井，井间广四尺，深四尺，谓之沟。”壍同堑，即是城河，《史记 · 高祖本纪》：“使高垒深堑勿与战。”渠即渠道。因此，可以说：“城、垣、隄、沟、壍、渠。”即现今的城墙、土城、堤坝、水沟、城河、渠道。

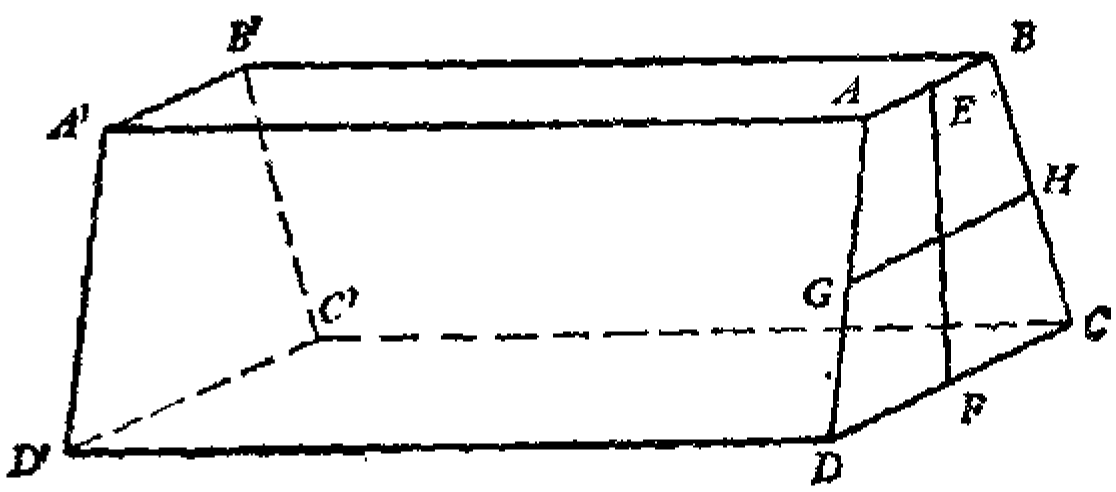


图 1

[4] 并上下广而半之，以高若深乘之，又以袤乘之，即积尺

上广，下广是城的横断面的上、下底，高即其高，袤是城的长。如《汉书 · 贾捐之传》，颜师古注称：“袤，长也。”如图 1 ，设上，下广各为 AB，CD，高为 EF，长为 AA'，按术计算，得体积为：

$$V = \left(\frac{AB + CD}{2} \times EF\right) \cdot AA'$$

其中 $\dfrac{AB+CD}{2}=GH$，即是“中平之广”。也即等腰梯形 $ABCD$ 的中位线 GH，而 $\dfrac{AB+CD}{2}\times EF$ 即其面积。因为梯形垂直于地面，故称为“立幂”。

［二］今有城下广四丈，上广二丈，高五丈，袤一百二十六丈五尺。问积几何。

答曰：一百八十九万七千五百尺。

［三］今有垣下广三尺，上广二尺，高一丈二尺，袤二十二丈五尺八寸。问积几何。

答曰：六千七百七十四尺。

［四］今有隄下广二丈，上广八尺，高四尺，袤一十二丈七尺。问积几何。

答曰：七千一百一十二尺。

冬程人功四百四十四尺[5]，问用徒几何。

答曰：一十六人一百一十一分人之二。

术曰：以积尺为实，程功尺数为法，实如法而一，即用徒人数。

［五］今有沟上广一丈五尺，下广一丈，深五尺，袤七丈。问积几何。

答曰：四千三百七十五尺。

春程人功七百六十六尺，并出土功五分之一，定功六百一十二尺五分尺之四。问用徒几何。

答曰：七人三千六十四分人之四百二十七。

术曰：置本人功，去其五分之一，余为法。去其五

分之一者，谓以四乘五除也。以沟积尺为实。实如法而一，得用徒人数。按此术：置本人功去其五分之一者，谓以四乘之五而一，除去出土之功，取其定功，乃通分内子以为法。以分母乘沟积尺为实者，法里有分，实里通之，实如法而一[6]，即用徒人数。此以一人之积尺，除其众尺，得用徒人数；不尽者，等数约之而命分也。

[5] 冬程人功四百四十四尺

冬季每人一日工作量规定为四百四十四立方尺。

[6] 法里有分，实里通之，实如法而一

设用徒 x 人，其定功为 766 立方尺 $\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{3064}{5}$ 立方尺，而 $\frac{15\text{尺}+10\text{尺}}{2}\times 5\text{尺}\times 70\text{尺}=4375$ 立方尺，即是沟积。于是：

$$x=\frac{4375}{\frac{3064}{5}}。$$

上式除数 $\frac{3064}{5}$，是分数，即“法里有分”。因 3064 不能以 5 整除，则应颠倒相乘，故以法数分母 5 乘实数 4375，以 5 乘 4375 即是“实里通之”，而为 $x=\frac{4375\times 5}{3064}$。

注文“实如法而一”的实，是指 4375×5，并非前文“实”数 4375。

[六] 今有壍上广一丈六尺三寸，下广一丈，深六尺三寸，袤一十三丈二尺一寸。问积几何。

答曰：一万九百四十三尺八寸[7]。八寸者，谓穿地方尺深八寸。此积余有方寸中二分四厘五毫，弃之，贵欲从易，非其常定也。

夏程人功八百七十一尺。并出土功五分之一，沙砾水

石之功作太半，定功二百三十二尺，一十五分尺之四。问用徒几何。

答曰：　四十七人三千四百八十四分人之四百九。

术曰：置本人功，去其出土功五分之一，又去沙砾水石之功太半，余为法。以壍积尺为实。实如法而一，即用徒人数。按此术置本人功去其出土功五分之一者，谓以四乘五除。又去沙砾水石作太半者，一乘，三除，存其少半。取其定功，乃通分内子以为法。以分母乘壍积尺为实。法里有分，实里通之。实如法而一，即用徒人数。不尽者，等数约之，而命分也。

[7] 答曰：一万九百四十三尺八寸

"一万九百四十三尺八寸"是按立方尺，立方寸，计算的，即10943.8 立方尺，并非 10943.008 立方尺。故注称："八寸者，谓穿地方尺深八寸。""八寸"即现今 800 立方寸，按术计算，得积应为 $V=10943.8245$ 立方尺，"贵欲从易"乃弃其余分 0.0245 立方尺，故有"八寸"。

余分为 0.0245 立方尺，即 24 立方寸 500 立方分，并非注文所说"二分四厘五毫"。

[七] 今有穿渠上广一丈八尺，下广三尺六寸，深一丈八尺，袤五万一千八百二十四尺。问积几何。

答曰：一千七万四千五百八十五尺六寸。

秋程人功三百尺，问用徒几何。

答曰：　三万三千五百八十二人。功内少一十四尺四寸。

一千人先到，问当受袤几何。

答曰：　一百五十四丈三尺二寸八十一分寸

之八。

术曰：以一人功尺数，乘先到人数为实。以一千人一日功为实。并渠上下广而半之，以深乘之为法。以渠广深之立幂为法。实如法得袤尺。

[八] 今有方垛壔[8]，垛者，垛城也。壔，音丁老切，又音纛，谓以土拥木也。方一丈六尺，高一丈五尺。问积几何。

答曰：三千八百四十尺。

术曰：方自乘，以高乘之，即积尺。

[8] **方垛壔**

"方"即方形。"垛"，柱形。"壔"，乃是"以土拥木也"。"方垛壔"即是正四棱柱。日文称棱柱，圆柱为"角壔"、"圆壔"。

[九] 今有圆垛壔，周四丈八尺，高一丈一尺。问积几何。

答曰：二千一百一十二尺。于徽术，当积二千一十七尺一百五十七分尺之一百三十一。　臣淳风等谨按：依密率，积二千一十六尺。

术曰：周自相乘，以高乘之，十二而一。此章诸术亦以周三径一为率，皆非也。于徽术，当以周自乘，以高乘之，又以二十五乘之，三百一十四而一。此之圆幂，亦如圆田之幂也。求幂亦如圆田，而以高乘幂也。臣淳风等谨按：依密率以七乘之，八十八而一。

[一〇] 今有方亭[9]，下方五丈，上方四丈，高五丈。问积几何。

答曰：一十万一千六百六十六尺太半尺。

术曰：上下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。此章有堑堵、阳马，皆合而成立方。盖说算者乃立棊三品，以效高深之积[10]。假令方亭，上方一尺，下方三尺，高一尺，其用棊也。中央立方

一，四面堑堵四，四角阳马四。上下方相乘为三尺，以高乘之，得积三尺，是为得中央立方一，四面堑堵各一。下方自乘为九，以高乘之，得积九尺，是为中央立方一，四面堑堵各二，四角阳马各三也。上方自乘，以高乘之，得积一尺，又为中央立方一。凡三品棊，皆一而为三。故三而一得积尺。用棊之数，立方三，堑堵、阳马各十二，凡二十七棊。十二与三更差次之，而成方亭者三，验矣[11]。为术又可令方差自乘，以高乘之，三而一，即四阳马也。上下方相乘，以高乘之，即中央立方四面堑堵也。并之，以为方亭积数也[12]。

[9] [方亭]

“方亭”即正四棱台。《缉古算经》称方亭为“方窖”。

[10] 此章有堑堵，阳马，……，以效高深之积

“堑堵”是底为直角三角形的直三棱柱。如第十四问注文“邪解立方得两堑堵”(图 2)。虽复椭方，亦为堑堵。“阳马”乃底为正方形或长方形一侧棱与底垂直的四棱锥。如第十五问注文：“阳马之形、方锥一隅也。”又称：“邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑(图 3)。”“合三阳马而成一立方。”

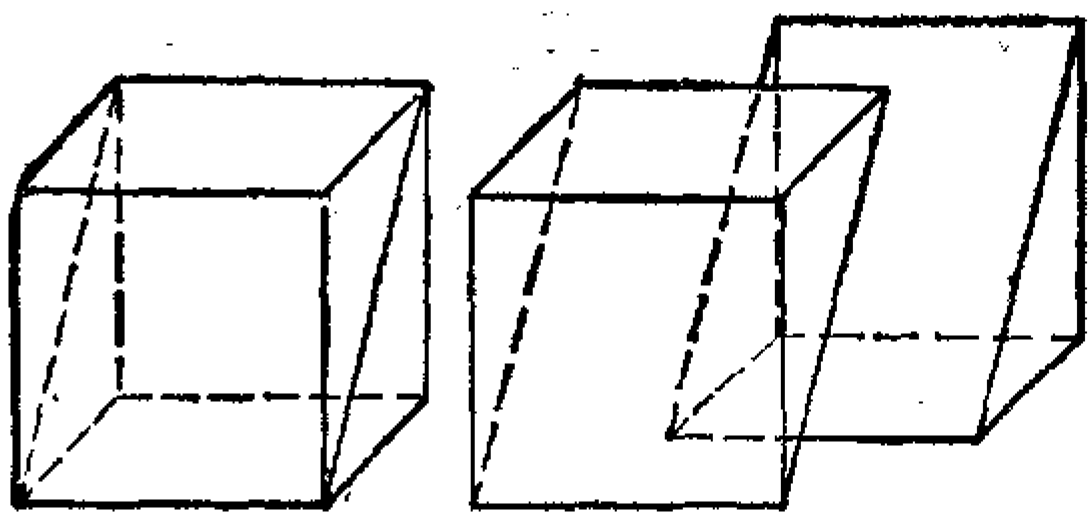


图 2

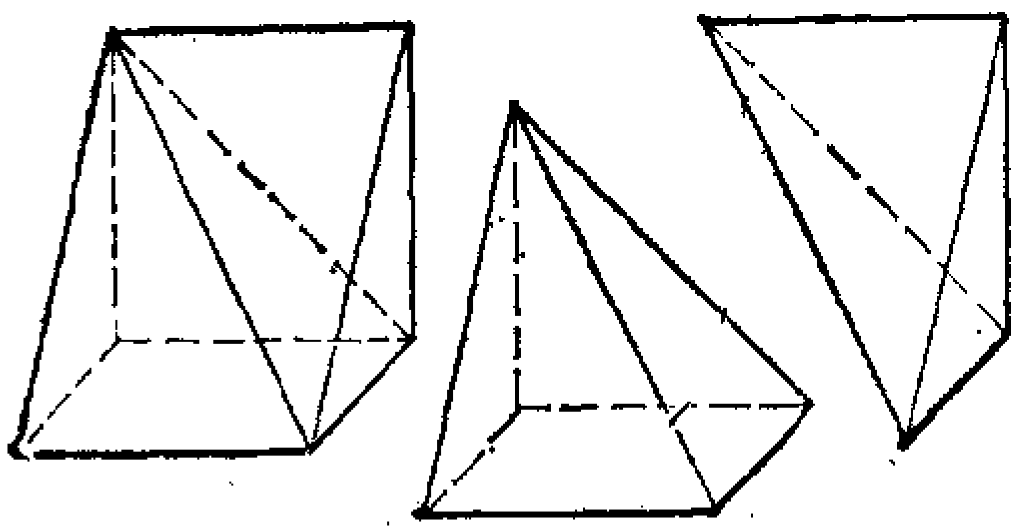


图 3

今有三种模型：立(长)方，壍堵，阳马。表示面积与高或深相乘积的实际意义。即“以效高深之积”。

[11] 假令方亭，上方一尺，……，而成方亭者三，验矣

这是以模型验证方亭，术文的体积公式。即

$$V = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3} \cdot h。$$

设方亭上底边长一尺（a），下底边长三尺（b），高一尺（h）（如图 4）。

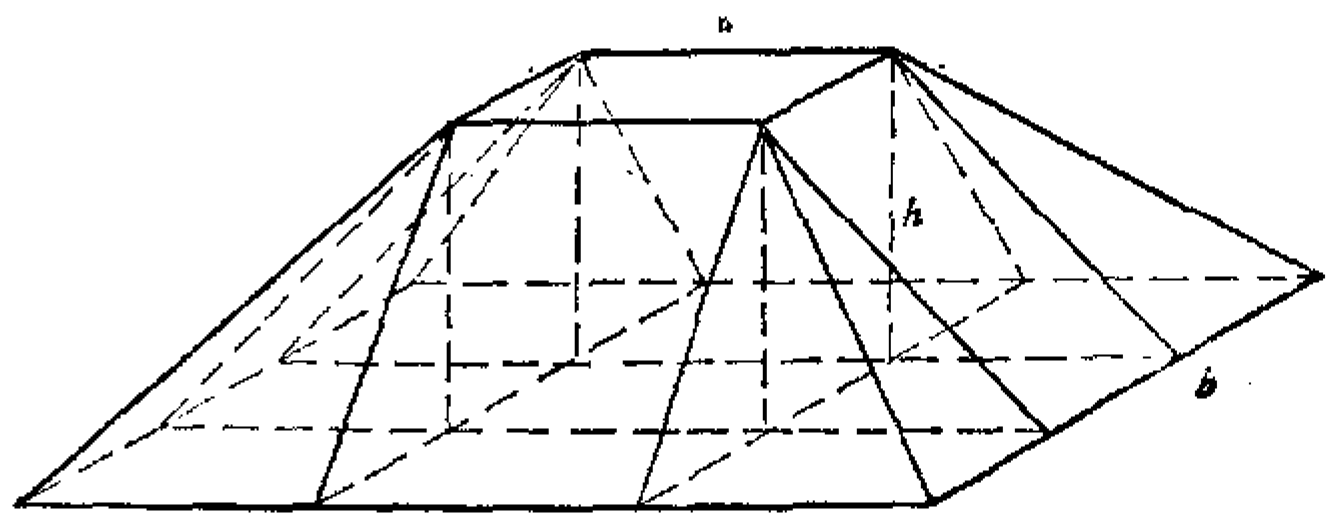


图 4

过上底四边各作一垂面，则得中央立方（V_1）一，四面壍堵（V_2）四，四角阳马（V_3）四。此方亭可视为由这九棊所合成。其体积为：

$$V = V_1 + 4V_2 + 4V_3。$$

今欲以模型验证方亭术文的公式，乃作一长方体，使其长、宽、高分别为 3 尺（b）、1 尺（a）、1 尺（h）．长方体的体积为 3 立方尺（abh）。此长方体也可视为一正方体与四壍堵所合成（图 5）。即得：

$$abh = V_1 + 4V_2。$$

再作一长方体，其长、宽、高分别为 3 尺（b）、3 尺（a）、1 尺（h）。这一长方体也可看作由“中央立方一，四面壍堵各二，四角阳马各三”即二十一棊所合成(图 6)。乃有：$b^2h = V_1 + 8V_2 + 12V_3$。

又作一体积为 1 立方尺的正方体。有 $a^2h = V_1$。

将上述三式相加，则得：$abh + b^2h + a^2h = 3V_1 + 12V_2 +$

$12V_3 = 3V$。故得方亭体积公式为：$V = \dfrac{a^2 + b^2 + ab}{3} \cdot h$。

由“得积九尺”，“得积一尺”可知注文应为“得积三尺”，各版本皆讹作“约积三尺”，今改正。

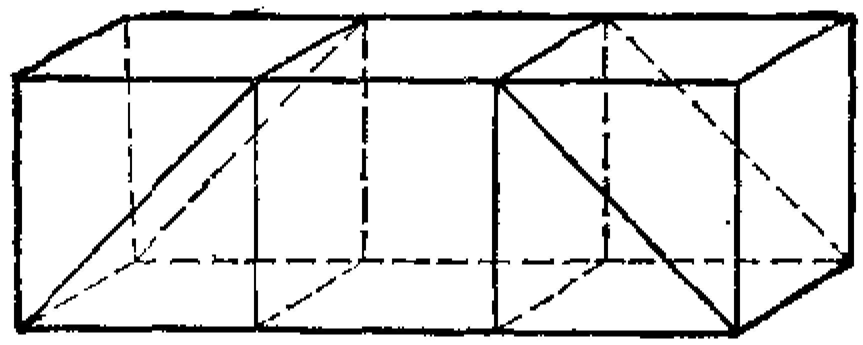


图 5

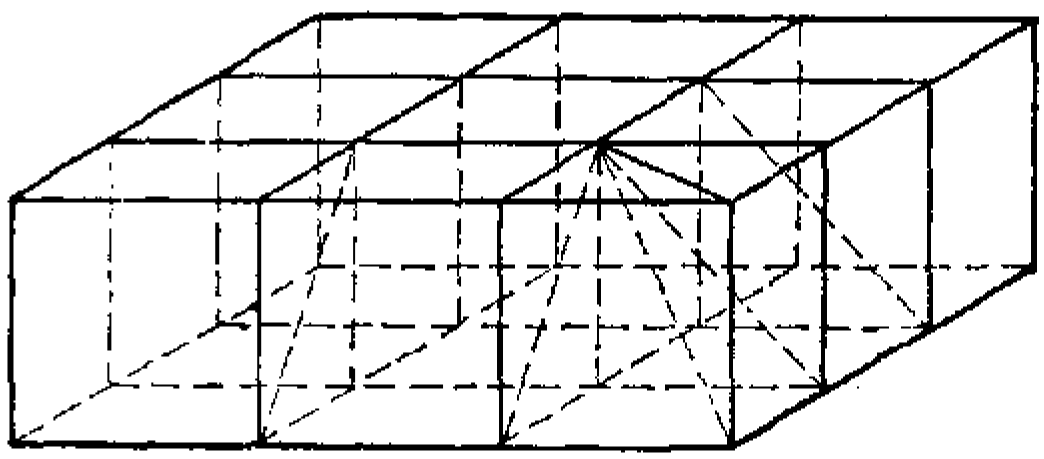


图 6

[12] 为术又可令方差自乘，……，以为方亭积数也

这是刘徽给出方亭求积的又一术。

分割上述方亭，将四角四阳马合成一方锥(图 7)，底的边长为二尺 $(b - a)$，高为一尺 (h)，其体积为：

$$4V_3 = \frac{(b-a)^2}{3} \cdot h。$$

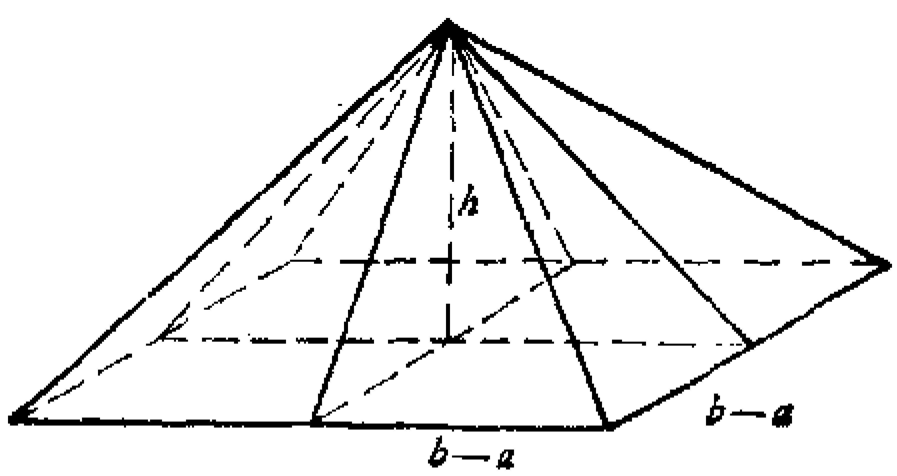


图 7

将中央一立方、四面四壍堵合成一长方体(图8)，长、宽、高各为三尺(b)、一尺(a)、一尺(h)，其体积为：$V_1+4V_2=abh$。

将上二式相加，得方亭体积为：

$$V=\frac{(b-a)^2\cdot h}{3}+abh。$$

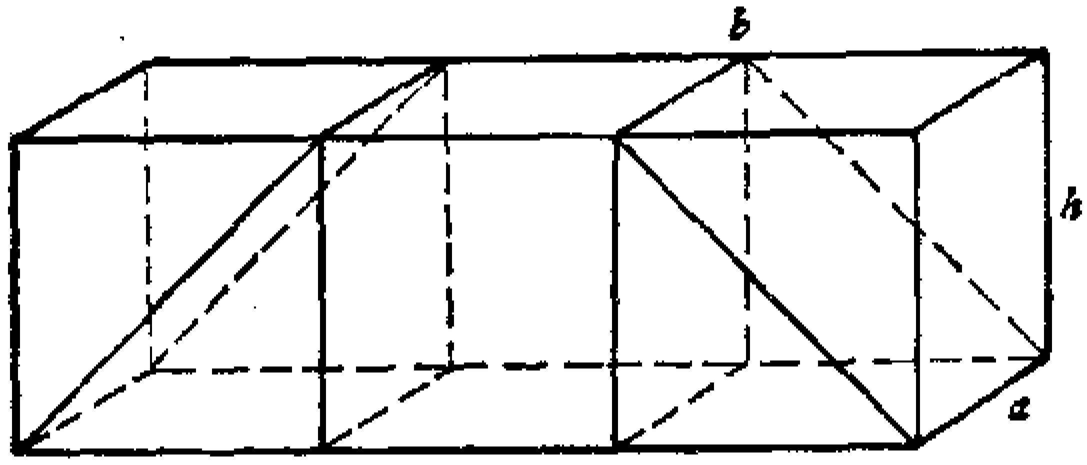


图 8

[一一] 今有圆亭[13]，下周三丈，上周二丈，高一丈。问积几何。

答曰：五百二十七尺九分尺之七。于徽术，当积五百四尺四百七十一分尺之一百一十六也。　按密率，为积五百三尺三十三分尺之二十六。

术曰：上下周相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三十六而一。此术周三径一之义，合以三除上下周，各为上下径，以相乘，又各自乘，并以高乘之，三而一，为方亭之积。假令三约上下周俱不尽，还通之，即各为上下径。令上下径相乘，又各自乘，并以高乘之，为三方亭之积分。此合分母三相乘得九为法除之，又三而一，得方亭之积[14]。从方亭求圆亭之积，亦犹方幂中求圆幂。乃令圆率三乘之，方率四而一，得圆亭之积。前求方亭之积，乃以三而一，今求圆亭之积，亦合三乘之，二母既同，故相准折。惟以方率四乘分母九，得三十六，而连除之[15]。于徽术当上下周相乘，又各自乘，并以高乘之，又二十五乘之，九百四十二而一。此圆亭四角圆杀，比于方亭二百分之一百五十七。为术之意，先作方亭，三而一，则此据上下径为之者，当又以一百五十七乘之，六百而一也。今据周为之，若于圆垛壔又以二十五乘之，三百一十四而一，则先得三圆亭矣。故以三百一十四为九百四十二而一，并除之[16]。　臣淳风等谨按：依密率，以七乘之，二百六十四而一。

[13] 圆亭

“圆亭”就是现今的正圆台。

[14] 此术周三径一之义，……，得方亭之积

刘徽仿“方幂中求圆幂”的方法，由方亭体积推求其内切圆亭体积。这段注文是阐述圆亭的外切方亭体积。

设圆亭上、下底的周长各为 c，C，高为 h，若以 $3(\pi)$ 除上、下底周长，则得上、下底面的直径各为：

$$d=\frac{c}{\pi}=\frac{c}{3};\quad D=\frac{C}{\pi}=\frac{C}{3}。$$

其中 d，D 及 h 分别是外切方亭的上、下底面一边及高，以 V' 表示其体积，则

$$V'=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{c}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2+\frac{c}{3}\cdot\frac{c}{3}\right]\cdot h$$

$$=\frac{d^2+D^2+dD}{3}\cdot h。$$

假令上、下周 c，C 不能整除以 3，则可通分，因得：“三方亭之积分”。即：$3V'=(d^2+D^2+dD)h$，于是：$3^2(3V')=(c^2+C^2+c\cdot C)\cdot h$。

以 9 为法除之，得 $(3V')$。再以 3 除，得“方亭之积”，即是圆亭的外切方亭体积：

$$V'=\frac{1}{3}\cdot\frac{(c^2+C^2+c\cdot C)}{3^2}\cdot h。$$

[15] 从方亭求圆亭之积，……，而连除之

由外切方亭推求圆亭的体积。

设圆亭体积为 V，其外切方亭体积为 V'，因 V 与 V' 之比犹如圆面积与其外切正方形面积之比，即是：$3:4\ (\pi:4)$。故得：

$$V:V'=\pi:4=3:4,\quad 或\quad V=\frac{\pi V'}{4}=\frac{3V'}{4}。$$

即注文“乃令圆率三 (π) 乘之，方率四而一，得圆亭之积”。

由上注可知：

$$V'=\frac{1}{3}\cdot\frac{(c^2+C^2+c\cdot C)h}{3^2}$$

故有：

$$V=\frac{\pi V'}{4}=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{(c^2+C^2+c\cdot C)h}{3^2}\right]$$

$$=\frac{(c^2+C^2+c\cdot C)h}{36}$$

注文"惟以方率四乘分母九"不误。各版本讹作"惟以方幂四乘分母九"。今以意校正。

[16] 于徽术当上下周相乘，……，并除之

若以徽率 $\pi=\frac{157}{50}$ 入算，则圆亭与其外切方亭体积之比为：

$$V:V'=\pi:4=157:200。$$

若"据上下径为之"则圆亭体积当为：

$$V=\frac{\pi}{4}\cdot V'=\frac{157}{200}\cdot\frac{1}{3}(d^2+D^2+dD)h。$$

若"据周为之"，仿圆垛壔（第九问）的方法，"先得三圆亭矣"。即

$$3V=\frac{1}{4\pi}\cdot(c^2+C^2+c\cdot C)h=\frac{25}{314}\cdot(c^2+C^2+c\cdot C)h,$$

故有：

$$V=\frac{25}{942}\cdot(c^2+C^2+c\cdot C)\cdot h。$$

[一二] 今有方锥[17]，下方二丈七尺，高二丈九尺。问积几何。

答曰：七千四十七尺。

术曰：下方自乘，以高乘之，三而一。按此术假令方锥下方二尺，高一尺，即四阳马。如术为之，用十二阳马，成三方锥，故三而一，得方锥也[18]。

[17] 方锥

"方锥"即现今所谓正四棱锥。

[18] 按此术假令方锥下方二尺，……，得方锥也

举例验证方锥术。

设方锥下底一边为二尺 ($2a$)（图 9），高为一尺 (h)。过高及其侧高分割方锥为四阳马，阳马的长、宽、高皆是一尺。若用十二阳马即可组成三方锥。而十二阳马又可并成长、宽都是二尺、高是一尺的长方体，故知一方锥为长方体体积的三分之一。即：

$$V=\frac{1}{3}(2a)^2h。$$

[十三] 今有圆锥[19]，下周三丈五尺，高五丈一尺。问积几何。

答曰：一千七百三十五尺一十二分尺之五。

于徽术，当积一千六百五十八尺三百一十四分尺之十三。依密率，为积一千六百五十六尺八十八分尺之四十七。

术曰：下周自乘，以高乘之，三十六而一。按此术圆锥下周以为方锥下方。方锥下方令自乘，以高乘之，合三而一得大方锥之积。大方锥之积合十二圆锥矣。今求一圆锥，复合十二除之，故令三乘十二得三十六而连除。于徽术，当下周自乘，以高乘之，又以二十五乘之，九百四十二而一。圆锥比于方锥，亦二百分之一百五十七。令径自乘者，亦当以一百五十七乘之，六百而一。其说如圆亭也[20]。　臣淳风等谨按：依密率，以七乘之，二百六十四而一。

[19] 圆锥

“圆锥”即是正圆锥。

[20]* 按此术圆锥下周以为方锥下方，……，其说如圆亭也

刘徽仿照以方亭体积求圆亭体积的方法，论证圆锥体积求法。

以圆锥下底之周 (C) 为下底一边（图 10），以圆锥的高 (h) 为高，作一大方锥，则大方锥体积为：$V'=\frac{1}{3}C^2\cdot h$。

---

* 本注曾参考郭书春：刘徽的体积理论，科学史集刊，第 11 期。

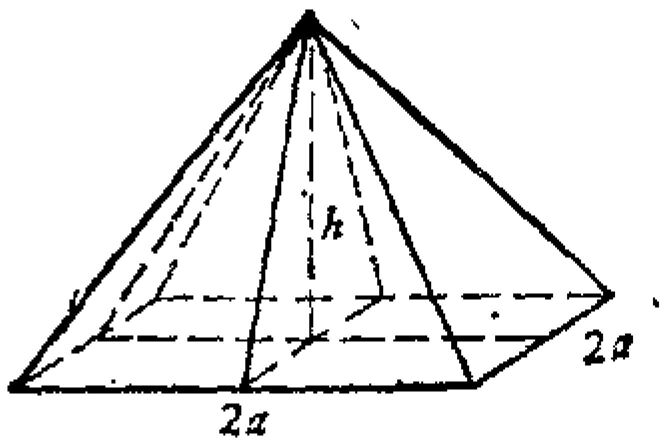


图 9

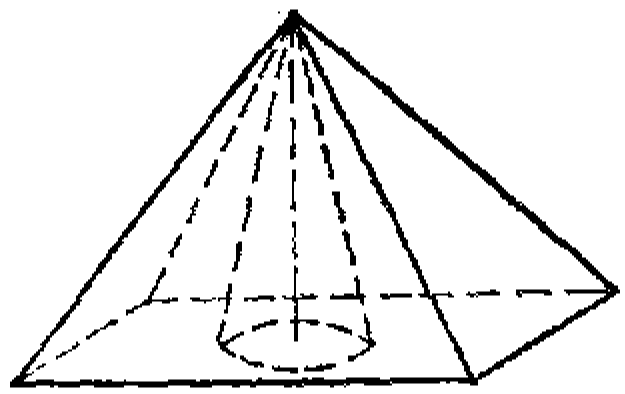


图 10

又因大方锥体积是圆锥体积的十二倍，即： $V' = 12 \cdot V\ (= 4\pi \cdot V)$。

所以圆锥体积为： $V = \frac{1}{12} \cdot V' \left(= \frac{1}{4\pi} \cdot V' \right)$。

因而：

$$V = \frac{1}{4\pi} \cdot V' = \frac{1}{12} V' = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{3} C^2 h \right) = \frac{1}{36} C^2 h。$$

即注文"今求一圆锥，复合十二除之，故令三乘十二得三十六而连除"。若用徽术 $\pi = \frac{157}{50}$ 计算，则得：

$$V = \frac{1}{4\pi} V' = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{3} \cdot C^2 h \right) = \frac{25}{942} \cdot C^2 h。$$

若以圆锥与其外切方锥之比（$V:V_1 = 157:200$）计算，则得：

$$V = \frac{157}{200} \cdot V_1 = \frac{157}{200} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot d^2 h \right) = \frac{157}{600} \cdot d^2 h。$$

注文"大方锥之积合十二圆锥矣"，"今求一圆锥"不误。钱校本于两"圆"字下各脱落一"锥"字。今校补。

[一四] 今有堑堵，下广二丈，袤一十八丈六尺，高二丈五尺。问积几何。

答曰：四万六千五百尺。

术曰：广袤相乘，以高乘之，二而一。邪解立方得两堑堵，虽复椭方，亦为堑堵，故二而一。此则合所规棊推其物体，盖为堑上叠

也。其形如城，而无上广，与所规棊形异而同实[21]。未闻所以名之为壍堵之说也。

[21] 此则合所规棊推其物体，……，与所规棊形异而同实

"规棊"即是原来规划的模型(如图 2)。

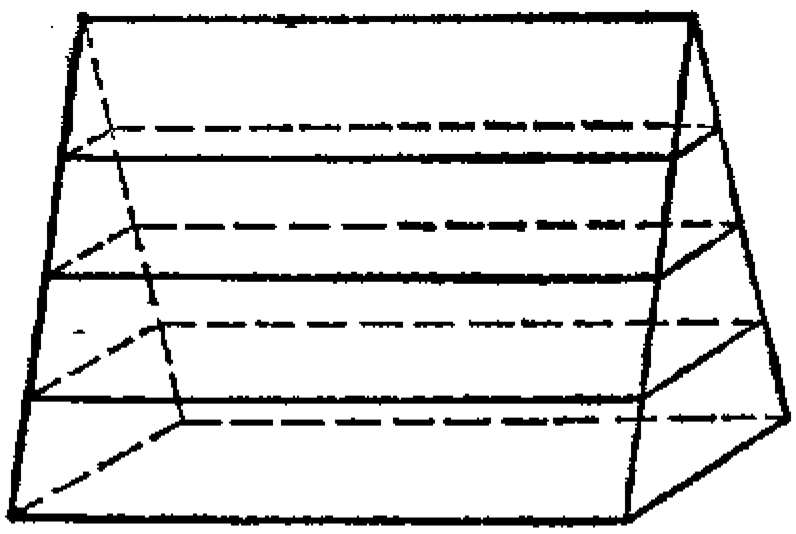


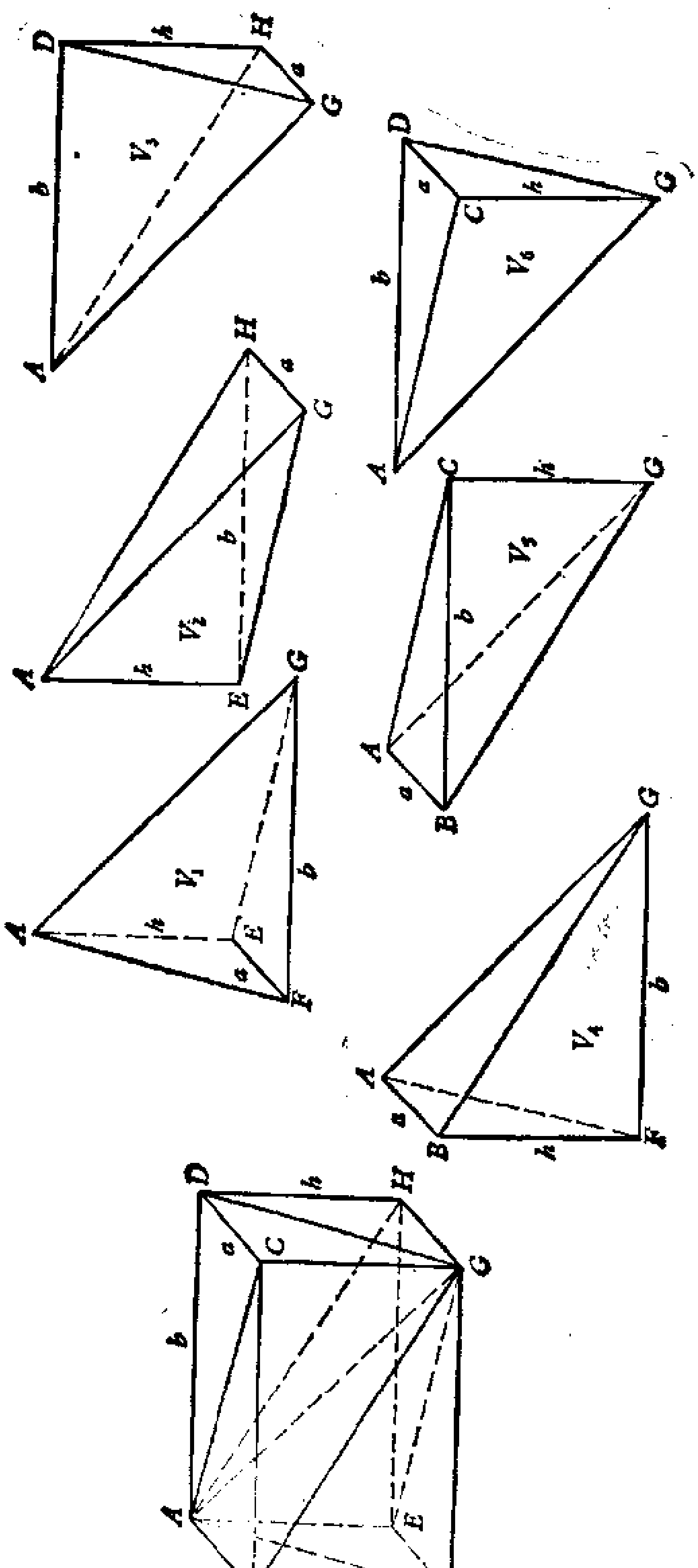
图 11

壍堵的形状可看作是由大、小"壍"上下累积而成。故注文说："盖壍上叠也。"又可视壍堵为无上广之"城"(如图 11)。若用现今说法，壍堵的形状即是底为等腰三角形的直棱柱。这种壍堵虽与规棊(邪解立方得两壍堵)的形状不同，但其体积则是一样。

[一五] 今有阳马，广五尺，袤七尺，高八尺。问积几何。

答曰：九十三尺少半尺。

术曰：广袤相乘，以高乘之，三而一。按此术，阳马之形，方锥一隅也。今谓四柱屋隅为阳马[22]。假令广袤各一尺，高一尺，相乘之，得立方积一尺。邪解立方得两壍堵。邪解壍堵，其一为阳马，一为鳖臑，阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。合两鳖臑成一阳马，合三阳马而成一立方，故三而一[23]。验之以棊，其形露矣。悉割阳马，凡为六鳖臑。观其割分，则体势互通，盖易了也。其棊或修短，或广狭，立方不等者，亦割分以为六鳖臑。其形不悉相似，然见数同，积实均也。鳖臑殊形，阳马异体。然阳马异体，则不可纯合。不纯合，则难为之矣[24]。何则？按邪解方棊以为壍堵者，必当以半为分，邪解壍堵以为阳马者，亦必当以半为分，一纵一横耳。设阳马为分内，鳖臑为分外，棊虽或随修短广狭犹有此分常率，知殊形异体亦同也者，以此而已[25]。其使鳖臑广、袤、高各二尺，用壍堵、鳖臑之棊各二，皆用赤棊。又使阳马之广、袤、高各二尺。用立方之棊一，壍堵，阳马之棊各二，皆用黑棊。棊之赤黑，接为壍堵，广、袤、高各二尺[26]。于是中效其广、袤，又中分其高，令赤、黑壍堵各自适当一方，高一尺方一尺，每二分鳖臑则一阳马也。其余两端，各积本体，合成一方焉。是为别种而方者率居三，通其体而方者率居一。虽方随棊改，而固有常然之势也[27]。按余数具而可知者有一、二分之别，即一、二之为率定矣。其于理也岂虚矣。若为数而穷之，置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也。半之弥少，其余



D h H a G V₃ b A
H a G b V₂ A h E
G V₁ A h E a F b
D a C h G b V₆ A
C h G V₅ b A a B
G V₄ b A a B h F
D h H a C G b A E B F

图 12

弥细。至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉[28]。数而求穷之者，谓以情推，不用筹算。鳖臑之物，不同器用。阳马之形，或随修短广狭。然不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥亭之类，功实之主也[29]。

[22] 按此术，阳马之形，方锥一隅也。今谓四柱屋隅为阳马

过方锥的高及其侧高作截面，可将方锥分割为四阳马。即"阳马之形，方锥一隅也"。可见原来的阳马其底面是一正方形。"今谓四柱屋隅为阳马"，是指房屋脊顶之一角。也就是底面为长方形一侧棱与底面垂直的四棱锥。

[23] 假令广袤各一尺，……，故三而一

"广袤相乘，以高乘之"即是长方体体积。设广、袤、高都是一尺的立方体，其体积当为一立方尺。

因"阳马之形，方锥一隅也"，"邪解立方得两堑堵。邪解堑堵其一为阳马，一为鳖臑(四面都是句股形的四面体称为鳖臑)"。又因阳马与鳖臑体积之比为 2:1，即"不易之率也。"故可合二鳖臑为一阳马，合三阳马为一立方。于是，欲求阳马体积，应以广、袤、高相乘，"三而一"。

[24] 验之以棊，其形露矣。……，则难为之矣

上文是"析理以辞"，此则"验之以棊"。

设三度为 a, b, $h(a=b=h=1$ 尺) 的正方体，分割此正方体为二堑堵，又分割二堑堵为二阳马与二鳖臑，再分割阳马为鳖臑，共得六鳖臑，即"凡为六鳖臑"。由于这六鳖臑的底、高对应相等，其体积也等。即"体势互通，盖易了也"。

如果对于三度 a, b, h 不等的长方体来说，虽然也可以把它分割为六鳖臑(图 12)，但其形状却全不相似。由于六个鳖臑的三度分别对应相等，按理其体积也应相等。可是，因鳖臑的形状不同，则不能重合。不能重合，则难以证明。即注文所说："其形不悉相似，然见数同，积实均也。鳖臑殊形，阳马异体。然阳马异体，则不可纯合。不纯合则难为之矣。"

[25] 按邪解方棊以为堑堵者，……，以此而已

这段系注解阳马与鳖臑体积之比为 2:1。

过对角面作截面可分割长方体为两壍堵，再过另一对角面作截面则可分割两壍堵为两阳马和两鳖臑。因过对角面邪解，故称“以半为分”，因邪解的方向不同，乃是“一从一横耳”(如图 13)。

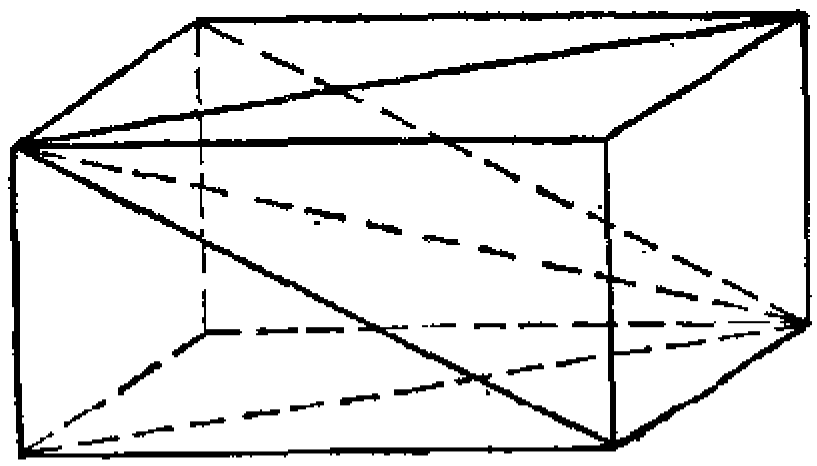


图 13

所分割得的阳马称为“分内”，鳖臑称为“分外”。

所分割得的阳马、鳖臑的体积分别设为：V_1，V_2，虽然其三度各不相同，但仍然有：$V_1:V_2=2:1$。故注文说：“綦虽或随修短广狭犹有此分常率(2:1)，知殊形异体亦同也者，以此而已。”

钱校本于“阳马为内分”下依李潢补一“綦”字，并使“綦虽随修短广狭”之“綦”字，与上句连读，都未必符合刘注原意。依华道安(D. B. Wagner)今一并校正。

[26]* 其使鳖臑广、袤、高各二尺，……，接为壍堵，广、袤、高各二尺

刘徽用綦先验证三度相等的情况，然后再考虑三度不等的情况。

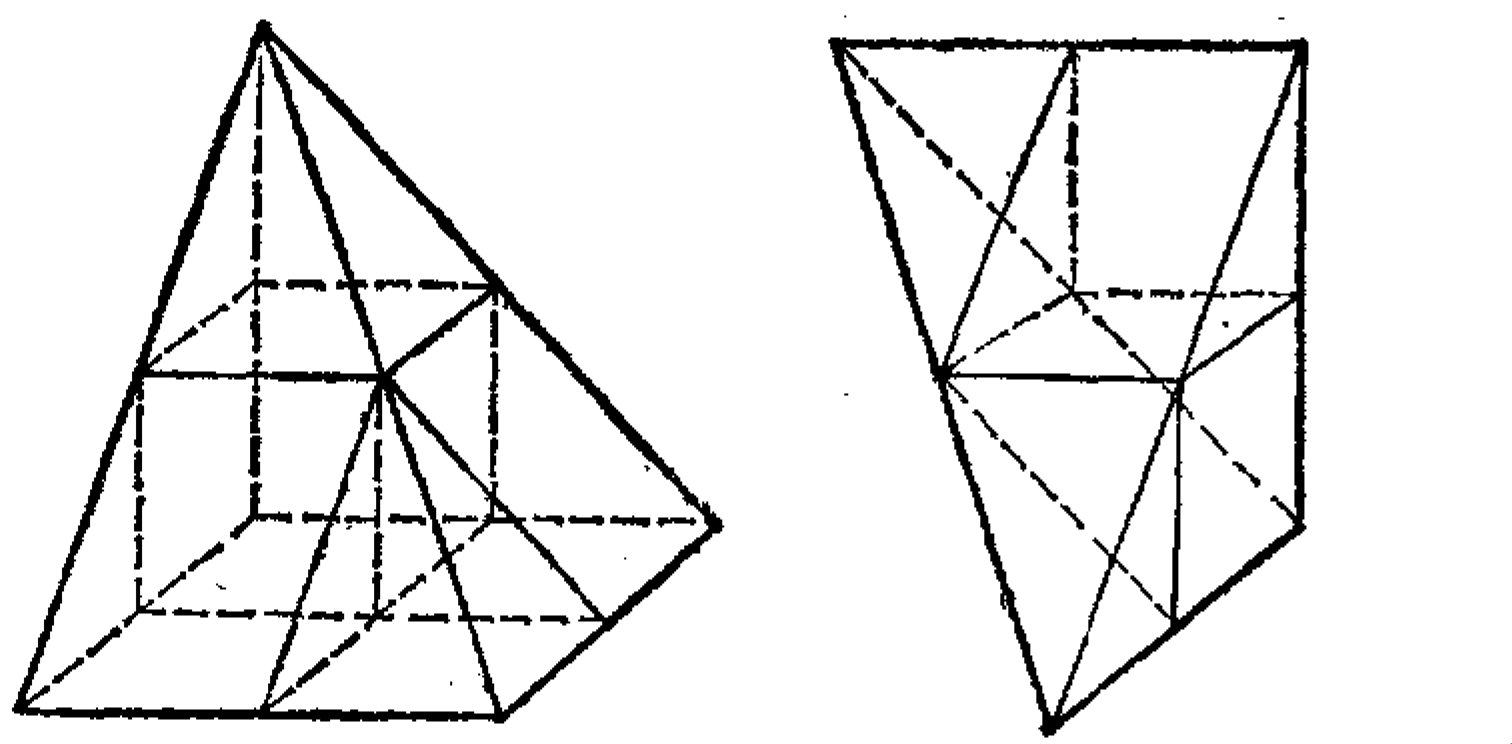


图 14

---

* 本注曾参考郭书春：刘徽的体积理论，科学史集刊，第 11 期。

设一鳖臑，其广、袤、高都是二尺。用两个赤色的堑堵棊、鳖臑棊表示设的鳖臑（图 14）。即注文“用堑堵、鳖臑之棊各二，皆用赤棊”。

又设一阳马，其广、袤、高都是二尺。用一个黑立方棊、两个黑堑堵棊、两个黑阳马棊表示所设的阳马（图 14）。即注文“用立方之棊一，堑堵、阳马之棊各二，皆用黑棊”。

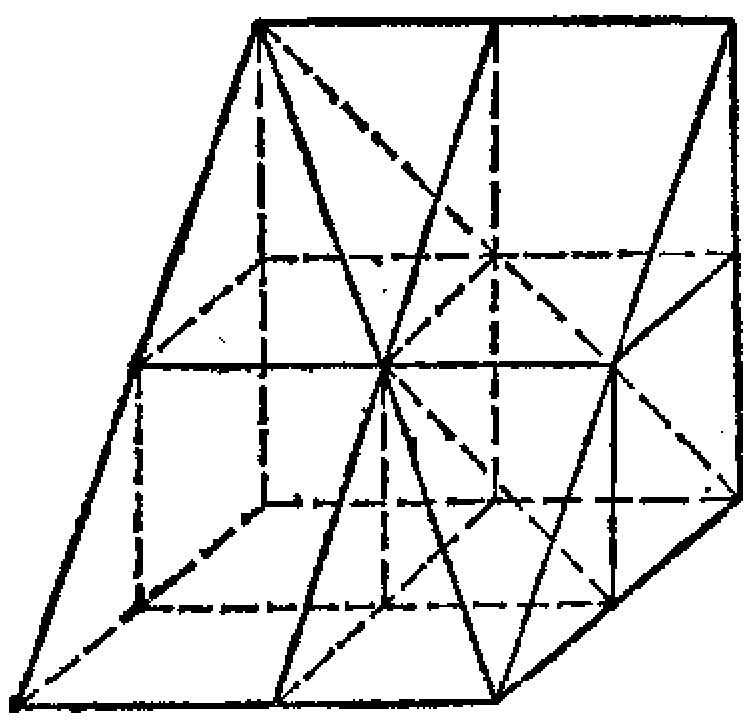


图 15

然后把赤、黑棊所表示鳖臑及阳马连接在一起，合成一个堑堵(图 15)，其广、袤、高仍然都是二尺。即注文“棊之赤黑，接为堑堵，广、袤、高各二尺”。

[27]* 于是中效其广、袤，又中分其高，……，而固有常然之势也

过上述堑堵的广、袤、高的中点作截面，将堑堵分割成六部份。其中之一是由阳马分割得的黑立方；之二是由阳马、鳖臑分割得的赤、黑堑堵合成的立方；之三及之四是由阳马、鳖臑分割得的赤、黑堑堵；之五及之六是由阳马、鳖臑分割得的黑阳马、赤鳖臑合成的两个堑堵。

将分割得的赤、黑堑堵合成一立方，其高为一尺底面为一尺的正方形。即“令赤、黑堑堵各自适当一方，高一尺方一尺”。

分割之后，得到一个黑方和两个由赤、黑堑堵合成的立方，共计三立方(图 16)。由这三立方来看，显见由鳖臑组成立方的二倍等于由阳马组成的立方，也就是赤棊的二倍等于黑棊。所以注文说：“每二分鳖臑则一阳马也。”

分割堑堵以后，除此三立方外，还剩余四棊，就是由黑阳马与赤鳖臑合成的两个堑堵。这两个堑堵也可以合成一立方。即注文

* 本注曾参考郭书春：刘徽的体积理论，科学史集刊，第 11 期。

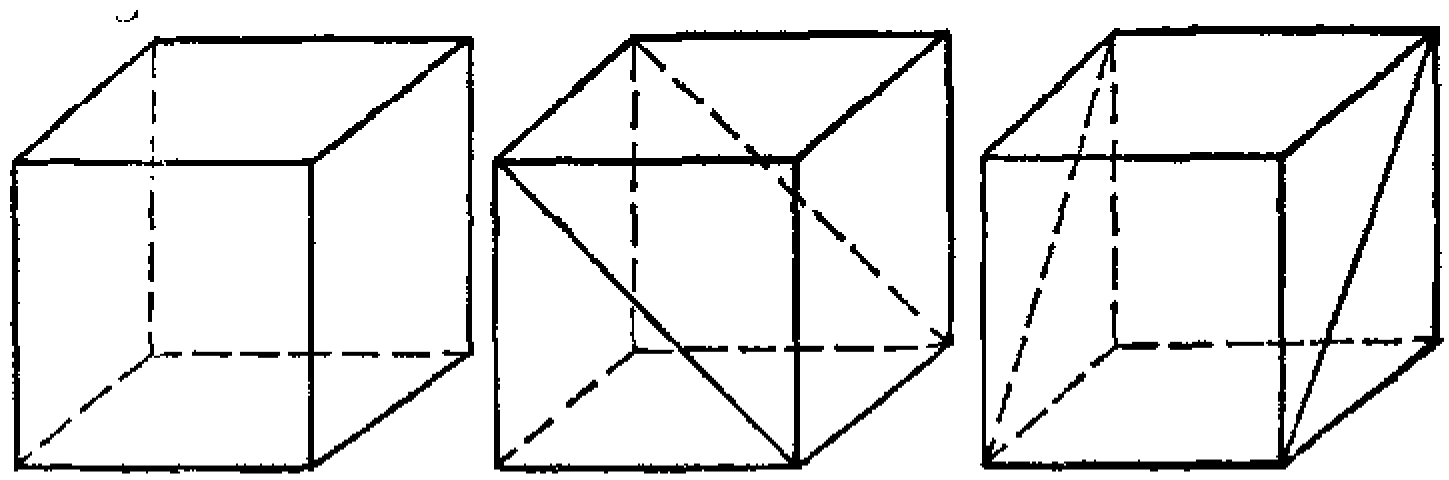


图 16

“其余两端，各积本体，合成一方焉”。

上述的一个黑立方和两个由赤、黑壍堵合成的立方，共三立方。因合成这三个立方的棊都与所设的鳖臑、阳马不相似，刘徽便称为“别种”立方，所以注文说“是为别种而方者率居三”。由“其余两端”“合成一方焉”的立方，是由黑阳马、赤鳖臑合成两壍堵再合成的立方，因这些棊分别与所设的阳马、鳖臑相似，刘徽便称为“通其体”立方，所以注文说“通其体而方者率居一”。也就是说，“别种”立方与“通其体”立方之比为 3:1。这是分割三度相等的壍堵所得的比，如果分割三度不等的壍堵，仍然可以得到“别种”长方与“通其体”长方之比为 3:1。因之注文说：“虽方随棊改，而固有常然之势也。”

注文“高一尺方一尺”是说立方的数据，显见钱校本误为“高二尺方二尺”。又“中效其广”下漏一“袤”字，“其余两棊”之“棊”字，应是“端”字。今一并校正。

[28]* 按余数具而可知者有一、二之别，……，安取余哉

李潢说：“‘按余数具而可知者’至‘安取余哉’疑文有错误，不敢强为之说。”但是钱校本也不知所论何事，未敢改动。便说：“今悉仍旧贯，未予校勘。”今试释如下：

根据上注所说，分割壍堵后得“别种”立方三、“通其体”立方一，共计四立方。在这四立方的三个“别种”立方中，鳖臑的两倍等于一个阳马，也即鳖臑与阳马之比为 1:2。这种鳖臑与阳马之比等于 1:2 是正确无误的，所以注文说“按余数具而可知者有一、二

* 本注曾参考郭书春：刘徽的体积理论，科学史集刊，第 11 期。

分之别，即一、二之为率定矣”。

如果对于合成“通其体”立方的两个壍堵进行分割，由每个壍堵仍然都可得到四立方，其中“别种”立方三，“通其体”立方一。在这四立方的三个“别种”立方中，可知鳖臑与阳马之比仍是 1:2。因为是分割两个壍堵，共得八立方，其中“别种”立方六，“通其体”立方二。在这八立方的六个“别种”立方中，也即在四分之三个立方中，可知鳖臑与阳马之比仍是 1:2。然后对于合成二个“通其体”立方的四个壍堵再进行分割，……。就这样无限分割下去，所得到合成“通其体”立方的壍堵个数，逐次成二倍地增加，而这种壍堵的体积则逐次成八倍地减小。如果分割次数无限增加，这种壍堵体积则无限缩小。所以注文说“若为数而穷之，置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也。半之弥少，其余弥细。至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉”。

可以看出，刘徽在求推鳖臑与阳马体积之比时，使用了一次极限。如果设原来壍堵体积为 V，第 n 次分割所得 2^n 个壍堵的体积则为：

$$2^n \cdot V_n = \frac{1}{8^n} V。$$

当 $n \to \infty$ 时，显见 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \cdot V_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{8^n} \cdot V = 0$。

[29] 数而求穷之者，……，功实之主也

“数而求穷之者，谓以情推，不用筹算”一语大意为：凡穷究某类数值时，可以按理论加以推导，不必用筹计算。

“鳖臑之物”以下，是说明不拘三度是否相等，由鳖臑、阳马可以推求方锥、方亭、圆锥、圆亭的体积，而鳖臑、阳马乃是锥、亭程功积实的基础。

[一六] 今有鳖臑下广五尺，无袤，上袤四尺，无广，高七尺。问积几何。

答曰：二十三尺少半尺。

术曰：广袤相乘，以高乘之，六而一。按此术：臑者，臂骨也。或曰：半阳马其形有似鳖肘，故以名云。中破阳马得两鳖臑，鳖臑之见数即阳马之半数。数同而实据半，故云六而一，即得[30]。

[30] 中破阳马得两鳖臑，……，故云六而一，即得

鼈是鳖的异体字。臑即是肘。胡培翚《正义》引《礼经释例》说："肩下谓之臂，臂下谓之臑。"与刘注所说"臑者，臂骨也"似有出入。

鳖臑即现今所谓各面都是句股形的四面体。

阳马的体积等于广、袤、高相乘积的三分之一。因中分阳马为等积的两鳖臑，故术文说："广、袤相乘，以高乘之，六而一。"

[一七] 今有羡除[31]，下广六尺，上广一丈，深三尺，末广八尺，无深，袤七尺。问积几何。

答曰：八十四尺。

术曰：并三广，以深乘之，又以袤乘之，六而一。

按此术，羡除，实隧道也。其所穿地，上平下邪似两鳖臑夹一堑堵，即羡除之形。假令用此棊：上广三尺，深一尺，下广一尺，末广一尺，无深。袤一尺。下广、末广皆堑堵之广。上广者，两鳖臑与一堑堵相连之广也。以深、袤乘，得积五尺，鳖臑居二，堑堵居三，其于本棊皆一而为六。故六而一[32]。合四阳马以为方锥。邪画方锥之底，亦令为中方。就中方削而上合，全为方锥之半。于是阳马之棊悉中解矣。中锥离而为四鳖臑焉。故外锥亦为四鳖臑。虽背正异形，与常所谓鳖臑参不相似，实则同也。所云夹堑堵者，中锥之鳖臑也[33]。凡堑堵上袤短者，连阳马也。下袤短者，与鳖臑连也。上下两袤相等者，亦与鳖臑连也。并三广，以高、袤乘，六而一，皆其积也。今此羡除之广，即堑堵之袤也[34]。按此本是三广不等，即与鳖臑连者，别而言之：中央堑堵广六尺，高三尺，袤七尺。末广之两旁，各一小鳖臑，高、袤皆与堑堵等。令小鳖臑居里，大鳖臑居表，则大鳖臑出楕皆方锥，下广二尺，袤六尺，高七尺。分取其半，则为袤三尺，以高广乘之，三而一，即半锥之积也。邪解半锥得此两大鳖臑，求其积亦当六而一。合于常率矣[35]。按阳马之棊两邪，棊底方，当其方也，不问旁角而割之，相半可知也。推此上连无成不方，故方锥与阳马同实。角而割之者，相半之势。此大小鳖臑可知更相表里，但体有背正也[36]。

[31] 羡除

"羡除"乃是三侧面都是等腰梯形，其他两面为句股形之五面体(如图 17)。

李籍《音义》称："羡，延也；除，道也。"羡字也与埏字通。《后汉书·陈蕃传》："民有赵宣，葬亲不闭埏隧。"李贤注称："埏隧，今人墓道也。"刘徽注称："羡除，实隧道也。"一般称坡道或台阶为除，斜而长者则称为羡。可见羡除即是斜而长的坡道或墓道。

[32] 假令用此棊；……，故六而一

这是以模型验证羡除术

如图 18，设羡除上广为三尺 $(a+b+c)$，深为一尺 (h)，下广一尺 (e)，末广一尺 (f)，袤一尺 (d)。过羡除背面两侧棱作截面，分割为一堑堵与两鳖臑，显见其"下广 (e)，末广 (f) 皆堑堵

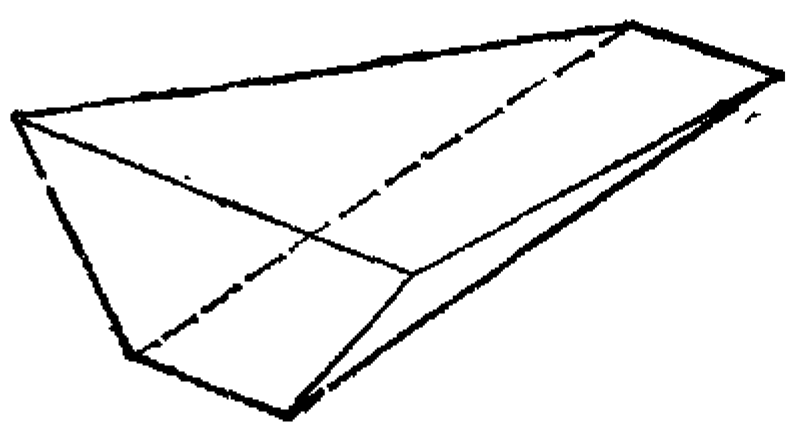


图 17

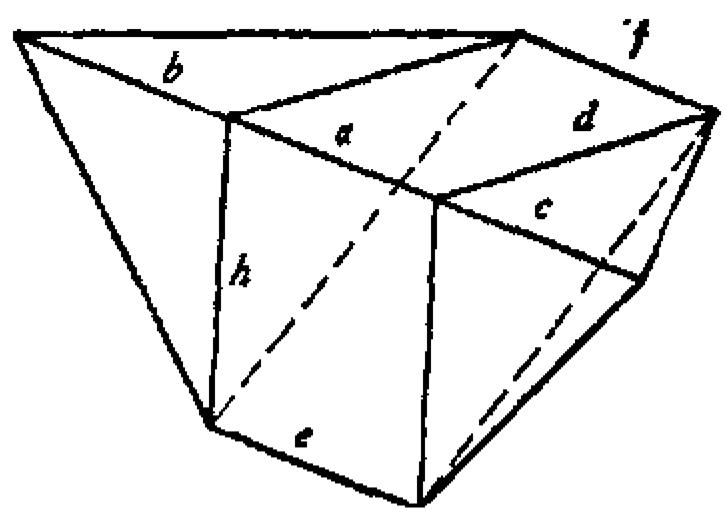


图 18

之广"，其上广 $(a+b+c)$ 乃两鳖臑与一堑堵三广的和。按术计算，得：

$$V'=(3+1+1)\times 1\times 1=5,$$

或

$$V'=[(a+b+c)+e+f]hd。$$

因 a, e, f 是堑堵的广，故 $a=e=f$，而 b, c 为鳖臑之广，则 $b=c$。上式可为：

$$V'=2ehd+3ahd。$$

由 $2ehd, 3ahd$ 可知鳖臑、堑堵体积之比为 2∶3，即"鳖臑居二，堑堵居三"。又因 $2ehd$，$3ahd$ 分别是二鳖臑、一堑堵体积的六倍，

故注称："其于本綦皆一而为六，故六而一"。得羡除体积为：

$$V=\frac{V'}{6}=\frac{2ehd+3ahd}{6}$$

$$=\frac{1}{6}[(a+b+c)+e+f]hd=\frac{5}{6}。$$

[33] 合四阳马以为方锥。……中锥之鳖臑也

由羡除分割得鳖臑的形状，即是"中锥之鳖臑"。

将四阳马合于一起，则成一方锥。于方锥的底邪画一内接正方形称为中方。过顶及中方各边作截面，截面以内的锥称为中锥，其外称为外锥。显见中锥体积为方锥体积的一半。若将中锥分离可得四鳖臑，而外锥也可分离为四鳖臑，中锥鳖臑与外锥鳖臑一背一正。前者，一侧棱垂直于底面；后者其高落于体外。故称："与常所谓鳖臑参不相似，实则同也"。(图 19)

前注文"似两鳖臑夹一壍堵"的"鳖臑"，就是"中锥之鳖臑也"。

注文"故外锥亦为四鳖臑"。各本于"外锥"后衍"之半"二字。今校删。

[34]* 凡壍堵上袤短者，……，即壍堵之袤也

据"今此羡除之广，即壍堵之袤也"可知，壍堵的袤与羡除的广在一直线上。

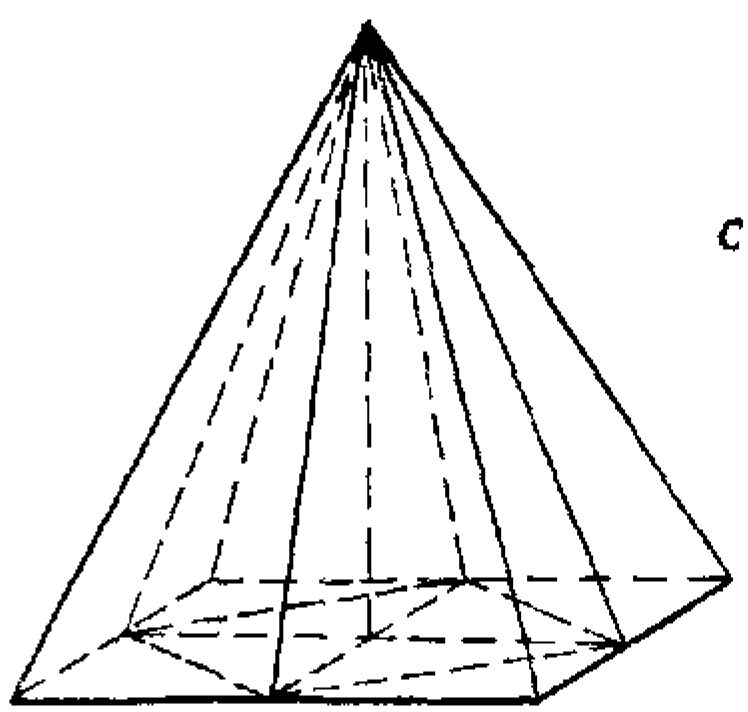


图 19

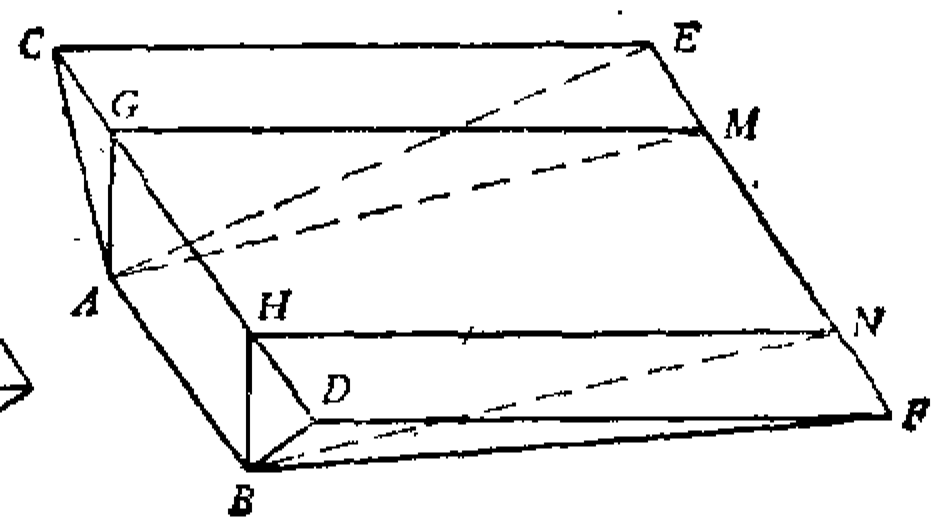


图 20

* 本注曾参考郭书春同志有关论述

"凡堑堵上袤（AB）短者，连阳马也"。即堑堵上袤比羡除上广短，是一堑堵与二阳马的合成体（如图 20）。

"下袤（CD）短者，与鳖臑连也"。即是堑堵的下袤比羡除下广短，是一堑堵与二鳖臑的合成体（如图 21）。

"上、下两袤相等者，亦与鳖臑连也"。即是羡除的上下两广（CD）、（EF）等长，是一堑堵与二鳖臑的合成体（如图 22）。

虽然上述三种羡除的形状不同，但其体积的计算方法却是一样。即"并三广，以高、袤乘，六而一"。

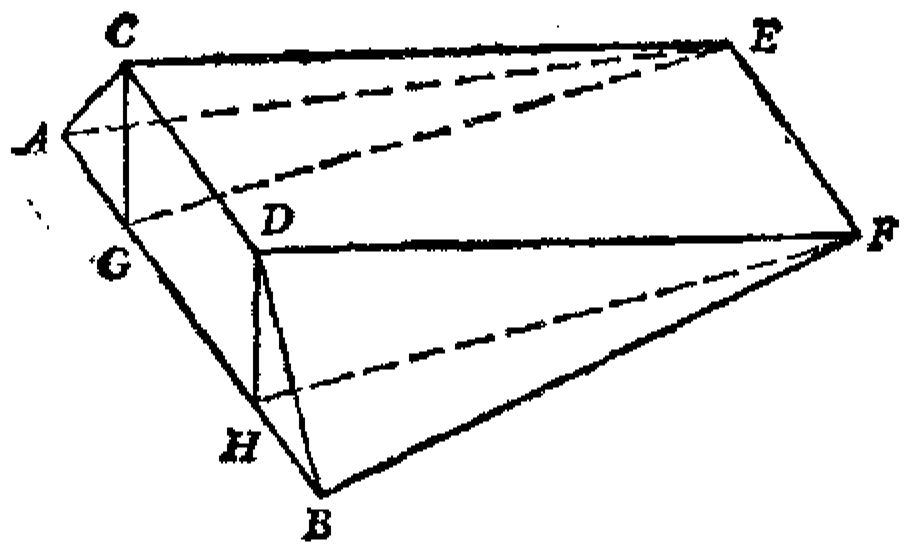


图 21

今将其计算方法分别说明如下：

如图 20，设中夹堑堵体积为 V_1，阳马体积为 V_2，则得：

$$V_1 = \frac{1}{2}[AB \cdot BH \cdot HN],$$

$$V_2 = \frac{1}{3}[DH \cdot BH \cdot HN],$$ 于是得羡除体积为：

$$V = V_1 + 2V_2 = \frac{1}{2}[AB] \cdot [BH \cdot HN] + \frac{2}{3}[DH \cdot BH \cdot NH]$$

$$= \frac{1}{6}[AB + CD + EF][BH \cdot HN]。$$

如图 21，设中夹堑堵体积为 V_1，鳖臑体积为 V_2，则得：

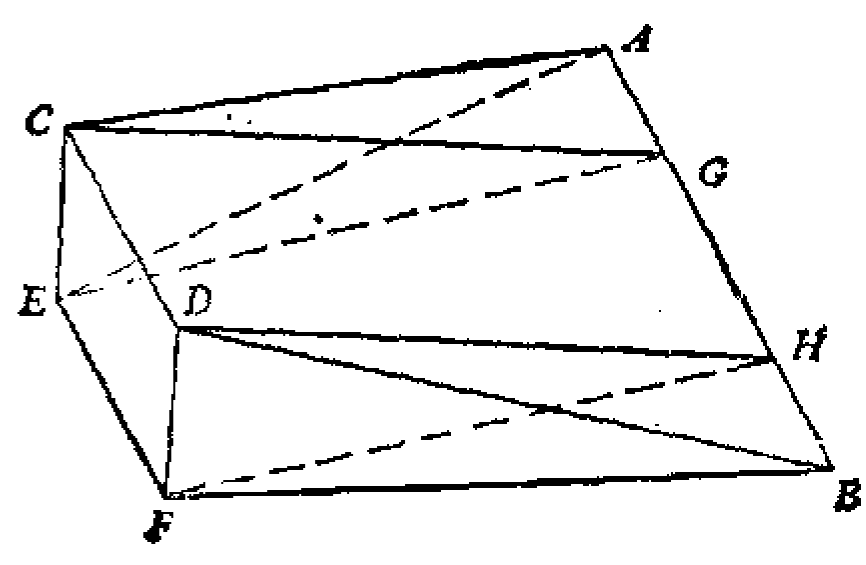


图 22

$V_1 = \frac{1}{2}[CD \cdot DH \cdot DF]$，　$V_2 = \frac{1}{6}[HB \cdot DH \cdot DF]$，　于是得羡除体积为：

$$V = V_1 + 2V_2 = \frac{1}{2}[CD][DH \cdot DF] + \frac{2}{6}[HB][DH \cdot DF]$$

$$= \frac{1}{6}[AB + CD + EF][DH \cdot DF]。$$

如图 22，设中夹堑堵体积为 V_1，鳖臑体积为 V_2，则得：

$V_1 = \frac{1}{2}[CD \cdot DF \cdot HD]$，$V_2 = \frac{1}{6}[HB \cdot DF \cdot HD]$，于是得羡除体积为：

$$V = V_1 + 2V_2 = \frac{1}{2}[CD][DF \cdot HD] + \frac{2}{6}[HB][DF \cdot HD]$$

$$= \frac{1}{6}[AB + CD + EF][DF + HD]。$$

注文"下两袤相等者"之前，钱校本脱落一"上"字，今校补。

[35]* 按此本是三广不等，……，合于常率矣

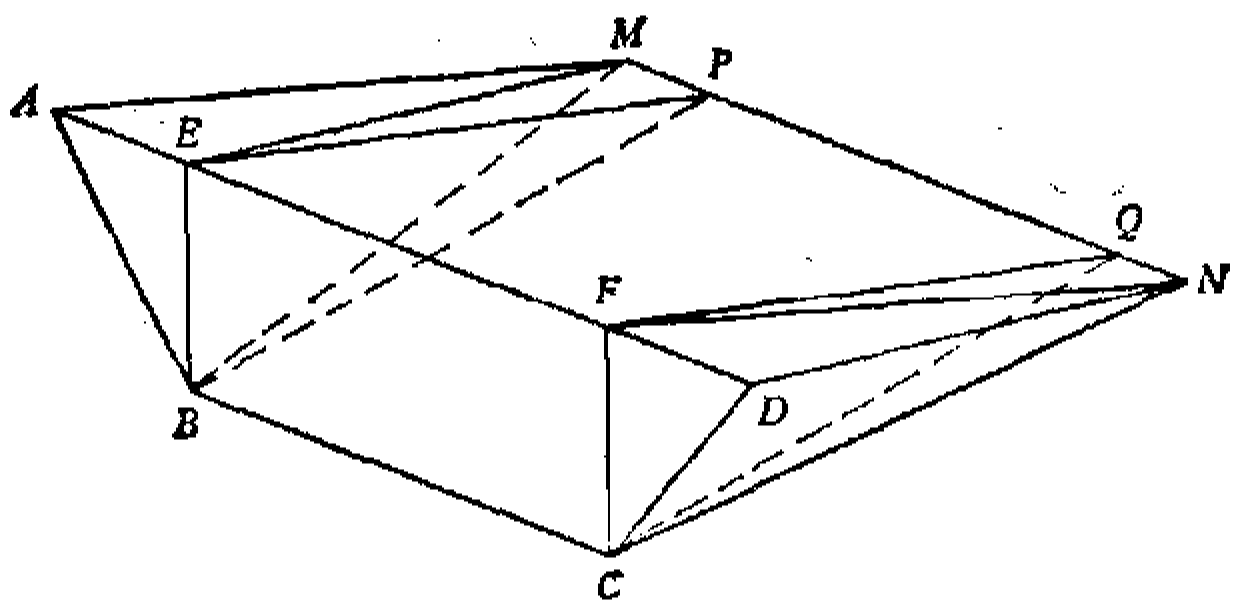


图　23

"按此本是"以下，是注解本问所论的羡除形状。

因本问的羡除三广不等，故知此羡除乃是一堑堵与四鳖臑的合成体(如图 23)。

---

* 本注曾参考郭书春同志有关论述

由于羡除末广 MN 两旁各一小鳖臑（$B\text{-}EPM$，$C\text{-}FQN$），其高（EB，FC）、袤（EP，FQ）与堑堵对应的高（EB，FC）、袤（EP，FQ）相等。故称："末广之两旁，各一小鳖臑，高、袤皆与堑堵等。"

小鳖臑以外，各有一大鳖臑（$M\text{-}EAB$，$N\text{-}FDC$），即称："小鳖臑居里，大鳖臑居表。"

下文解说大鳖臑形状及其算法。

做一方锥，使其底面为长方形，长、宽分别为六尺、二尺，高为七尺（如图 24）。过高及底面中位线作截面，分割此锥为两"半锥"。此"半锥"体积当为其高、广、袤乘积的 $\frac{1}{3}$。即：

$$V=\frac{3\text{尺}\times 2\text{尺}\times 7\text{尺}}{3}=14\text{立方尺}。$$

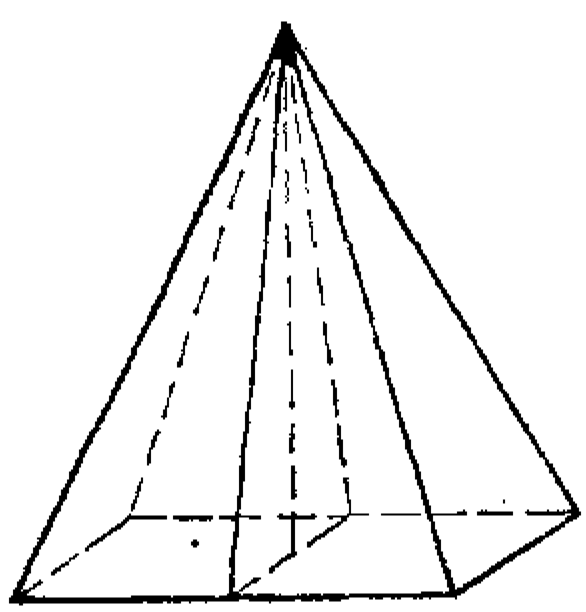


图 24

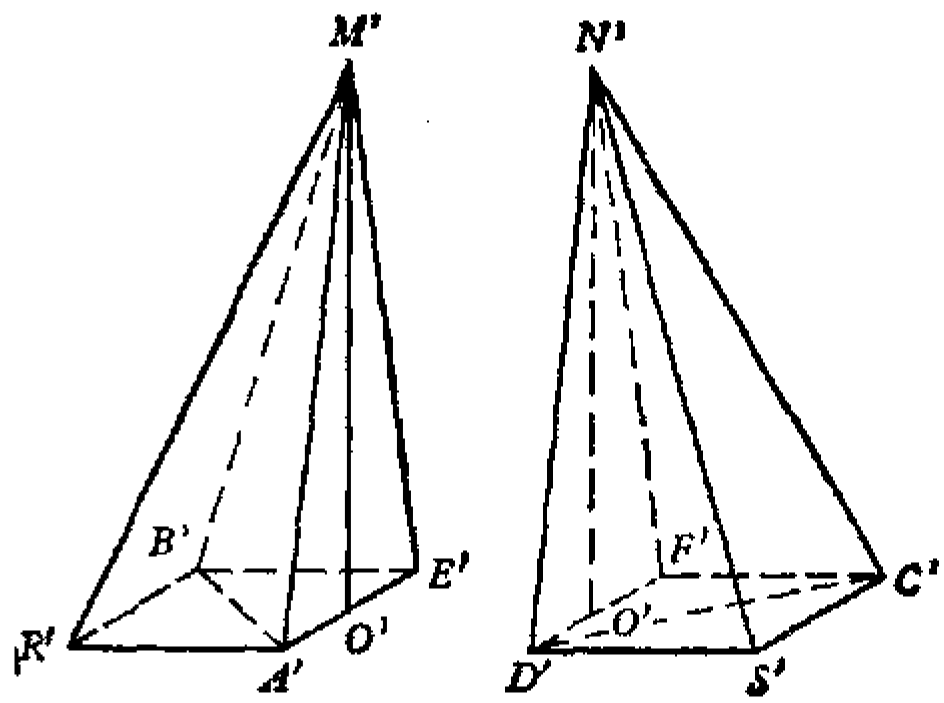


图 25

过"半锥"的顶及底面对角线作截面，这样分割"半锥"，即是"邪解半锥"则得两鳖臑，两"半锥"共得四鳖臑（如图 25）。其中 $N'\text{-}F'D'C'$ 及 $M'\text{-}E'A'B'$（如图 26）与羡除末广两旁大鳖臑 $N\text{-}FDC$ 及 $M\text{-}EAB$ 全同。其体积当为：

$$V'=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 3\times 2\times 7=\frac{1}{6}[M'O'\cdot A'E'\cdot E'B']。$$

即"亦当六而一，合于常率矣"。

注文“皆与壍堵等”之前，钱校本脱落“高、袤”二字，今校补。又“出椭皆方锥，下广二尺”。各版本讹作“下广三尺”，今校正。

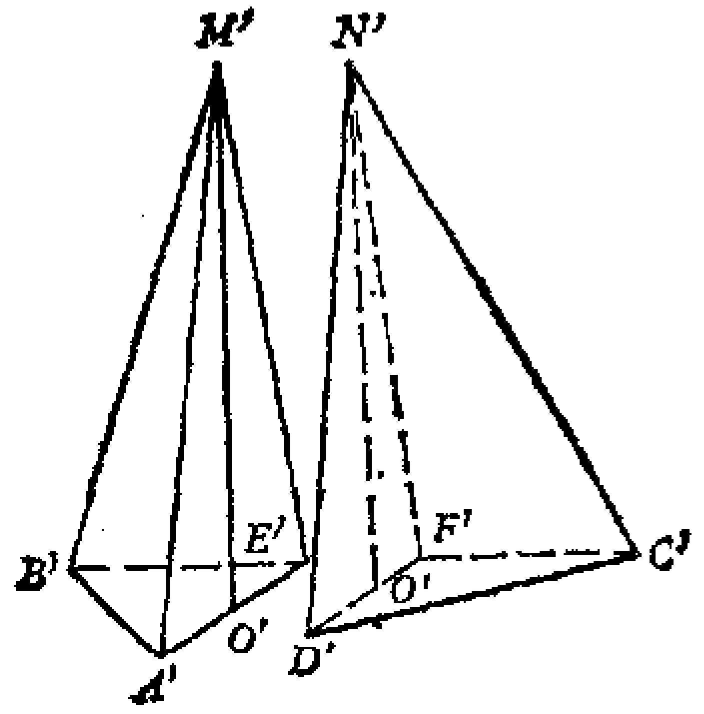


图 26

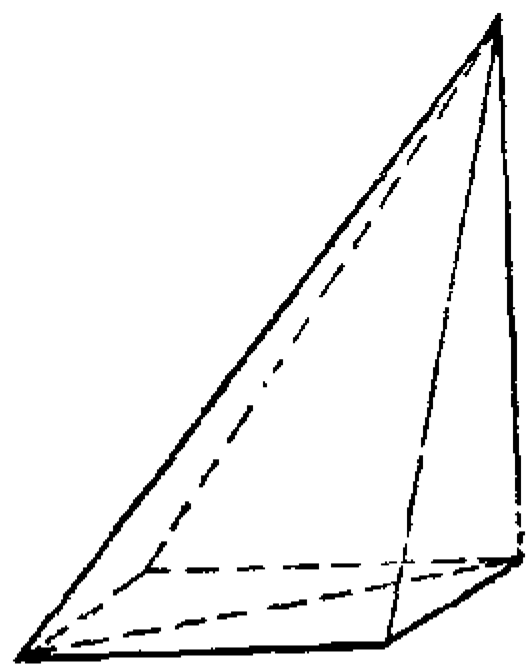


图 27

【36】按阳马之棊两邪，棊底方，……，但体有背正也

“按阳马之棊”以下，是论证等底等高的阳马与方锥体积相等的道理。

做一阳马棊，使两侧面与底面斜交，他两侧面与底面垂直，底为正方形。即“两邪，棊底方”。

若“角而割之”，即过阳马的高及相对侧棱作截面分割阳马为两部分。易知每部分都是阳马体积之半。即“相半之势”（如图27）。

若旁而割之，即过阳马的顶点及底面中位线作截面，分割阳马为两部分。可以推证每部分皆为阳马体积之半（如图28）。

推广来说，若过阳马的顶点及底面中心任作一截面，也分割阳马为两部分。仍可推证每部分皆为阳马体积之半（如图29）。

因此，注文乃称：“不问旁角而割之，相半可知也”。

若阳马与方锥等底等高，作与底平行的截面，由此推之，所得的对应截面无处不成等积的正方形。即“推此上连无成不方，故方锥与阳马同实（如图30）”。

“此大小鳖臑可知更相表里，但体有背正也”一语，是说前文所

指羡除的大小鳖臑，有的鳖臑居表，有的居里；有的鳖臑是背向，有的正向。

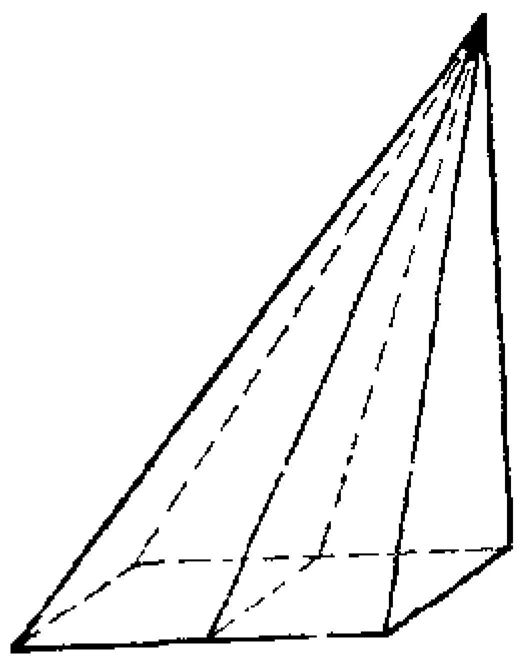


图 28

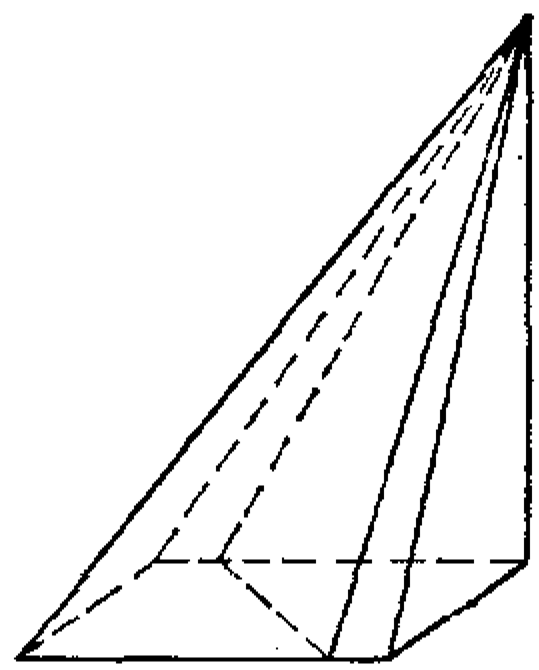


图 29

注文“不问旁角而割之，相半可知也”。或“角而割之者，相半之势”以及“推此上连无成不方，故方锥与阳马同实”。其前两句就是等底等高的两锥体必定等体积。后一句即是“幂势既同，则积不容异”。李俨于《中国数学大纲》中说：“以上说明刘徽知道：……

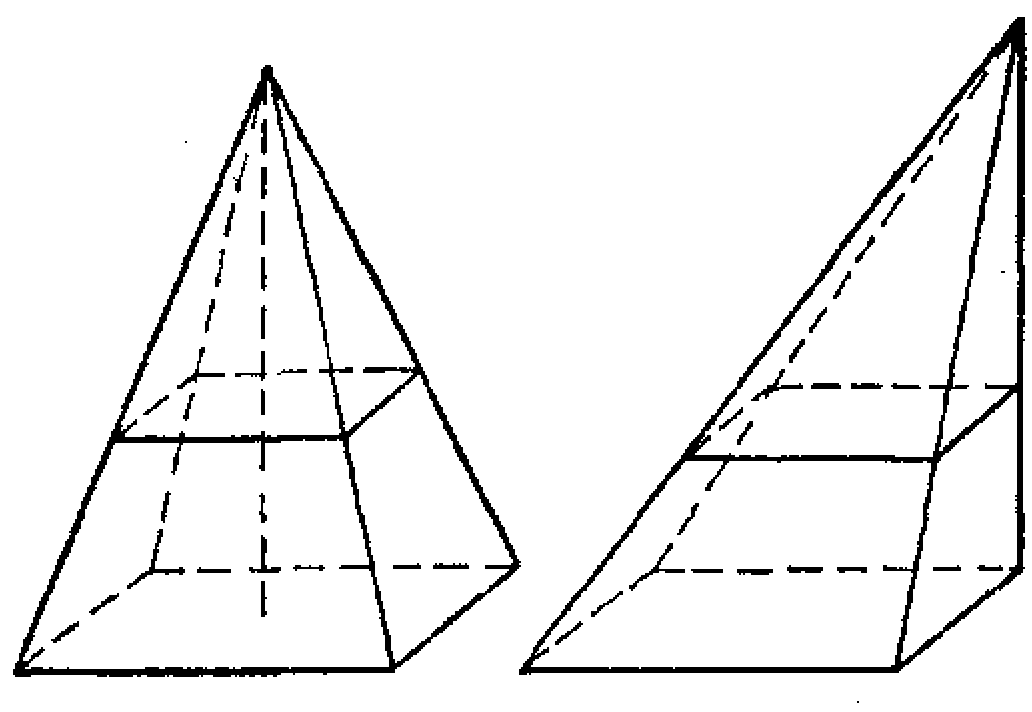


图 30

‘幂势（剖面形）既同，则积不容异’的原则”。李俨所说，十分正确。一般所谓卡瓦列利公理在我国古代就早有预见。而祖氏父子在发现这一公理时，未必没有受到刘徽的启示。因此，可以说刘徽在几何方面的成就是十分伟大而不容忽视的。

[一八] 今有刍甍[37]，下广三丈，袤四丈，上袤二丈，无广，高一丈。问积几何。

答曰：五千尺。

术曰：倍下袤，上袤从之，以广乘之，又以高乘之，六而一。推明义理者：旧说云，凡积刍有上下广曰童，甍谓其屋盖之茨也。是故甍之下广袤与童之上广袤等。正斩方亭两边，合之即刍甍之形也。假令下广二尺，袤三尺，上袤一尺，无广，高一尺，其用棊也，中央壍堵二，两端阳马各二。倍下袤，上袤从之为七尺，以广乘之得幂十四尺，阳马之幂各居二，壍堵之幂各居三。以高乘之，得积十四尺。其于本棊也，皆一而为六，故六而一，即得[38]。亦可令上下袤差乘广，以高乘之，三而一，即四阳马也，下广乘上袤而半之，高乘之，即二壍堵，并之，以为甍积也[39]。

刍童[40]、曲池、盘池、冥谷，皆同术。

术曰：倍上袤，下袤从之，亦倍下袤，上袤从之，各以其广乘之，并，以高若深乘之，皆六而一。按此术，假令刍童上广一尺，袤二尺，下广三尺，袤四尺，高一尺，其用棊也，中央立方二，四面壍堵六，四角阳马四。倍下袤为八，上袤从之为十，以高广乘之，得积三十尺，是为得中央立方各三，两端壍堵各四，两旁壍堵各六，四角阳马亦各六。复倍上袤，下袤从之为八，以高广乘之，得积八尺，是为得中央立方亦各三，两端壍堵各二。并两方三品棊，皆一而为六，故六而一，即得[41]。为术又可令上下广袤差相乘，以高乘之，三而一，亦四阳马。上下广袤互相乘，并而半之，以高乘之，即四面六壍堵与二立方，并之为刍童积[42]。又可令上下广袤互相乘而半之，上下广袤又各相乘，并以高乘之，三而一，即得也[43]。其曲池者，并上中、外周而半之，以为上袤；亦并下中，外周而半之，以为下袤[44]。此池环而不通匝，形如盘蛇而曲之。亦云周者，谓如委谷依垣之周耳。引而伸之，周为袤，求袤之意，环田也。

[37] 刍甍

“刍甍”是上底为一线段，下底为一矩形的拟柱体。李籍《音义》说：“刍甍之形，似屋盖上苫也。”《释名·释宫室》说：“屋脊曰甍。甍，蒙也。在上覆蒙屋也。”刘徽注说：“正斩方亭两边，合之

即刍甍之形也。”(如图 31，32)

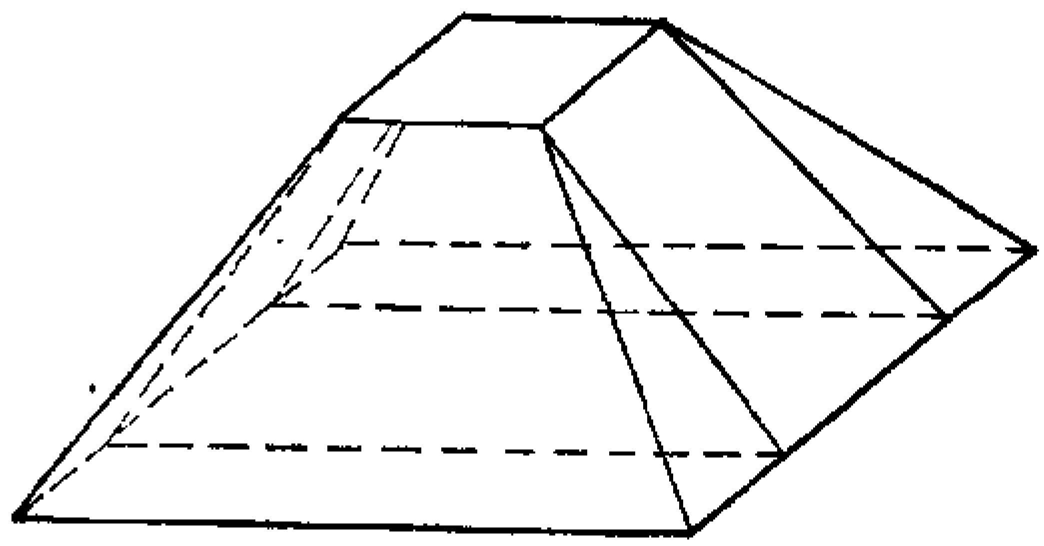


图 31

[38]* 假令下广二尺，……，故六而一，即得

这段是以模型验证术文。

设刍甍下广为二尺 (a)，袤为三尺 (b)，上袤为一尺 (c)，高为一尺 (h)。此形可看作中央二壍堵两端四阳马的合成体(图 33)。

按注计算，得：$(2b+c)a=14$ 平方尺。这面积就是六个壍堵底面积与八个阳马底面积的和。又因刍甍是二壍堵、四阳马所合成，故这面积可看作是壍堵底面的三倍与阳马底面积的二倍之和。其面积之比就是 3:2。即“阳马之幂各居二，壍堵之幂各居三。”

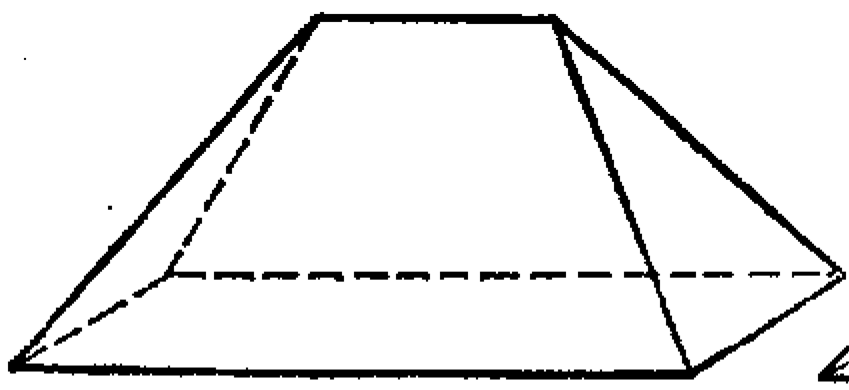


图 32

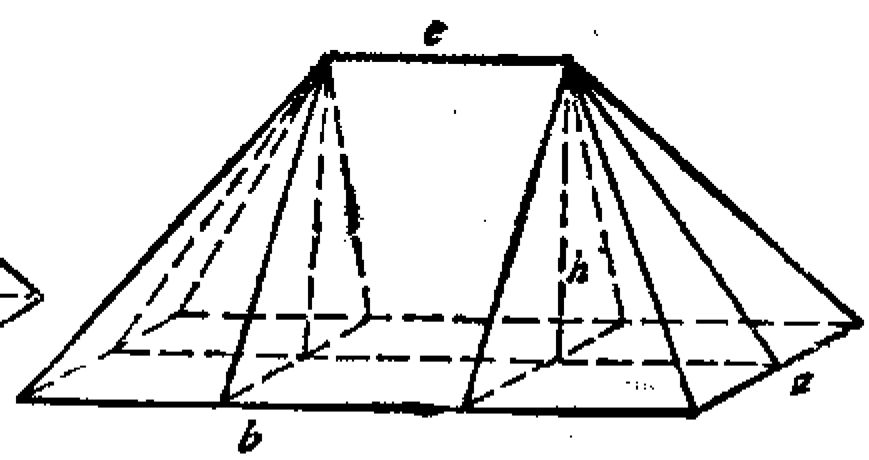


图 33

以高乘之，即得十二个壍堵的体积和二十四个阳马体积之和。也即刍甍体积的六倍。故有：

$$V=\frac{h}{6}[2a(b-c)+3ac]=\frac{h}{6}[2b+c]a。$$

* 本注曾参考郭书春：刘徽的体积理论，科学史集刊，第 11 期。

[39] 亦可令上下袤差乘广，……，以为蒿积也

刘徽提出另一算法。即：

四阳马体积为： $V_1 = \frac{h}{3} a(b-c)$，

二堑堵体积为： $V_2 = \frac{h}{2} ac$，

刍甍体积则为： $V = V_1 + V_2 = \frac{h}{3} a(b-c) + \frac{h}{2} ac$。

[40] 刍童

“刍童”即是上、下底为矩形的拟柱体。

[41] 按此术，……，故六而一，即得

以模型论证刍童体积计算公式。

设刍童上、下广各为一尺(a)、三尺(c)，上、下袤各为二尺(b)、四尺(d)高为一尺(h)。

过上底中位线及四边各作与底面垂直的截面，则有：中央立方二，四面堑堵六，四角阳马四(如图 34)。

按注文计算，得积为：$(2d+b)ch$。

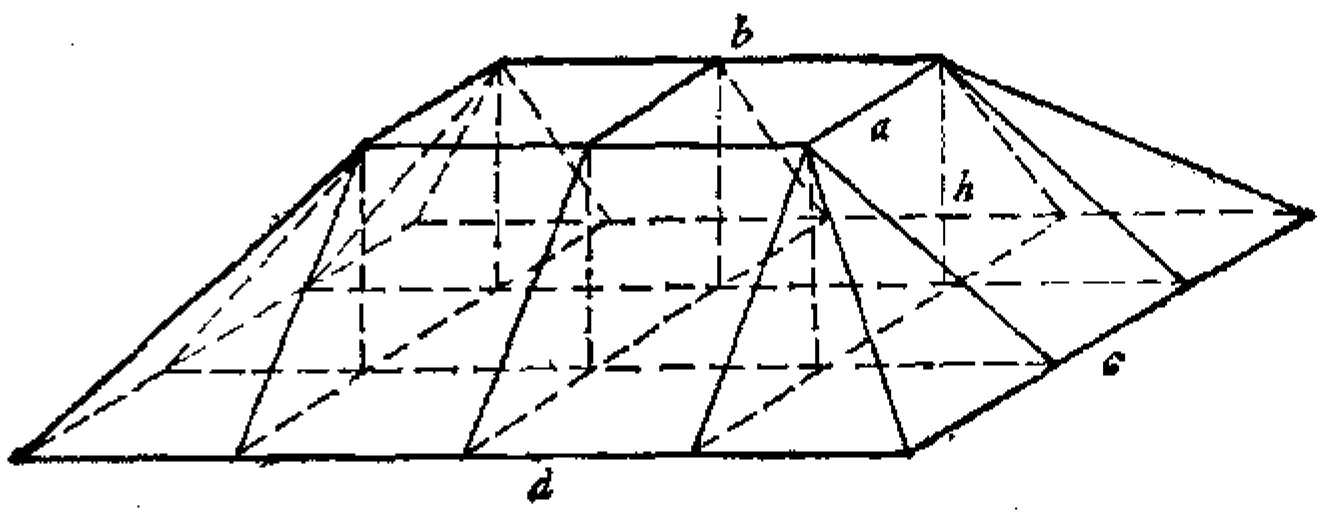


图 34

这就是以 $(2d+b)$，c，h 为三度的长方体体积，其中包括中央立方六，两端堑堵八，两旁堑堵二十四，四角阳马二十四。因所设刍童中央立方二，两端堑堵二，两旁堑堵四，四角四阳马，故注文说“是为得中央立方各三，两边堑堵各四，两旁堑堵各六，四角阳马亦各六”。

又按注文计算，得　　$(2b+d)ah$。

这是以 $(2b+d)$，a，h 为三度的长方体体积，其中包括中央立方六，两端壍堵四。因而注文说"是为得中央立方亦各三，两端壍堵各二"。

将以上两积相加乃得十二个立方，三十六个壍堵，二十四个阳马。故说"并两方三品棊，皆一而为六"。"故六而一，即得"。即：

$$V=\frac{1}{6}[(2d+b)ch+(2b+d)ah]。$$

注文"两端壍堵各四"。钱校本误为"两边壍堵各四"。依李潢校正。又，传本误为"两旁三品棊"，依李潢校正为"两方三品棊"。

[42] 为术又可令上下广袤差相乘，……，并之为刍童积

刘徽提出另一求法。即：

四阳马体积为：$V_1=\frac{1}{3}(d-b)(c-a)h$，

六壍堵与二立方体积为：$V_2=\frac{ad+bc}{2}\cdot h$，

"并之为刍童积"。即：

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{3}(d-b)(c-a)h+\frac{1}{2}(ad+bc)h。$$

钱校本断句为："即四面六壍堵。与二立方并之为刍童积。"似属不妥。今校改。

[43] 又可令上下广袤互相乘而半之，……，即得也

刘徽又提出一种算法。即：

$$V=\frac{h}{3}\left[\frac{ad}{2}+\frac{bc}{2}+ab+dc\right]。$$

刘徽可能过上底两邻边与下底相对两邻边各作截面，分割刍童为两方锥、两鳖臑。按步计算，乃得上术（如图 35）。

也可能过上底各边与下底中心各作截面，分割刍童为五方锥，四鳖臑。按步计算，也得上术(如图 36)。

也可能由前式导出。因注文过于简略，很难了解其推导方法。

注文“上下广袤又各相乘”。各本误作“又各自乘”，今校正。

[44] 其曲池者，并上中、外周而半之，……，以为下袤

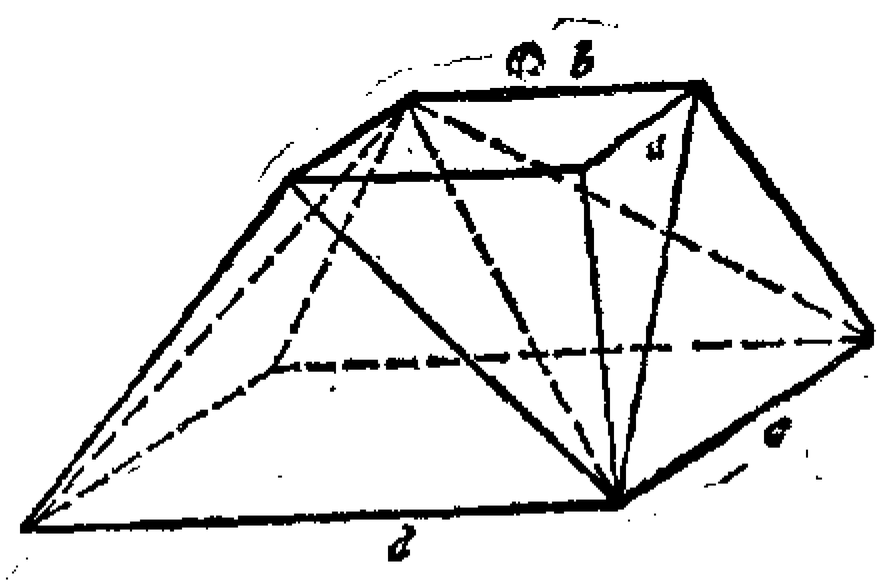


图 35

“曲池”即是上、下底为扇形的台体。如注文“此池环而不通匝，形如盘蛇而曲之”(如图37)。

曲池的“周”，并非其底的周长，实为底面的弧长。如“亦云周者，谓如委榖依垣之周耳”。

“并上中、外周而半之，以为袤”。即是取曲池上底两弧长之和的一半，看作刍童的上袤。“亦并下中、外周而半之，以为下袤”，即取其下底两弧长之和的一半，作为刍童的下袤。以其上、下广及高，各作为刍童的上下广及高。按刍童术计算，可得曲池的容积。

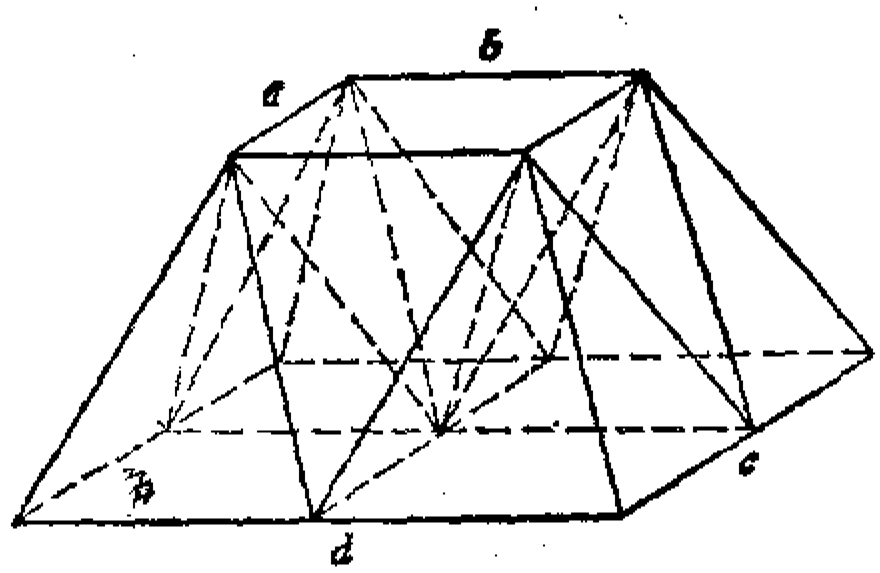


图 36

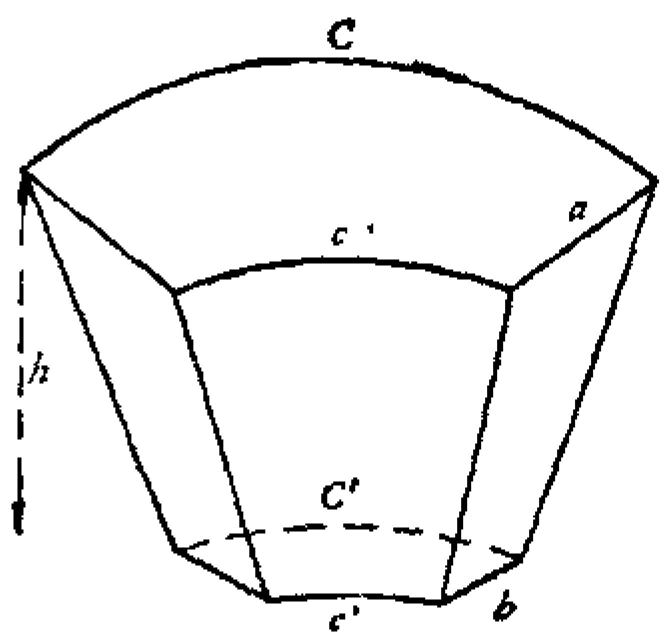


图 37

[一九] 今有刍童，下广二丈，袤三丈，上广三丈，袤四丈，高三丈。问积几何。

答曰：二万六千五百尺。

[二〇] 今有曲池，上中周二丈，外周四丈，广一丈，下中周一丈四尺，外周二丈四尺，广五尺，深一丈。问积

几何。

答曰：一千八百八十三尺三寸少半寸。

[二一] 今有盘池[45]，上广六丈，袤八丈，下广四丈，袤六丈，深二丈。问积几何。

答曰：七万六百六十六尺太半尺。

负土往来七十步，其二十步上下棚除。棚除二当平道五，踟蹰之间十加一，载输之间三十步，定一返一百四十步[46]。土笼积一尺六寸，秋程人功行五十九里半。问人到积尺、用徒各几何。

答曰：

人到二百四尺。

用徒三百四十六人一百五十三分人之六十二。

术曰：以一笼积尺乘程行步数为实。往来上下，棚除二当平道五。棚阁除邪道有上下之难，故使二当五也。置定往来步数，十加一，及载输之间三十步以为法。除之，所得即一人所到尺。按此术，棚阁除邪道有上下之难，故使二当五。置定往来步数十加一，及载输之间三十步，是为往来一返，凡用一百四十步。于今有术为所有行率，笼积一尺六寸为所求到土率，程行五十九里半为所有数，而今有之，即人到尺数。以所到约积尺即用徒人数者，此一人之积除其众积尺，故得用徒人数。为术又可令往来一返所用之步，约程行为返数，乘笼积为一人所到。以此术与今有术相反复，则乘除之或先后，意各有所在而同归耳。以所到约积尺，即用徒人数。

[45] 盘池

"盘池"又名冥谷，其形一如刍童。

[46] 负土往来七十步，……，定一返一百四十步

“负土”：以土筐背土，“棚除”：脚手架。

施工中，需负土 70 步，上下脚手架 20 步，因上下不便，每 2 步按平路 5 步计算。即“棚阁除邪道有上下之难，故使二当五也”。又因负土行步不便，每 10 步按 11 步计算，即“踟蹰之间十加一”。此外在现场装土倒土按 30 步计算。于是往返一次为：

$$\left(70-20+20\times\frac{5}{2}\right)\times\frac{11}{10}+30=140$$

即“定一返一百四十步”。

[二二] 今有冥谷，上广二丈，袤七丈，下广八尺，袤四丈，深六丈五尺。问积几何。

答曰：五万二千尺。

载土往来二百步，载输之间一里。程行五十八里。六人共车，车载三十四尺七寸。问人到积尺及用徒各几何。

答曰：

人到二百一尺五十分尺之十三。

用徒二百五十八人一万六十三分人之三千七百四十六。

术曰：以一车积尺乘程行步数为实。置今往来步数，加载输之间一里，以车六人乘之，为法。除之，所得即一人所到尺。按此术今有之义。以载输及往来并得五百步为所有行率，车载三十四尺七寸为所求到土率，程行五十八里通之为步，为所有数，而今有之。所得则一车所到。欲得人到者，当以六人除之，即得。术有分，故亦更令乘法而并除者，亦用以车尺数以为一人到土率，六人乘五百步为行率也。又可以五百步为行率，令六人约车积尺数为一人到土率，以负土术入之[47]。入之者，亦可求返数也。要取其会通而已。术恐有分，故令乘法而并除。以所到约积尺，即用徒人数者，以一人所积尺，除其众积，故得用徒人数也。以所到约积尺，即用徒人数。

[二三] 今有委粟平地[48]，下周一十二丈，高二丈。问积及为粟几何。

答曰：

积八千尺。于徽术当积七千六百四十三尺一百五十七分尺之四十九。　臣淳风等谨按：依密率，为积七千六百三十六尺十一分尺之四。

为粟二千九百六十二斛二十七分斛之二十六。于徽术当粟二千八百三十斛一千四百一十二分斛之一千二百一十。　臣淳风等谨按：依密率为粟二千八百二十八斛九十九分斛之二十八。

[二四] 今有委菽依垣[49]，下周三丈，高七尺。问积及为菽各几何。

答曰：

积三百五十尺。依徽术当积三百三十四尺四百七十一分尺之一百八十六也。　臣淳风等谨按：依密率，为积三百三十四尺十一分尺之一。

为菽一百四十四斛二百四十三分斛之八。依徽术当菽一百三十七斛一万二千七百一十七分斛之七千七百七十一。　臣淳风等谨按：依密率，为菽一百三十七斛八百九十一分斛之四百三十三。

[47] 以负土术入之

“以负土术入之”即是以第二十一问后负土术进行计算。

[48] 今有委粟平地，下周一十二丈

“委”是堆积。李籍《音义》说：“积也”。“委粟”即是将粟米堆积于一起，其形呈正圆锥。“下周”即圆锥底的周长。

[49] 今有委菽依垣，下周三丈

“委菽依垣”：靠着墙将大豆堆积在一起，其形呈半圆锥。“下周”即圆锥底的半圆周。

[二五] 今有委米依垣内角，下周八尺[50]，高五尺。问积及为米几何。

答曰：

积三十五尺九分尺之五。于徽术当积三十三尺[51]四百七十一分尺之四百五十七。　臣淳风等谨按：依密率，当积三十三尺三十三分尺之三十一。

为米二十一斛七百二十九分斛之六百九十一。于徽术当米二十斛三万八千一百五十一分斛之三万六千九百八十。　臣淳风等谨按：依密率，为米二十斛二千六百七十三分斛之二千五百四十。

委粟术曰：下周自乘，以高乘之，三十六而一。此犹圆锥也。于徽术，亦当下周自乘，以高乘之，又以二十五乘之，九百四十二而一也。其依垣者，居圆锥之半也。十八而一。于徽术，当令此下周自乘以高乘之，又以二十五乘之，四百七十一而一。依垣之周，半于全周。其自乘之幂，居全周自乘之幂四分之一。故半全周之法，以为法也。其依垣内角者，角隅也，居圆锥四分之一也。九而一。于徽术，当令此下周自乘而倍之，以高乘之，又以二十五乘之，四百七十一而一。依隅之周半于依垣。其自乘之幂，居依垣自乘之幂四分之一。当半依垣之法以为法，法不可半，故倍其实[52]。又此术亦用周三径一之率。假令以三除周得径。若不尽，通分内子，即为径之积分。令自乘，以高乘之，为三方锥之积分。母自相乘，得九为法。又当三而一，约方锥之积。从方锥中求圆锥之积，亦犹方幂求圆幂，乃当三乘之，四而一，得圆锥之积。前求方锥积乃合三而一，今求圆锥之积，复合三乘之。二母既同，故相准折。惟以四乘分母九，得三十六而连除，得圆锥之积[53]。其圆锥之积与平地聚粟同，故三十六而一。　臣淳风等谨依密率，以七乘之，其平地者二百六十四而一，依垣者一百三十二而一，依隅者六十六而一也。

程粟一斛，积二尺七寸[54]。二尺七寸者，谓方一尺深二尺七寸，凡积二千七百寸。其米一斛，积一尺六寸五分寸之一。谓积一千六百二十寸。其菽、荅、麻、麦一斛，皆二尺四寸十分寸之三。谓积二千四百三十寸。此为以精粗为率，而不等其概[55]也。粟率五，米率三，故米一斛于粟一斛五分之三，菽、荅、麻、麦亦如本率云。故谓此

三量器为槩[55]而皆不合于今斛。当今大司农斛圆径一尺三寸五分五厘，正深一尺。于徽术，为积一千四百四十一寸，排成余分，又有十分寸之三。王莽铜斛于今尺为深九寸五分五厘，径一尺三寸六分八厘七毫，以徽术计之，于今斛为容九斗七升四合有奇[56]。《周官·考工记》："㮚氏为量，深一尺，内方一尺而圆其外，实一鬴"。于徽术，此积一千五百七十寸。[57]《左氏传》曰："齐旧四量，豆、区、釜、锺。四升曰豆，各自其四，以登于釜。釜十则钟"。钟六斛四斗，釜六斗四升，方一尺，深一尺，其积一千寸[58]。若此方积容六斗四升，则通外圆积成量容十斗四合一龠五分龠之三也[59]。以数相乘之，则斛之制方一尺而圆其外，庣旁一厘七毫，幂一百五十六寸四分寸之一，深一尺，积一千五百六十二寸半，容十斗[60]。王莽铜斛与《汉书·律历志》所论斛同。

[50] 今有委米依垣内角，下周八尺

"委米依垣内角"：靠着墙内角将米堆积于一起，其形呈圆锥的四分之一。"下周"即圆锥底面的一象限弧

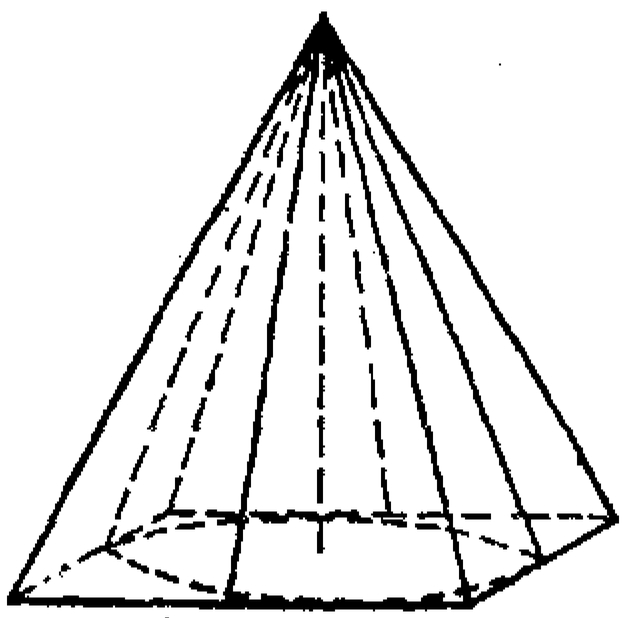


图 38

[51] 于徽术当积三十三尺

"当积三十三尺"不误。各本讹作"三十二尺"。今校改。

[52] 法不可半，故倍其实

此处"法不可半"是说徽率 $\pi=\frac{157}{50}$ 不可半。一如前文所说"于徽术，当令下周自乘而倍之"，即是"倍其实"。

[53] 又此术亦用周三径一之率，……，得圆锥之积

刘徽以 $\pi=3$ 入算，验证委粟术即圆锥术。

设圆锥下底的周为 c，直径为 d，由周求径，得：

$$d=\frac{c}{\pi}=\frac{c}{3}。$$

如图 38，作圆锥的外切方锥，设此方锥体积为 V'，圆锥体积为 V，高为 h，按注计算，得"三方锥之积分"为：

$$3V'=d^2h=\left(\frac{c}{\pi}\right)^2\cdot h=\frac{c^2}{3^2}\cdot h,$$

故得：

$$V' = \frac{d^2h}{3} = \frac{c^2h}{3\pi^2} = \frac{c^2h}{3 \times 9}。$$

因方幂与圆幂的比为 $4:\pi = 4:3$，由方锥求圆锥体积犹如由方幂求圆幂。故以 $\pi = 3$ 乘以 4 除方锥体积，可得圆锥体积。即

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot V' = \frac{3}{4} V',$$

或

$$V = \frac{c^2\pi h}{3 \times 4 \times \pi^2} = \frac{3c^2h}{3 \times 4 \times 9}。$$

其中分子的“3”是由方幂求圆幂时分子的 $\pi = 3$，上式分母的“3”是由三方锥求一方锥时的倍数 3。如以 3 约分，则得：

$$V = \frac{c^2h}{4 \times 9} = \frac{c^2h}{36}。$$

故注文说：“二母既同，故相准折”，而“得圆锥之积”。

[54] 程粟一斛，积二尺七寸

“程”音 chèng，动词，可理解为量。

“程粟一斛，积二尺七寸”。即是说量一斛粟米，其体积为 2 立方尺 700 立方寸，也即 2700 立方寸。

由下文“其米一斛，积一尺六寸五分寸之一”。“其菽、荅、麻、麦一斛，皆二尺四寸十分寸之三”可以看出，是按粟米之率进行计算的。

[55] 槩

《韩非子》称：“概者，平量者也。”《汉书·律历志》孟康注：“槩欲其直，故以水平之。井水清，清则平也。”颜师古注：“槩所以槩平，斗斛之上者也。”“槩”与“概”字通。

将米注入量器中，以直木推平。此木称为“槩”。此处的“槩”宜作标准解释。

[56] 当今大司农斛……，于今斛为容九斗七升四合有奇

今推算魏斛与王莽铜斛的大小如下：

设魏斛底的半径为 R，深为 H，容积为 V。依注乃有：

$2R = 13.55$ 魏寸，或 $R = \frac{13.55}{2} = 6.775$ 魏寸，$H = 10$ 魏寸。　若按 $\pi = \frac{157}{50}$ 入算，则得：

$$V = \pi R^2 H = \frac{157}{50}(6.775)^2 \times 10 = 1441.279625 \text{ 立方魏寸。}$$

为简便计，将 0.279625 排成余分为 $\frac{3}{10}$，故得：

$$V = 1441\frac{3}{10} \text{ 立方魏寸。}$$

因莽尺小于魏尺，折合魏尺为 9.55 魏寸。设王莽铜斛容积为 V'，底半径为 r，深为 h，若折合魏尺，应得：

$$2r = 14.332136 \text{ 莽寸} = 0.955 \text{ 魏寸} \times 14.332136$$
$$= 13.68718988 \text{ 魏寸} \doteq 13.687 \text{ 魏寸。}$$

$$r = \frac{13.687}{2} = 6.8435 \text{ 魏寸，} \quad h = 0.955 \times 10 = 9.55 \text{ 魏寸。}$$

以徽率 $\pi = \frac{157}{50}$ 入算得：

$$V' = \pi r^2 h = \frac{157}{50}(6.8435)^2 \cdot (9.55)$$
$$= 1404.39593210075 \text{ 立方魏寸} \doteq 1404\frac{4}{10} \text{ 立方魏寸。}$$

王莽铜斛折合魏斛的容积，则为：

$$\text{莽斛容量} = \frac{V'}{V} = \frac{1404.4}{1441.3} = 0.9743981 \doteq 0.974 \text{ 魏斛}$$
$$= 9 \text{ 魏斛 } 7 \text{ 魏升 } 4 \text{ 魏合。}$$

正如《隋书·律历志》称："魏斛大而尺长，王莽斛小而尺短也。"

[57]《周官·考工记》：……，此积一千五百七十寸

《考工记》称："㮚氏为量：……，深尺，内方尺而圜其外，其实一鬴。"与刘注略有出入。

“鬴”是一种量器，其形状是正圆柱。

以 1 尺为边正方形的外接圆作为鬴的底面。如图 39。即“内方尺而圜其外”。

鬴深为 1 尺。若以徽 $\pi=\frac{157}{50}$ 入算，鬴的容积为：

$$V=\pi r^2h=\frac{157}{50}(7.071068)^2\times 10=1570\text{ 立方寸。}$$

注文：“此积一千五百七十寸，”各本于“此”字后衍一“圆”字，今删。

[58]《左氏传》曰：“齐旧四量，……，”其积一千寸

《左传》曾载有齐国四种量器：豆、区、釜、钟。由豆至釜都是四进位制。如《考工记》郑康成注：“四升曰豆，四豆曰区，四区曰鬴。鬴，六斗四升也。鬴十则钟，方尺，积千寸。”即

1 豆 = 4 升，1 区 = 4 豆 = 16 升，

1 釜 = 4 区 = 16 豆 = 64 升 = 6 斗 4 升

由釜至钟则为十进位制。即

1 钟 = 10 釜 = 640 升 = 6 斛 4 斗。

釜的形状是正四棱柱。底面为边长一尺的正方形，其深为一尺。容“积一千寸”。即

1 釜容积 = 1000 立方寸 = 6 斗 4 升。

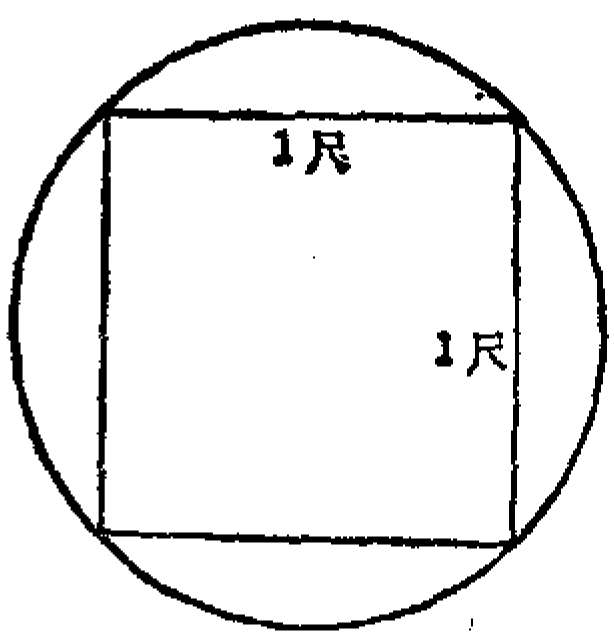


图 39

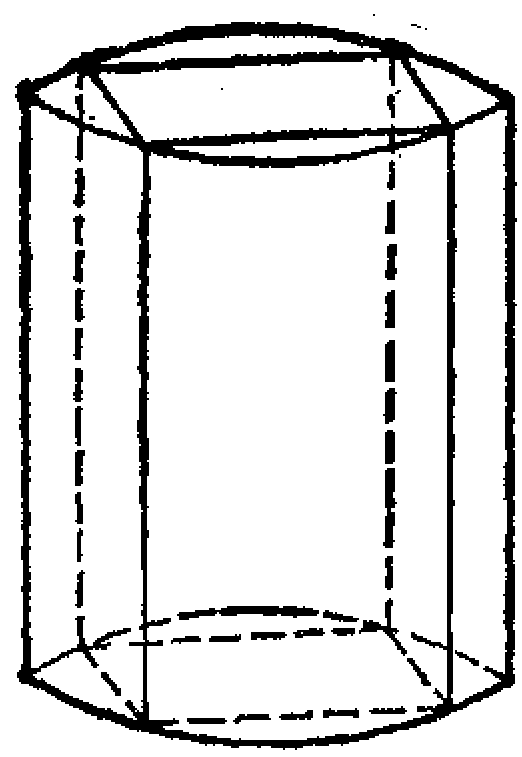


图 40

[59] 若此方积容六斗四升，……五分龠之三也

已知釜的容量为六斗四升，其容积为 1000 立方寸。

作"釜"的外接圆柱，这圆柱形的量器即鬴。如图 40。一鬴的容量当为：

$$V = \frac{1570\text{ 立方寸} \times 64\text{ 升}}{1000\text{ 立方寸}} = 100.48\text{ 升}$$

$$= 10\text{ 斗 } 4\text{ 合 } 1\frac{3}{5}\text{ 龠。}$$

[60] 以数相乘之，……，容十斗

欲制容十斗的斛，斛的容积应为：

$$V_1 = \frac{1570 \times 10}{10.048} = 1562.5\text{ 立方寸。}$$

以斛深 10 寸，并按徽率 $\pi = \frac{157}{50}$ 入算，其底面半径为：

$$r = \sqrt{\frac{V_1}{\pi h}} = \sqrt{\frac{1562.5}{\frac{157}{50} \times 10}} = \sqrt{49.7611} = 7.054155\text{ 寸。}$$

若底面为"内方一尺而圆其外"似嫌稍大。故需以比正方形外接圆略小的同心圆为斛底，其半径当为：

$$r = 7.054155 = 7.070168 - 0.016913 = 5\sqrt{2} - 0.017\text{。}$$

注文："斛之制方一尺而圆其外，庣旁一厘七毫。"此处"庣旁"实为减旁的意思。如图 41。故斛的容积当为：

$$V_1 = 1562.5\text{ 立方寸} = 10\text{ 斗。}$$

[二六] 今有穿地，袤一丈六尺，深一丈，上广六尺，为垣积五百七十六尺。问穿地下广几何。

答曰：三尺五分尺之三。

术曰：置垣积尺，四之为实。穿地四为坚三。垣坚也。以坚求穿地，当四之三而一也。以深、袤相乘，为深袤之立幂也[61]。又

三之，为法。以深袤乘之立幂除垣积，则阬广。又三之者，与坚率并除之。所得倍之，阬有两广。先并而半之，即为广狭之中平。今先得其中平，故又倍之，知两广全也[62]。减上广，余即下广。按此术，穿地四，为坚三，垣即坚也。今以坚求穿地，当四乘之，三而一。深袤相乘者，为深袤立幂，以深袤立幂除积即阬广。又三之为法，与坚率并除。所得倍之者，为阬有两广，先并而半之，为中平之广。今此得中平之广，故倍之还为两广并。故减上广，余即下广也[63]。

[61] 深袤之立幂也

李潢《九章算术细草图说》称："广袤相乘为平幂，深袤相乘为立幂。"过坑的袤及高所作坑的截面，因为此截面垂直于地面，故称此截面面积为"立幂"。

[62] 阬有两广，……，故又倍之，知两广全也

"阬"即沟，其形是以等腰梯形为底的直棱柱(如图 42)。

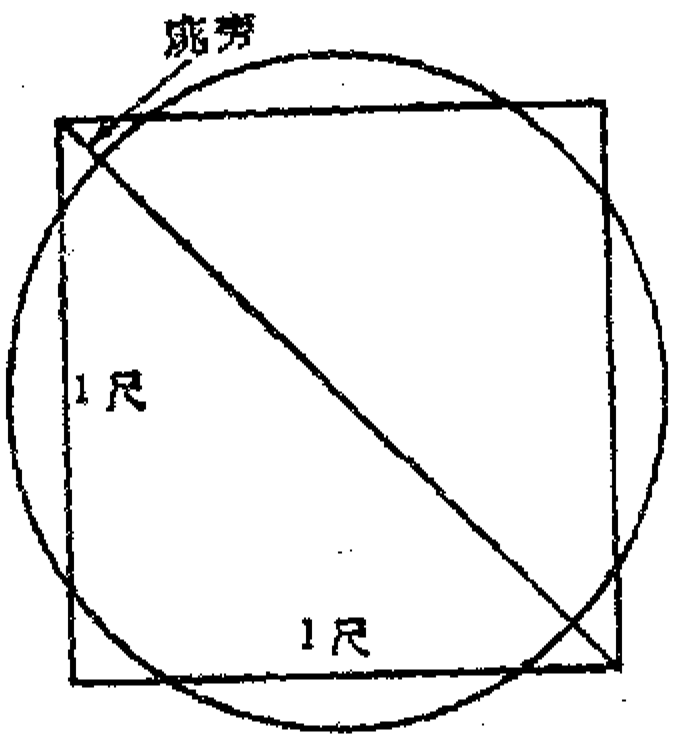


图 41

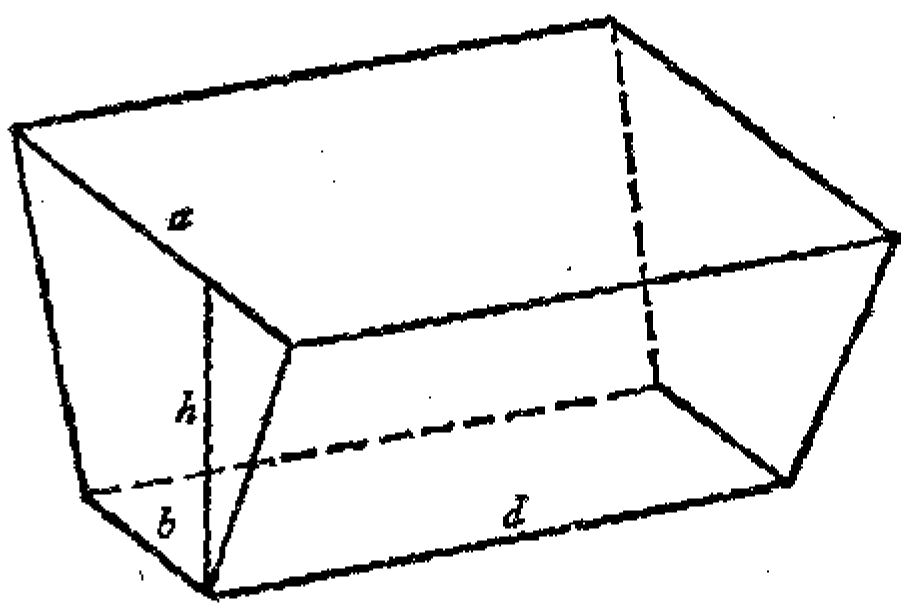


图 42

设"阬"的上、下广分别为 a，b，若"并而半之"，即是此棱柱底面中位线 l 的长，即 $l=\frac{a+b}{2}$ 称为"中平"。

若二倍"中平"，即得两广之和。即 $2l=a+b$。即注文"两广全也"。

[63] 今以坚求穿地，……，故减上广，余即下广也

以第二十六问为例，注释如下：

已知坑的袤、深及上广分别为十六尺 (d)，十尺 (h)，六尺 (a)，设坑的体积为 V'，其下广为 b（如图 42）。则

$$V' = \frac{a+b}{2} \cdot dh。$$

因挖地为虚土，筑垣为实土。此问是"以坚求穿"。故"四乘之，三而一"。已知垣积为 $V = 576$ 立方尺，乃有：

$$\frac{4V}{3} = V' \quad 或 \quad \frac{4V}{3} = \frac{a+b}{2} \cdot dh。$$

按术计算："置垣积尺，四之为实。"即 $4 \times 576 = 2304$ 立方尺，深袤相乘为立幂，以立幂除之，得：

$$4 \times 576 \div (16 \times 10) = 14\frac{2}{5},$$

又以坚率 3 除之，得：

$$4 \times 576 \div (16 \times 10) \div 3 = 4\frac{4}{5},$$

或

$$\frac{4V}{3} \div dh = \frac{a+b}{2}。$$

即"此得中平之广"。

"倍之还为两广并"，以 2 乘之即是坑的两广和：

$$2 \times [4 \times 576 \div (16 \times 10) \div 3] = 9\frac{3}{5},$$

或

$$2\left[\frac{4V}{3} \div dh\right] = a + b。$$

减去坑的上广 (a)，所余为其下广：

$$2 \times [4 \times 576 \div (16 \times 10) \div 3] - 6 = 3\frac{3}{5} 尺$$

或

$$2\left[\frac{4V}{3}\div dh\right]-a=b。$$

[二七] 今有仓，广三丈，袤四丈五尺，容粟一万斛。问高几何。

答曰：二丈。

术曰：置粟一万斛积尺为实。广袤相乘为法。实如法而一，得高尺。以广袤之幂除积，故得高。按此术本以广袤相乘，以高乘之得此积。今还原，置此广袤相乘为法除之，故得高也[64]。

[二八] 今有圆囷[65]，圆囷，廪也。亦云圆囤也。高一丈三尺三寸少半寸，容米二千斛。问周几何。

答曰：五丈四尺。于徽术当周五丈五尺二寸二十分寸之九。　臣淳风等谨依密率，为周五丈五尺一百分尺之二十七。

术曰：置米积尺，此积犹圆垛壔之积。以十二乘之，令高而一，所得，开方除之，即周。于徽术当置米积尺，以三百一十四乘之为实。二十五乘囷高为法。所得，开方除之，即周也。此亦据见幂以求周，失之于微少也。晋武库中有汉时王莽所作铜斛，其篆书字题斛旁云："律嘉量斛：方一尺而圜其外，庣旁九厘五毫，幂一百六十二寸，深一尺，积一千六百二十寸，容十斗"。及斛底云："律嘉量斗：方尺而圜其外，庣旁九厘五毫，幂一尺六寸二分，深一寸，积一百六十二寸，容一斗"。升、合、龠皆有文字。升居斛旁，合、龠在斛耳上。后有赞文，与今《律历志》同，亦魏，晋所常用。今粗疏王莽铜斛文字尺寸分数，然不尽得升合勺之文字[66]。按此术本周自相乘，以高乘之，十二而一，得此积。今还元，置此积，以十二乘之，令高而一，即复本周自乘之数。凡物自乘，开方除之，复其本数。故开方除之，即得也[67]。　臣淳风等谨依密率，以八十八乘之为实，七乘囷高为法，实如法而一，开方除之，即周也。

[64] 按此术本以广袤相乘，……，故得高也

这段是刘徽以"还原术"论证本问的计算方法。

这里的"仓"是指方仓，其形状即现今的长方体。设方仓的容

积为 V，其长、宽、高各为 a, b, h。

因：$V=abh$，　　故还原为：$\frac{V}{ab}=h$。

[65] 圆囷

圆仓称为囷。如《礼记·月令》称："穿窦窖，修囷仓，"圆囷的形状是正圆柱。

[66] 晋武库中……，然不尽得升合勺之文字

刘徽虽然多次引用铜斛铭文，但所引的文字与铭文不尽相同。据此可以证明刘徽未见过铜斛，其所引文字必系传抄。也正如刘注所说："不尽得升合勺之文字。"

王莽铜斛斛铭为："律嘉量斛，方尺而圜其外，庣旁九釐五豪，冥百六十二寸，深尺，积千六百廿寸。容十斗。"斗铭为："律嘉量斗，方尺而圜其外，庣旁九釐五豪，冥百六十二寸，深寸，积百六十二寸。容十升。"与刘徽注文不尽相同。

其升铭为："律嘉量升，方二寸而圜其外，庣旁一釐九豪，冥六百卌八分，深二寸五分，积万六千二百分。容十合。"合铭为："律嘉量合，方寸而圜其外，庣旁九豪，冥百六十二分，深寸，积千六百廿分。容二籥。"龠铭为："律嘉量籥，方寸而圜其外，庣旁九豪，冥百六十二分，深五分，积八百一十分。容如黄钟。"

[67] 按此术本周自相乘，……，故开方除之，即得也

设圆囷底面的周长为 c，高为 h，容积为 V。若取 $\pi=3$，乃有：

$$V=\frac{c^2}{4\pi}\cdot h=\frac{c^2\cdot h}{12}。$$

第二十八问已知圆囷容米 2000 斛，又知"米一斛，积一尺六寸五分寸之一"，则圆囷容积当为：

$$V=2000\times 1620=3240000\text{立方寸。}$$

因圆囷的高为 $133\frac{1}{3}$ 寸，故还原上式，得其周 c 为：

$$c^2=\frac{4\pi V}{h}=\frac{12V}{h}，\text{或 } c=\sqrt{\frac{12V}{h}}。$$

即

$$c=\sqrt{\frac{3240000\times 12}{133\frac{1}{3}}}=540\text{寸}=5\text{丈}4\text{尺}。$$

因"自乘"与"开方"互为逆运算，故注文称："凡物自乘，开方除之，复其本数。"

九章算术卷第六

均输[1]以御远近劳费

[一] 今有均输粟，甲县一万户，行道八日；乙县九千五百户，行道十日；丙县一万二千三百五十户，行道十三日；丁县一万二千二百户，行道二十日，各到输所。凡四县赋，当输二十五万斛，用车一万乘。欲以道里远近、户数多少，衰出之。问粟、车各几何。

答曰：

甲县粟八万三千一百斛，车三千三百二十四乘。

乙县粟六万三千一百七十五斛，车二千五百二十七乘。

丙县粟六万三千一百七十五斛，车二千五百二十七乘。

丁县粟四万五百五十斛，车一千六百二十二乘。

均输按此均输，犹均运也。令户率出车，以行道日数为均，发粟为输。术[2]曰：令县户数，各如其本行道日数而一，以为衰。据甲行道八日，因使八户共出一车；乙行道十日，因使十户共出一车，计其在道则皆户一日出一车，故可为均平之率也。甲衰一百二十五，乙、丙衰各九十五，丁衰六十一，副并为法。以赋粟车数乘未

并者，各自为实。衰分科率。实如法得一车。各置所当出车，以其行道日数乘之，如户数而一，得率，户用车二日四十七分日之三十一，故谓之均[3]。求此率以户，当各计车之衰分也[4]。 臣淳风等谨按：县户有多少之差，行道有远近之异。欲其均等，故各令行道日数约户为衰。行道多者少其户，行道少者多其户。故各令约户为衰，以八日约除甲县，得一百二十五。一旬除乙，十三除丙，各得九十五。二旬除丁，得六十一也[5]。于今有术，副并为所有率，未并者各为所求率，以赋粟车数为所有数，而今有之，各得车数。有分者，上下辈之[6]。辈，配也。车、牛、人之数，不可分裂。推少就多，均赋之宜。今按甲分既少，宜从于乙，满法除之。有余从丙。丁分又少，亦宜就丙，除之适尽。加乙、丙各一，上下辈益，以少从多也[7]。以二十五斛乘车数，即粟数。

[1] 均输

《汉书·食货志》："桑弘羊为大司农中丞，管诸会计事，稍稍置均输，以通货物。"《后汉书》称："武帝时所谓均输制也。"汉武帝元封元年(公元前110年)根据桑弘羊的建议实行均输制。均输制就是按人口多少、路途远近、谷物贵贱平均交纳租税或摊派徭役的章程。

如程大位《算法统宗》说："均，平也。输，送也。此章以户数多寡，道里远近，而求车数、粟数，以粟数高下而求僦直，以钱数多少而求佣钱。"

[2] 均输术

"均输术"就是按人口多少，路途远近，谷物贵贱推算赋税及徭役的方法。就算法而论，即是配分比例。

[3] 各置所当出车，……，故谓之均

根据甲、乙、丙、丁县的户数，由行道日数按反比例得四县出车比率为：125:95:95:61，由四县共出车数按正比例

$$\frac{\text{甲县出车数}}{\text{甲县出车率}}=\frac{\text{四县出车数之和}}{\text{四县出车率之和}},$$得甲县出车数(x)为

$$\frac{x}{125}=\frac{10000}{376},\quad \text{或}\quad x=\frac{10000\times125}{376}=3324\frac{22}{47}。$$

由于甲县出车数为 $x=3324\frac{22}{47}$，甲县至输所行道八日，故甲县行车日数为 $3324\frac{22}{47}\times 8$。

又因甲县 10000 户，于是得每户用车日数为 $\dfrac{3324\frac{22}{47}\times 8}{10000}=$ $2\frac{31}{47}$ 日。

仿此，可得乙、丙、丁县每户用车日数分别也是

$$\frac{\frac{10000\times 95}{376}\times 10}{9500}=2\frac{31}{47}\text{日，}\quad \frac{\frac{10000\times 95}{376}\times 13}{12350}=2\frac{31}{47}\text{日，}$$

$$\frac{\frac{10000\times 61}{376}\times 20}{12200}=2\frac{31}{47}\text{日。}$$

据此，可知四县平均每户用车 $2\frac{31}{47}$ 日，即注文"户用车二日四十七分日之三十一，故谓之均"。

［4］求此率以户，当各计车之衰分也

若以户数计算，也可求得平均每户用车日数。

甲、乙、丙、丁四县之衰为 $\frac{10000}{8}=1250$，$\frac{9500}{10}=950$，$\frac{12350}{13}=950$，$\frac{12200}{20}=610$，其和为 $1250+950+950+610=3760$，四县共出车 10000 乘，故得四县平均每户用车日数

$$10000\div 3760=2\frac{31}{47}\text{日。}$$

［5］一旬除乙，……，得六十一也

"于今有术，副并为所有率，未并者各为所求率，以赋粟车数为所有数，而今有之，各得车数"下，各本为"一旬除乙，十三除丙，各得九十五。二旬除丁，得六十一也。"但是在"于今有术"前，各本

为“以八日约除甲县，得一百二十五。乙、丙各九十五。丁六十一。”通览全文，不难发现前后颠倒。今校正，将“一旬除乙”等二十二字移至“以八日约除甲县，得一百二十五”之下。并删去“乙丙各九十五、丁六十一”十字。

[6] 有分者，上、下辈之

“有分者，上、下辈之”就是所求的车、牛、人数应是正整数。若得分数，可按四舍五入的法则配成整数，使具有实际意义。

李籍《音义》称：“配也，俗作辈。”

[7] 今按甲分既少，……，以少从多也

这是以第一问为例，说明如何“上下辈之”。

按第一问已知数，所得四县出车数各为：

$$\text{甲县：}3324\frac{22}{47}\text{；乙县：}2526\frac{28}{47}\text{；}$$

$$\text{丙县：}2526\frac{28}{47}\text{；丁县：}1622\frac{16}{47}\text{。}$$

因甲县余分分子既少于分母之半，即 $22<\frac{47}{2}$，宜与乙县余分分子相加，即 $22+28=50$，除以分母得：$\frac{50}{47}=1\frac{3}{47}$，于是将乙县出车数改为：$2526\frac{50}{47}=2527\frac{3}{47}$。

此时，乙县余分分子为3，宜与丙县余分分子相加，即 $3+28=31$，因为仍小于分母而不足1，即 $\frac{33}{47}<1$。但丁县余分分子也少于分母之半，即 $16<\frac{47}{2}$，也宜就丙，即得 $3+28+16=47$，除以分母，正好得1。可将丙县出车数改为：

$$2526\frac{47}{47}=2527\text{。}$$

这样，就得四县出车数各为：3324，2527，2527，1622。

可以看出，这种“上、下辈之”的方法就是四舍五入的法则。

[二] 今有均输卒，甲县一千二百人，薄塞[8]；乙县一千五百五十人，行道一日；丙县一千二百八十人，行道二日；丁县九百九十人，行道三日；戊县一千七百五十人，行道五日。凡五县，赋输卒一月一千二百人。欲以远近、户率，多少衰出之。问县各几何。

答曰：

甲县二百二十九人。

乙县二百八十六人。

丙县二百二十八人。

丁县一百七十一人。

戊县二百八十六人。

术曰：令县卒，各如其居所及行道日数而一，以为衰。按此亦以日数为均，发卒为输。甲无行道日，但以居所三十日为率。言欲为均平之率者，当使甲三十人而出一人，乙三十一人而出一人。出一人者，计役则皆一人一日，是以可为均平之率[9]。甲衰四，乙衰五，丙衰四，丁衰三，戊衰五，副并为法。以人数乘未并者各自为实。实如法而一。各置所当出人数，以其居所及行道日数乘之，如县人数而一，得户率，人役五日七分日之五[10]。　臣淳风等谨按：各令居所及行道日数约县卒为衰[11]，于今有术，副并为所有率，未并者各为所求率，以赋卒人数为所有数。此术似别，考则意同，以广异闻，故存之也。有分者，上、下辈之。辈、配也。今按丁分最少，宜就戊除。不从乙者，丁近戊故也。满法除之，有余从乙。丙分又少，亦就乙除。有余从甲，除之适尽。从甲、丙二分，其数正等。二者于乙远近皆同，不以甲从乙者，方以下从上也[12]。

[8] 薄塞

"薄"是迫近的意思。如《左传 · 僖公二十三年》："浴，薄而观之。""塞"即是边境。如《汉书 · 晁错传》："守边备塞，劝农力本，

当世急务。”“薄塞”即是迫近边境的要地。

[9] 甲无行道日，……，是以可为均平之率

因“赋输卒一月”即是五县摊派徭役一月，一月按三十日计算，即“以居所三十日为率”。

甲县“薄塞”就是“无行道日”。因此甲县可按每30人出一人计算。乙县“行道一日”，相当于每 $30+1=31$ 人出一人。仿此，丙县每32人出一人，丁县每33人出一人，戊县则每35人出一人。

故得五县列衰为 $\frac{1200}{30}:\frac{1550}{31}:\frac{1280}{32}:\frac{990}{33}:\frac{1750}{35}=4:5:4:3:5$。

[10] 各置所当出人数，……，人役五日七分日之五

术文未提出求户率的方法，刘徽补其不足。今以甲县为例计算如下：

甲县人数1200为所有率，徭役一月的日数30为所求率，甲县所出 $228\frac{4}{7}$ 为所有数，设户率人役日 x 为所求数。

按“今有术”计算，乃得：

$$1200:30=228\frac{4}{7}:x,\quad x=\frac{228\frac{4}{7}\times 30}{1200}=5\frac{5}{7}。$$

即“所当出人数，以其居所及行道日数乘之，如县人数而一，得户率”。

[11] 为衰

于“为衰”前，按戴震校补“各令居所及行道日数约县卒”十二字。

[12]今按丁分最少，……，方以下从上也

按术求得各县所出人数为：

甲县：$228\frac{4}{7}$ 人，乙县：$285\frac{5}{7}$ 人，丙县：$228\frac{4}{7}$ 人，

丁县：$171\frac{3}{7}$ 人，戊县：$285\frac{5}{7}$ 人。

因丁县余分分子最小，按注文可知刘徽欲使丁县、戊县余分分子相加，即 $3+5=8$，除以分母，得 $\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$。于是将戊县所出人数改为 $285\frac{8}{7}=286\frac{1}{7}$。

按术计算，乙、戊两县所出人数相同，即 $285\frac{5}{7}$。为什么以丁配戊而不配乙？注文说："不从乙者，丁近戊故也。"刘徽是以天干次序为准，以为丁戊近于丁乙。这种理由，似无实际意义。如改为："丁分最少，宜就乙除，不从戊者，乙近戊故也"。因乙县行道一日，戊县行道五日。使乙县多出一人，或较合理。

丁分最少，宜就戊除，戊县所出人数为 $286\frac{1}{7}$，尚有余分，乃从于乙，即 $1+5=6$。又因丙县余分分子也少，也配于乙，得：$1+5+4=10$，除以分母得 $\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$。于是将乙县所出人数改为 $285\frac{10}{7}=286\frac{3}{7}$。若使此余分就于甲，则甲县所出人数可改为 $228\frac{4+3}{7}=229$ 人。

据此，可得四县所出人数各为：

甲县 229 人，乙县 286 人，丙县 228 人，丁县 171 人，戊县 286 人。

在运算中，若按天干次序而论，甲、乙，乙、丙远近相同，不以甲分从乙，而以乙、丙的余分从甲，刘徽解释为："不以甲从乙者，方以下从上也。"

由于甲县薄塞，乙县行道一日，如将注文改为："不以甲从乙者，方以远从近也。"这样因甲近于乙，使甲县多出一人，或较合理。

［三］今有均赋粟，甲县二万五百二十户，粟一斛二十钱，自输其县；乙县一万二千三百一十二户，粟一斛一十

钱，至输所二百里；丙县七千一百八十二户，粟一斛一十二钱，至输所一百五十里；丁县一万三千三百三十八户，粟一斛一十七钱，至输所二百五十里；戊县五千一百三十户，粟一斛一十三钱，至输所一百五十里。凡五县赋，输粟一万斛。一车载二十五斛，与僦一里一钱[13]。欲以县户输粟，令费劳等。问县各粟几何。

答曰：

甲县三千五百七十一斛二千八百七十三分斛之五百一十七。

乙县二千三百八十斛二千八百七十三分斛之二千二百六十。

丙县一千三百八十八斛二千八百七十三分斛之二千二百七十六。

丁县一千七百一十九斛二千八百七十三分斛之一千三百一十三。

戊县九百三十九斛二千八百七十三分斛之二千二百五十三。

术曰：以一里僦价，乘至输所里，此以出钱为均也。问者曰："一车载二十五斛，与僦一里一钱。"一钱即一里僦价也。以乘里数者，欲知僦一车到输所所用钱也。甲自输其县，则无取僦价也。以一车二十五斛除之，欲知僦一斛所用钱。加一斛粟价，则致一斛之费。加一斛之价于一斛僦直，即凡输粟取僦钱也。甲一斛之费二十，乙、丙各十八，丁二十七，戊十九也。各以约其户数，为衰。言使甲二十户共出一斛，乙、丙十八户共出一斛，计其所费，则皆户一钱，故可为均赋之率也。甲衰一

千二十六，乙衰六百八十四，丙衰三百九十九，丁衰四百九十四，戊衰二百七十。副并为法。所赋粟乘未并者，各自为实。实如法得一。各置所当出粟，以其一斛之费乘之，如户数而一，得率，户出三钱二千八百七十三分钱之一千三百八十一。　臣淳风等谨按：此以出钱为均。问者曰："一车载二十五斛，与僦一里一钱"。一钱，即一里僦价也。以乘里数者，欲知僦一车到输所所用钱，甲自输其县，则无取僦之价。以一车二十五斛除之者，欲知僦一斛所用钱，加一斛之价于一斛僦直，即凡输粟取僦钱。甲一斛之费二十，乙、丙各十八，丁二十七，戊十九，各以约其户为衰。甲衰一千二十六，乙衰六百八十四，丙衰三百九十九，丁衰四百九十四，戊衰二百七十，言使甲二十户共出一斛，乙、丙十八户共出一斛。计其所费则皆户一钱，故可为均赋之率也[14]。于今有术，副并为所有率，未并者各为所求率，赋粟一万斛为所有数，此今有衰分之义也。计经赋之率，既有户算之率，亦有远近贵贱之率。此二率者，各自相与通[15]。通则甲二十，乙十二，丙七，丁十三，戊五[16]。一斛之费为之钱率，钱率约户率者，则钱为母，户为子。子不齐，令母互乘为齐，即衰也[17]。若其不然，以一斛之费约户数取衰，並有分。当通分内子约之，于算甚繁[18]。此一章皆相与通功共率，略相依似。以上二率下一率亦可放此，从其简易而已[19]。又以分言之，使甲一户出二十分斛之一，乙一户出十八分斛之一，各以户数乘之，亦可得一县凡所当输，俱为衰也。乘之者，乘其子，母报除之。以此观之，则以一斛之费约户数者，其意不异矣[20]。然则可置一斛之费而反衰之，约户以乘户率为衰也。合分注曰："母除为率，率乘子为齐"。反衰注曰："先同其母，各以分母约其同为反衰"。以施其率，为算既约。且不妨上下也[21]。

[13] 僦一里一钱

"僦"是运费。《史记·平准书》："弘羊以诸官各自市相与争，物故腾跃，而天下赋输或不偿其僦费。"经文"僦一里一钱"，就是每车行一里的运费为一钱。

第四问有："傭价一日一十钱"。"傭价一日五钱"。傭是僱傭。《后汉书·班超传》："家贫，常为官傭书以供养。""傭价一日一十钱"。就是一人工作一日的傭价为一十钱。

李俨说："僦傭同为僱傭之费，僦以一里计，傭以一日计也。"

[14] 臣淳风等谨按：……，故可为均赋之率也

各县一车到输所所用钱为：

甲县：0，乙县：$1\times 200=200$，丙县：$1\times 150=150$，丁

县：$1\times250=250$，戊县：$1\times150=150$。其中“甲自输其县，则无取僦之价。”

按术可得各县一斛的运费为：

甲县：$0+20=20$，乙县：$\frac{200}{25}+10=18$，丙县：$\frac{150}{25}+12=18$，丁县：$\frac{250}{25}+17=27$，戊县：$\frac{150}{25}+13=19$。即“甲一斛之费二十，乙、丙各十八，丁二十七，戊十九”。

各县户数除以各该县一斛运费，即“各以约其户，为衰”。

甲:乙:丙:丁:戊 $=\frac{20520}{20}:\frac{12312}{18}:\frac{7182}{18}:\frac{13338}{27}:\frac{5136}{19}=1026:684:399:494:270$，即是各县输粟的比率，即“可为均赋之率”。

注文“欲知僦一车到输所所用钱”，钱校本脱落一“所”字。今按殿本校补。

[15] 计经赋之率，……，各自相与通

计算赋粟的比率，应注意两方面：以户数计算，称为“户率”；以远近计算，称为“钱率”。二率之比即是赋粟的比率。

[16] 通则甲二十，乙十二，丙七，丁十三，戊五

因各县户数为：甲县：20520，乙县：12312，丙县：7182，丁县：13338，戊县：5130，以五县户数最大公约数 1026 约分，则得五县的“户率”为 20:12:7:13:5。

[17] 一斛之费为之钱率，……，即衰也

按一斛粟米的钱数以及各县至输所的远近求得各县运至输所后一斛粟米的价格为：

$$20,\ \frac{1\times200}{25}+10=18,\ \frac{1\times150}{25}+12=18,$$

$$\frac{1\times250}{25}+17=27,\ \frac{1\times150}{25}+13=19。$$

即得甲、乙、丙、丁、戊五县的“钱率”为 20:18:18:27:19。

以“钱率”各为分母，以“户率”各为分子，则得

$$\frac{20}{20},\quad \frac{12}{18},\quad \frac{7}{18},\quad \frac{13}{27},\quad \frac{5}{19}。$$

以 $20 \times 18 \times 18 \times 27 \times 19 = 3324240$ 为公分母，通分、约简上述分数，乃得五县的列衰：1026:684:399:494:270。

[18] 若其不然，……，当通分内子约之，于算甚繁

“以一斛之费约户数”可得各县列衰为

$$\frac{20520}{20}:\frac{12312}{\frac{1\times 200}{25}+10}:\frac{7182}{\frac{1\times 150}{25}+12}:\frac{13338}{\frac{1\times 250}{25}+17}$$

$$:\frac{5130}{\frac{1\times 150}{25}+13}=1026:684:399:494:270,$$

可见这一算法十分繁杂。

[19] 此一章皆相与通功共率，……，从其简易而已

“此一章”作“此一问”解释。“功共率”李潢疑为“公共率”之误。

“上二率”即第一、二两问的算法，“下一率”即第四问的算法，此三问皆可仿此，计算较为方便。

[20] 又以分言之，……，其意不异矣

因五县一斛粟米的价格分别为 20，18，18，27，19 钱，也可看作各县每户所出的比率为 $\frac{1}{20}$，$\frac{1}{18}$，$\frac{1}{18}$，$\frac{1}{27}$，$\frac{1}{19}$，即“甲一户出二十分斛之一，乙一户出十八分斛之一”。

“各以户数乘之”，得 $\frac{1}{20}\times 20520 = 1026$，$\frac{1}{18}\times 12312 = 684$，$\frac{1}{18}\times 7182 = 399$，$\frac{1}{27}\times 13338 = 494$，$\frac{1}{19}\times 5130 = 270$。即是五县的列衰。这一算法与前注所述“以一斛之费约户数取衰”。“其意不异矣”。

[21] 然则可置一斛之费而反衰之，……，且不妨上下也

此问也可按“反衰术”计算：

各县一斛粟米价格的“反衰”为$\frac{1}{20}$，$\frac{1}{18}$，$\frac{1}{18}$，$\frac{1}{27}$，$\frac{1}{19}$，若“先同其母，各以分母约其同”。即得

$$166212:184680:184680:123120:174960=51.3:57:57:38:54。$$

再分别乘以“户率”，则得各县之衰为：

$$51.3\times20=1026,\ 57\times12=684,\ 57\times7=399,$$

$$38\times13=494,\ 54\times5=270。$$

可见，按“合分”、“反衰”二术计算较为简便。

“且不妨上下”的“上下”，即前文“上二率，下一率”。

注文“先同其母，各以分母约其同”。不误。各版本皆讹作“各以分母约其子”。今校正。

［四］今有均赋粟，甲县四万二千算，粟一斛二十，自输其县；乙县三万四千二百七十二算，粟一斛一十八，佣价一日一十钱，到输所七十里；丙县一万九千三百二十八算，粟一斛一十六，佣价一日五钱，到输所一百四十里；丁县一万七千七百算，粟一斛一十四，佣价一日五钱，到输所一百七十五里；戊县二万三千四十算，粟一斛一十二，佣价一日五钱，到输所二百一十里；己县一万九千一百三十六算，粟一斛一十，佣价一日五钱，到输所二百八十里。凡六县赋粟六万斛，皆输甲县。六人共车，车载二十五斛，重车日行五十里，空车日行七十里，载输之间各一日。粟有贵贱，佣各别价，以算出钱，令费劳等。问县各粟几何。

答曰：

甲县一万八千九百四十七斛一百三十三分斛之四十九。

乙县一万八百二十七斛一百三十三分斛之九。

丙县七千二百一十八斛一百三十三分斛之六。

丁县六千七百六十六斛一百三十三分斛之一百二十二。

戊县九千二十二斛一百三十三分斛之七十四。

己县七千二百一十八斛一百三十三分斛之六。

术曰：以车程行空、重相乘为法，并空、重以乘道里，各自为实，实如法得一日。臣淳风等谨按：此术重往空还，一输再行道也[22]。置空行一里用七十分日之一，重行一里用五十分日之一，齐而同之，空、重行一里之路，往返用一百七十五分日之六[23]。定言之者，一百七十五里之路往返用六日也。故并空、重者，齐其子也。空、重相乘者，同其母也。于今有术，至输所里为所有数，六为所求率，齐一百七十五为所有率，而今有之，即各得输所用日也[24]。加载输各一日，欲得凡日也。而以六人乘之，欲知致一车用人也，又以佣价乘之，欲知致车人傭直几钱。以二十五斛除之，欲知致一斛之傭直也。加一斛粟价，即致一斛之费。加一斛之价于致一斛之佣直，即凡输一斛粟取佣所用钱[25]。各以约其算数为衰。今按甲衰四十二，乙衰二十四，丙衰十六，丁衰十五，戊衰二十，已衰十六。于今有术，副并为所有率。未并者各自为所求率。所赋粟为所有数。此今有衰分之义也[26]。副并为法，以所赋粟乘未并者，各自为实。实如法得一斛。各置所当出粟，以其一斛之费乘之，如算数而一，得率，算出九钱一百三十三分钱之三[27]。又载输之间各一日者，即二日也。

[22] 重往空还，一输再行道也

满载而去就是“重往”，空车返回即是“空还”。一去一回称为“一输”。一输走原路两趟，即“一输再行道也”。

[23] 置空行一里用七十分日之一，……，往返用一百七十五分日之六

因空车日行 70 里，重车日行 50 里，故空行 1 里需 $\frac{1}{70}$ 日，重行 1里需 $\frac{1}{50}$ 日。空、重行往返 1 里需

$$\frac{1}{70}+\frac{1}{50}=\frac{50+70}{70\times 50}=\frac{6}{175}\text{日。}$$

即“齐而同之，空、重行一里之路，往返用一百七十五分日之六”。但是也可看作往返 175 里的路程需 6 日。

[24] 于今有术，……，即各得输所用日也

“$\frac{6}{175}$”既可看作往返 1 里需 $\frac{6}{175}$ 日，也可看作往返 175 里而用 6 日。今以 6 为所求率，175 为所有率，各县至输所里数为所有数，所用日数为所求数。按比例计算得乙、丙、丁、戊、己县用日数：

$$\text{乙县：}2\frac{2}{5}\text{，丙县：}4\frac{4}{5}\text{，丁县：}6\text{，}$$

$$\text{戊县：}7\frac{1}{5}\text{，己县：}9\frac{3}{5}\text{。}$$

[25] 即凡输一斛粟取傭所用钱

“即凡输一斛粟取傭所用钱”。不误。各本于“粟”字前衍一“余”字。今删。

[26] 今按甲衰四十二，……，此今有衰分之义也

六县列衰为 甲:乙:丙:丁:戊:己 = 42:24:16:15:20:16，其和为 $42+24+16+15+20+16=133$。今以甲县为例，设甲县所赋粟为 x，按比例 $133:42=60000:x$，算得

$$x = \frac{60000 \times 42}{133} = 18947\frac{49}{133}。$$

[27] 各置所当出粟，……，算出九钱一百三十三分钱之三

以甲县为例，计算每"算"应出的钱数。

因甲县当出粟米 $18947\frac{49}{133}$ 斛，粟一斛价格为 20 钱，其"算"数为 42000，故得 $18947\frac{49}{133} \times 20 \div 42000 = 9\frac{3}{133}$。

这即是每"算"应出的钱数。

[五] 今有粟七斗，三人分舂之，一人为粝米，一人为粺米，一人为糳米，令米数等。问取粟为米各几何。

答曰：

粝米取粟二斗一百二十一分斗之一十。

粺米取粟二斗一百二十一分斗之三十八。

糳米取粟二斗一百二十一分斗之七十三。

为米各一斗六百五分斗之一百五十一。

术曰：列置粝米三十，粺米二十七，糳米二十四，而反衰之。此先约三率，粝为十，粺为九，糳为八。欲令米等者，其取粟、粝率十分之一，粺率九分之一，糳率八分之一。当齐其子，故曰反衰也。　臣淳风等谨按：米有精粗之异，粟有多少之差。据率，粺、糳少而粝多，用粟则粺、糳多而粝少。米若依本率之分，粟当倍率，故今反衰之，使精取多而粗得少。副并为法。以七斗乘未并者，各自为取粟实。实如法得一斗。于今有术，副并为所有率，未并者各为所求率，粟七斗为所有数，而今有之，故各得取粟也。若求米等者，以本率各乘定所取粟为实，以粟率五十为法，实如法得一斗。若径求为米等数者，置粝米三，用粟五；粺米二十七，用粟五十；糳米十二，用粟二十五[28]。齐其粟，同其米，并齐为法。以七斗乘同为实。所得即为米斗数[29]。

[28] 若径求为米等数者，……，用粟二十五

因“粟率五十，粝米三十，粺米二十七，糳米二十四，……”。故以粟米求粝米，求粺米，求糳米的比率分别为：$\frac{50}{30}=\frac{5}{3}$，$\frac{50}{27}$，$\frac{50}{24}=\frac{25}{12}$。

[29] 齐其粟，同其米，……，所得即为米斗数

本应齐其子，同其母，因以上各分数的分子为用粟数，分母是米数。故注文说：“齐其粟，同其米”。即

$$\frac{5}{3}=\frac{180}{108},\quad \frac{50}{27}=\frac{200}{108},\quad \frac{25}{12}=\frac{225}{108}。$$

以各分子的和 $180+200+225=605$ 为法，以 7 斗乘分母 108，得 $108\times 7=756$，为实，故得米斗数：

$$756\div 605=1\frac{151}{605}\text{斗。}$$

[六] 今有人当禀粟二斛。仓无粟，欲与米一、菽二，以当所禀粟。问各几何。

答曰：

米五斗一升七分升之三。

菽一斛二升七分升之六。

术曰：置米一、菽二求为粟之数。并之得三九分之八，以为法。亦置米一、菽二，而以粟二斛乘之，各自为实。实如法得一斛。臣淳风等谨按：置粟率五乘米一，米率三除之，得一三分之二，即是米一之粟也。粟率十以乘菽二，菽率九除之，得二九分之二，即是菽二之粟也。并全得三，齐子并之，得二十四，同母得二十七，约之得九分之八。故云并之得三九分之八。米一、菽二当粟三九分之八，此其粟率也。于今有术，米一、菽二皆为所求率，当粟三九分之八为所有率，粟二斛为所有数。凡言率者当相与通之，则为米九、菽十八，当粟三十五也。亦有置米

一、菽二求其为粟之率，以为列衰。副并为法。以粟乘列衰为实。所得即米一、菽二所求粟也。以米、菽本率而今有之，即合所问。

[七] 今有取佣负盐二斛，行一百里，与钱四十。今负盐一斛七斗三升少半升，行八十里。问与钱几何。

答曰：二十七钱十五分钱之十一。

术曰：置盐二斛升数，以一百里乘之为法。按此术以负盐二斛升数，乘所行一百里得二万里，是为负盐一升行二万里。于今有术为所有率。以四十钱乘今负盐升数，又以八十里乘之，为实。实如法得一钱。以今负盐升数乘所行里，今负盐一升凡所行里也。于今有术为所有数，四十钱为所求率也。衰分章"贷人千钱"，与此同。

[八] 今有负笼重一石一十七斤，行七十六步，五十返。今负笼重一石，行百步，问返几何。

答曰：四十三返六十分返之二十三。

术曰：以今所行步数乘今笼重斤数为法，此法谓负一斤一返所行之积步也。故笼重斤数乘故步，又以返数乘之，为实。实如法得一返[30]。按此法，负一斤一返所行之积步。此实者，一斤一日所行之积步。故以一返之课，除终日之程，即是返数也。　臣淳风等谨按：此术所行步多者得返少，所行步少者得返多。然则故所行者，今返率也。今所行者，故返率也[31]。今故所得返乘今返之率为实，而以故返之率为法，今有术也。按此负笼又有轻重。于是为术者因令重者得返少，轻者得返多。故又因其率以乘法实者，重今有之义也。然此意非也。按此笼虽轻而行有限，笼过重则人力遗，力有遗而术无穷，人行有限而笼轻重不等。使其有限之力随彼无穷之变，故知此术率乖理也。若故所行有空行返数设以问者，当因其所负以为返率，则今返之数可得而知也。假令空行一日六十里，负重一斛行四十里，减重一斗进二里半，负重二斗以下与空行同[32]。今负笼重六斗，往还行一百步，问返几何。答曰，一百五十返。术曰，置重行率加十里，以里法通之为实，以一返之步为法，实如法而一，即得也。

[30] 以今所行步数乘今笼重斤数为法，……，实如法得一返　术文和注文所说的"今"，都是本问的已知数据。如"今所行步

数”,“今笼重斤数”。即是各指“行百步”,“笼重一石”。

术文和注文所说的“故”,都是原有的条件。如“故笼重斤数”,“故步”,“故所行”及“故返”。就是分别指“笼重一石一十七斤”,“行七十六步”,“五十返”。

按术,得今返数为 $\dfrac{137\times76\times50}{120\times100}=43\dfrac{23}{60}$ 返。其中 120×100 为“一斤一返所行之积步”。$137\times76\times50$,为“一斤一日所行之积步”。

若按算法而论,实为反比例。即

$$\frac{\text{今返数}}{\text{故返数}}=\frac{\text{故笼重斤数}}{\text{今笼重斤数}},\quad \frac{\text{故返数}}{\text{今返数}}=\frac{\text{今步数}}{\text{故步数}}。$$

设负笼重一石,行 76 步的返数为 x,则有

$$\frac{x}{50}=\frac{137}{120},\quad \text{即}\quad x=\frac{137\times50}{120}。$$

又设负笼重一石,行 100 步的返数为 y,乃有

$$\frac{y}{\dfrac{137\times50}{120}}=\frac{76}{100},\quad \text{即}\quad y=\frac{137\times50\times76}{120\times100}=43\frac{23}{60}\text{返。}$$

[31] 然则故所行者,今返率也。今所行者,故返率也

根据本问所给的数据,按术计算,则知今所行 100 步即是故返率,作为所有率;故所行 76 步即是今返率,作为所求率;故所得 50 返作为所有数,依比例关系得所求数 x 为

$$\frac{100}{76}=\frac{50}{x},\quad \text{或}\quad x=\frac{76\times50}{100}=38,$$即是“所得返(50)乘今返之率(76)为实,而以故返之率(100)为法”。于是得 38 返。

注文“今返率也”下,各本脱落“今所行者,故返率也”一语。依杨辉本校补。

[32] 假令空行一日六十里,……,与空行同

若按此假定推算，当知：负重 8 斗行 45 里，负重 6 斗行 50 里。负重 4 斗行 55 里，负重 2 斗行 60 里。可见负重 2 斗与“空行一日六十里”同。

〔九〕今有程传委输[33]，空车日行七十里，重车日行五十里。今载太仓粟输上林，五日三返。问太仓去上林几何。

答曰：四十八里十八分里之十一。

术曰：并空、重里数，以三返乘之，为法。令空、重相乘，又以五日乘之，为实。实如法得一里。此亦如上术，率一百七十五里之路，往返用六日也。于今有术，则五日为所有数，一百七十五里为所求率，六日为所有率，以此所得则三返之路。今求一返，当以三约之，因令乘法而并除也。为术亦可各置空，重行一里用日之率，以为列衰。副并为法，以五日乘列衰为实，实如法所得，即各空、重行日数也。各以一日所行以乘，为凡日所行。三返约之，为上林去太仓之数。　臣淳风等谨按：此术重往空还，一输再还道。置空行一里用七十分日之一，重行一里用五十分日之一，齐而同之，空重行一里之路，往返用一百七十五分日之六。定言之者，一百七十五里之路，往返用六日。故并空重者，并齐也。空重相乘者，同其母也。于今有术，五日为所有数，一百七十五为所求率，六为所有率，以此所得，则三返之路。今求一返者，当以三约之，故令乘法而并除，亦当约之也。

〔一〇〕今有络丝一斤为练丝一十二两，练丝一斤为青丝一斤十二铢。今有青丝一斤，问本络丝几何。

答曰：一斤四两一十六铢三十三分铢之十六。

术曰：以练丝十二两乘青丝一斤一十二铢为法。以青丝一斤铢数乘练丝一斤两数，又以络丝一斤乘之，为实。实如法得一斤。按练丝一斤为青丝一斤十二铢，此练率三百八十四，青率三百九十六也。又络丝一斤为练丝十二两，此络率十六，练率十二也[34]。置今有青丝一斤，以练率三百八十四乘之为实，实如青丝率三百九

十六而一，所得青丝一斤用练丝之数也[35]。又以络率十六乘之所得为实，以练率十二为法，所得即练丝用络丝之数也。是谓重今有也[36]。虽各有率，不问中间，故令后实乘前实，后法乘前法而并除也[37]。故以练丝两数为实，青丝铢数为法[38]。一曰，又置络丝一斤两数与练丝十二两，约之，络得四，练得三，此其相与之率。又置练丝一斤铢数，与青丝一斤十二铢约之，练得三十二，青得三十三，亦其相与之率。齐其青丝、络丝，同其二练，络得一百二十八，青得九十九，练得九十六，即三率悉通矣。今有青丝一斤为所有数，络丝一百二十八为所求率，青丝九十九为所有率。为率之意犹此，但不先约诸率耳。凡率错互不通者，皆积齐同用之。放此，虽四五转不异也。言同其二练者，以明三率之相与通耳。于术无以异也[39]。又一术今有青丝一斤铢数，乘练丝一斤两数为实，以青丝一斤十二铢为法，所得即用练丝两数。以络丝一斤乘所得为实，以练丝十二两为法，所得即用络丝斤数也。

[33] 程传，委输

“程传”即是驿站。“委输”乃是运输。

[34] 按练丝一斤为青丝一斤十二铢，……，练率十二也

因为由络丝（生丝）化为练丝（熟丝）是按两计算，由练丝化为青丝（色丝）是按铢计算的。所以，以青丝求练丝应化为铢，以练丝求络丝当化为两。也即刘徽所说：“可俱为铢，可俱为两，可俱为斤，无所归滞也。”

依此例乃得：$\frac{练丝}{青丝}=\frac{384}{396}$，$\frac{络丝}{练丝}=\frac{16}{12}$。

[35] 置今有青丝一斤，……，所得青丝一斤用练丝之数也

设练丝斤数为 y，以青丝一斤求练丝斤数，按比例得

$\frac{y}{1}=\frac{384}{396}$，即 $y=\frac{384\times 1}{396}$。其中 $\frac{384}{396}$ 是青丝 1 斤相当于练丝的斤数。传本“所得青丝一斤练丝之数也”。中漏一“用”字，今补。

[36] 又以络率十六乘之所得为实，……，是谓重今有也

设络丝斤数为 x，以练丝 $\frac{384}{396}$ 斤求络丝斤数，按比例得

$$\frac{x}{y}=\frac{16}{12}，即\ x=\frac{16\times y}{12}=\frac{16\times 384}{12\times 396}。$$

故注文说“所得即练丝用络丝之数也”。

又因本问是以两次比例入算，所以说：“是谓重今有也。”

[37] 虽各有率，……，后法乘前法而并除也

由上注可知，由青丝(色丝)求练丝(熟丝)再求络丝(生丝)，共用两次比例，即 $\frac{y}{1}=\frac{384}{396}$，$\frac{x}{y}=\frac{16}{12}$，其中间结果 y 称为“中间”。在计算中，可以不必算出“中间 (y)”值。即“虽各有率，不问中间”。

根据上式，可得 $x=\frac{16\times y}{12}=\frac{384\times 16}{396\times 12}$。其中 384，16 分别为前后实；396，12 各是前后法。

注文“不问中间”。恶粟术注文及持米出关术注文都是“不问中间”。但钱校本讹作“不用中间”，今依殿本校正。

[38] 故以练丝两数为实，青丝铢数为法

在 $\frac{y}{1}=\frac{384}{396}$ 中，以铢为单位；在 $\frac{x}{y}=\frac{16}{12}$ 中，以两为单位。也即在 $x=\frac{384\times 16}{396\times 12}$ 中，其前后实、法分别以铢、两为单位，不可混淆。

[39] 齐其青丝、络丝，……，于术无以异也

因 $\frac{\text{络丝}}{\text{练丝}}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$，$\frac{\text{练丝}}{\text{青丝}}=\frac{384}{396}=\frac{32}{33}$，注文说：“凡率错互不通者，皆积齐同用之”。于是 $\frac{4}{3}$，$\frac{32}{33}$ 通分为 $\frac{128}{96}$，$\frac{96}{99}$。即“齐其青丝、络丝，同其二练。”即：所以“同其二练者，以明三率之相与通耳”。乃有

络丝∶青丝∶练丝 = 128∶99∶96，即是“三率悉通矣”。

据此，设络丝本为 x 斤，得：$x:1=128:99$，

于是 $$x=\frac{1\times 128}{99}=1\text{ 斤 }4\text{ 两 }16\frac{16}{33}\text{ 铢。}$$

可见与前面算法一致。

[一一] 今有恶粟二十斗，舂之，得粝米九斗。今欲求粺米十斗，问恶粟几何。

答曰：二十四斗六升八十一分升之七十四。

术曰：置粝米九斗，以九乘之，为法。亦置粺米十斗，以十乘之，又以恶粟二十斗乘之，为实。实如法得一斗。按此术置今有求粺米十斗，以粝米率十乘之，如粺米率九而一，则粺化为粝。又以恶粟二十斗乘之，如粝米九斗而一，即粝亦化为恶粟矣。此亦重今有之义。为术之意，犹络丝也。虽各有率，不问中间，故令后实乘前实，后法乘前法而并除之也。

[一二] 今有善行者行一百步，不善行者行六十步。今不善行者先行一百步，善行者追之，问几何步及之。

答曰：二百五十步。

术曰：置善行者一百步，减不善行者六十步，余四十步，以为法。以善行者之一百步，乘不善行者先行一百步，为实。实如法得一步。按此术以六十步减一百步，余四十步，即不善行者先行率也。善行者行一百步为追及率。约之，追及率得五，先行率得二[40]。于今有术，不善行者先行一百步为所有数，五为所求率，二为所有率，而今有之，得追及步也。

[40] 按此术以六十步减一百步，……，先行率得二

"先行率"是善行者比不善行者多行步数的比率，即 $100-60=40$。"追及率"是善行者所行步数的比率，即 100。按术，"追及率"与"先行率"的比值为

$$\frac{\text{追及率}}{\text{先行率}}=\frac{100}{100-60}=\frac{100}{40}=\frac{5}{2},$$

即"追及率得五，先行率得二"。

设善行者追及不善行者的步数为 x，若依比例计算，则得

$$\frac{x}{100}=\frac{5}{2} \quad 或 \quad x=\frac{5\times 100}{2}=250 步。$$

[一三] 今有不善行者先行一十里，善行者追之一百里，先至不善行者二十里。问善行者几何里及之。

答曰：三十三里少半里。

术曰：置不善行者先行一十里，以善行者先至二十里增之，以为法。以不善行者先行一十里，乘善行者一百里，为实。实如法得一里。按此术：不善行者既先行十里，后不及二十里，并之得三十里也。谓之先行率。善行者一百里为追及率。约之，先行率得三，追及率得十。于今有术，不善行者先行十里为所有数，十为所求率，三为所有率，而今有之，即得也。其意如上术。

[一四] 今有兔先走一百步，犬追之二百五十步，不及三十步而止。问犬不止，复行几何步及之。

答曰：一百七步七分步之一。

术曰：置兔先走一百步，以犬走不及三十步减之，余为法。以不及三十步乘犬追步数为实，实如法得一步。按此术，以不及三十步减先走一百步，余七十步为兔先走率。犬行二百五十步为追及率。约之，先走率得七，追及率得二十五。于今有术，不及三十步为所有数，二十五为所求率，七为所有率，而今有之，即得也。

[一五] 今有人持金十二斤出关。关税之，十分而取一。今关取金二斤，偿钱五千。问金一斤值钱几何。

答曰：六千二百五十。

术曰：以一十乘二斤，以十二斤减之，余为法。以一十乘五千为实。实如法得一钱。按此术，置十二斤以一乘之，十而一，得一斤五分斤之一，即所当税者也。减二斤，余即关取盈金。以盈除所偿钱，即金值也。今术既以十二斤为所税，则是以十为母，故以十乘二斤及

所偿钱，通其率。于今有术，五千钱为所有数，十为所求率，八为所有率，而今有之，即得也。

[一六] 今有客马日行三百里。客去忘持衣，日已三分之一，主人乃觉。持衣追及与之而还，至家视日四分之三。问主人马不休，日行几何。

答曰：七百八十里。

术曰：置四分日之三，除三分日之一[41]，按此术，置四分日之三，除三分日之一者，除，即减也。减之余，有十二分之五，即是主人追客还用日率[42]也。半其余以为法[43]。去其还，存其往。率之者，子不可半，故倍母，二十四分之五，是为主人与客均行用日之率也。副置法，增三分日之一，法二十四分之五者，主人往追用日之分也。三分之一者，客去主人未觉之前独行用日之分也。并连此数得二十四分日之十三，则主人追及前用日之分也。是为客用日率也。然则主人用日率者，客马行率也。客用日率者，主人马行率也[44]。母同则子齐，是为客马行率五，主人马行率十三。于今有术，三百里为所有数，十三为所求率，五为所有率，而今有之，即得也。以三百里乘之，为实。实如法，得主人马一日行。欲知主人追客所行里者，以三百里乘客人均行日分子十三，如母二十四而一，得一百六十二里半[45]。以此乘主人均行日分母二十四，如客马与主人均行用日分子五而一，亦得主人马一日行七百八十里也。

[41] 除三分日之一

"除三分日之一"的"除"字，应作"减"字解释。如注称："除，即减也。"术文"置四分日之三，除三分日之一"。即

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}\text{日。}$$

[42] 日率

"日率"即是时间。

"十二分之五，即是主人追客还用日率也"。其中 $\frac{5}{12}$ 日所指是

主人追及客人后，来回所用的时间。

[43] 半其余以为法

由 $\frac{3}{4}$ 日减去 $\frac{1}{3}$ 日的余为 $\frac{5}{12}$ 日。因"子不可半，故倍母"。余数 $\frac{5}{12}$ 的一半为 $\frac{5}{24}$。

因 $\frac{5}{12}$ 日是主人追客人来回所用的时间，若取其一半，即"去其还，存其往"。就是主人行一趟所用的时间。也是主人发觉"客去忘持衣"至追及客人所用的时间。即"是为主人与客均行用日之率也"。

[44] 然则主人用日率者，……，主人马行率也

主马快，客马慢，由家至追及处主人用日率为 $\frac{5}{24}$ 日，客人用日率为 $\frac{13}{24}$ 日，显见主、客所用日率与其马行率成反比例。即

$$\frac{\text{主马行率}}{\text{客马行率}}=\frac{\text{客用日率}}{\text{主用日率}}。$$

设主马日行 x 里，依上式，得

$$\frac{x}{300}=\frac{\frac{13}{24}}{\frac{5}{24}},\quad \text{即}\quad x=780\text{ 里。}$$

即刘注所说："主人用日率者，客马行率也。客用日率者，主人马行率也。"

[45] 欲知主人追客所行里者，……，得一百六十二里半

欲知主人所行路程，需先求客人所行路程。今已知客马日行300里，客用日率为 $\frac{13}{24}$ 日，故得客行里数为

$$\frac{13}{24}\times 300=162\frac{1}{2}\text{ 里，}$$

也就是主人追客所行的里数。

因$\frac{13}{24}$为客人用日率，并非主人用日率。故知注文“以三百里乘客人均行日分子十三”之“客”字各本误为“主”字。今以意校正。

[一七] 今有金箠，长五尺。斩本一尺，重四斤。斩末一尺，重二斤。问次一尺各重几何。

答曰：末一尺，重二斤。

次一尺，重二斤八两。

次一尺，重三斤。

次一尺，重三斤八两。

次一尺，重四斤。

术曰[46]：令末重减本重，余即差率也。又置本重，以四间乘之，为下第一衰。副置，以差率减之，每尺各自为衰。按此术，五尺有四间者，有四差也。令本末相减，余，即四差之凡数也。以四约之，即得每尺之差[47]。以差数减本重，余即次尺之重也。为术所置，如是而已。今此率，以四为母，故令母乘本为衰，通其率也[48]。亦可置末重以四间乘之，为上第一衰。以差率加之，为次下衰也[49]。副置下第一衰以为法，以本重四斤偏乘列衰，各自为实。实如法得一斤[50]。以下第一衰为法，以本重乘其分母之数，而又取此率乘本重为实。一乘一除，势无损益，故惟本存焉[51]。众衰相推为率，则其余可知也。亦可副置末衰为法，而以末重二斤乘列衰为实。此虽迂迴，然是其旧，故就新而言之也。

[46] 术

按术计算，是配分比例。实际上是等差数列的计算方法。若以现今算法计算，即知首项为 $a_1=4$，末项为 $a_5=2$，项数为 5。求各项 a_2，a_3，a_4 或 a_1-d，a_1-2d，a_1-3d。

因 $a_1 - a_5 = 4d$，　即 $d = \frac{a_1 - a_5}{4} = \frac{1}{2}$，

故

$$a_2 = a_1 - d = 3\frac{1}{2},\ a_3 = a_1 - 2d = 3,$$

$$a_4 = a_1 - 3d = 2\frac{1}{2}。$$

经文未指明五段金箠为等差数列，为术则按等差数列计算。何以不按等比数列或他法入算？读者不无疑窦。

[47] 令本末相减，余，……，即得每尺之差

“本”是金箠的端头，“末”是另一端头即其末尾。“凡数”是总数。

令首项，末项相减，所得是公差的四倍。除以四，即得公差

$$d = \frac{a_1 - a_5}{4}。$$

[48] 今此率，以四为母，故令母乘本为衰，通其率也

因首、末项相减为公差的 4 倍，若以 4 除，未必能整除，故以 4 乘本重 4 斤以为衰，即得列衰为：

$4\times 4,\ 4\times 4-2,\ 4\times 4-2-2,\ 4\times 4-2-2-2,$

$4\times 4-2-2-2-2$；或 16，14，12，10，8；

即注文“令母乘本为衰，通其率也”。

[49] 亦可置末重以四间乘之，……，为次下衰也

为了推求列衰，也可以 4 乘末项 2，再以“差率”即首末项的差逐次递加，得 $2\times 4,\ 2\times 4+2,\ 2\times 4+2+2,\ 2\times 4+2+2+2,\ 2\times 4+2+2+2+2$；即 8，10，12，14，16。

[50] 副置下第一衰以为法，……，实如法得一斤

按术得列衰为 8，10，12，14，16。以下第一衰 16 为法，又以本重 4 斤乘列衰为实，以法除实，则得：

$$\frac{8\times 4}{16},\ \frac{10\times 4}{16},\ \frac{12\times 4}{16},\ \frac{14\times 4}{16},\ \frac{16\times 4}{16},$$

即

$$2\text{斤},\ 2\frac{1}{2}\text{斤}=2\text{斤}8\text{两},\ 3\text{斤},\ 3\frac{1}{2}\text{斤}=3\text{斤}8\text{两},\ 4\text{斤}。$$

[51] 以下第一衰为法，……，故惟本存焉

注文“以下第一衰为法”至“故惟本存焉”一段，是注解上式

$$\frac{16\times 4}{16}=4。$$

“而又取此率乘本重为实”中“取此率”三字，各本皆作“反此率”。若以“反此率”解释，于意也通。因术文“以本重四斤徧乘列衰”是本重乘此率，即 16 × 4。而注文则是“此率乘本重”即 4 × 16。由于两处叙述相反，无妨称为“反此率”。但是据根“反”字的意义及刘注的惯例来看，这种解释似属牵强。为此，今按宋景昌校改为：“取此率。”

注文“故惟本存焉”。不误。钱校本却是“故为本存焉”。今校正。

[一八] 今有五人分五钱，令上二人所得与下三人等。问各得几何。

答曰：

甲得一钱六分钱之二，

乙得一钱六分钱之一，

丙得一钱，

丁得六分钱之五，

戊得六分钱之四。

术[52]曰：置钱锥行衰[53]，按此术，锥行者谓如立锥，初一、次二、次三、次四、次五，各均为一列衰也。并上二人为九，并下三人为六，六少于九，三。数不得等，但以五、四、三、二、一为率也。以三均加焉，副并为法。以所分钱乘未并者各自为实。

实如法得一钱。此问者，令上二人与下三人等。上、下部差一人，其差三。均加上部，则得二三；均加下部，则得三三。下部犹差一人差得三，以通于本率，即上、下部等也[54]。于今有术，副并为所有率，未并者各为所求率，五钱为所有数，而今有之，即得等耳。假令七人分七钱，欲令上二人与下五人等，则上下部差三人，并上部为十三，下部为十五，下多上少，下不足减上，当以上下部列差而后均减，乃合所问耳[55]。此可仿下术，令上二人分二钱半为上率，令下三人分二钱半为下率，上、下二率以少减多，余为实。置二人三人各半之，减五人，余为法。实如法得一钱，即衰相去也[56]。下衰率六分之五者，丁所得钱数也。

[52] 术

按术计算是配分比例，也可以等差数列计算，由已知条件得

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a_3 + a_4 + a_5 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} 2a_1 - d = 3a_1 - 9d \\ 5a_1 - 10d = 5。 \end{cases}$$

于是：甲得 $1\frac{2}{6}$ 钱，乙得 $1\frac{1}{6}$ 钱，丙得 1 钱，丁得 $\frac{5}{6}$ 钱，戊得 $\frac{4}{6}$ 钱。

本问未说明五人所得钱数成等差数列，为术则按“锥行衰”计算，读者不无疑问。

[53] 锥行衰

“锥行衰”，即是以 5，4，3，2，1 为列衰。如刘注说：“此术，锥行者谓如立锥，初一，次二，次三，次四，次五，各均为一列衰也。”又如李籍《音义》说：“下多上少，如立锥之形。”

[54] 此问者，……，即上、下部等也

因 5 人的列衰为 5，4，3，2，1，上部两人的衰各为 5，4，其和为 $5+4=9$，下部三人的衰各为 3，2，1，其和为 $3+2+1=6$，上下部相差一人，其衰则差 3。

若以此差加于上部每人，共加两个 3，即“二三”。以此差加于下部每人，共加三个 3，即“三三”。

上部两人，下部三人，下部多一人，而其衰差 3。若以此 3 加于本率，原为 3，2，1，今则各为 6，5，4。原为 5，4，今则各为 8，7。于是上、下部之和分别为：$8+7=15$，$6+5+4=15$，即“上、下部等也”。

依比例推算：$\frac{a_1}{5}=\frac{8}{30}$，$\frac{a_2}{5}=\frac{7}{30}$，$\frac{a_3}{5}=\frac{6}{30}$，$\frac{a_4}{5}=\frac{5}{30}$，$\frac{a_5}{5}=\frac{4}{30}$，于是得 $a_1=1\frac{2}{6}$，$a_2=1\frac{1}{6}$，$a_3=1$，$a_4=\frac{5}{6}$，$a_5=\frac{4}{6}$。

[55] 假令七人分七钱，……，乃合所问耳

假设七人分七钱，其锥行衰为7，6，5，4，3，2，1，欲使上部二人的钱数与下部五人的钱数相等，由于上、下部相差三人，上、下部列衰之和分别为 $7+6=13$，$5+4+3+2+1=15$，下多上少，不能均加，只得以上、下部的列衰依次“均减”。

“均减”，即是由列衰各减去以上、下部之差（$15-13=2$）为分子人数差（$5-2=3$）为分母的分数 $\frac{2}{3}$。故得列衰为

$$7-\frac{2}{3},\ 6-\frac{2}{3},\ 5-\frac{2}{3},\ 4-\frac{2}{3},$$
$$3-\frac{2}{3},\ 2-\frac{2}{3},\ 1-\frac{2}{3}。$$

即

$$6\frac{1}{3},\ 5\frac{1}{3},\ 4\frac{1}{3},\ 3\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{3},\ 1\frac{1}{3},\ \frac{1}{3};$$

或

$$\frac{19}{3},\ \frac{16}{3},\ \frac{13}{3},\ \frac{10}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}。$$

于是上部二人的列衰和与下部五人的列衰和相等。

即 $$\frac{19}{3}+\frac{16}{3}=\frac{13}{3}+\frac{10}{3}+\frac{7}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{35}{3}。$$

其七人的列衰和则为

$$\frac{19}{3}+\frac{16}{3}+\frac{13}{3}+\frac{10}{3}+\frac{7}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{70}{3}。$$

依比例 $\frac{a_1}{7}=\frac{\frac{19}{3}}{\frac{70}{3}}$，$\frac{a_2}{7}=\frac{\frac{16}{3}}{\frac{70}{3}}$，$\frac{a_3}{7}=\frac{\frac{13}{3}}{\frac{70}{3}}$，$\frac{a_4}{7}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{70}{3}}$，

$\dfrac{a_5}{7}=\dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{70}{3}}$，$\dfrac{a_6}{7}=\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{70}{3}}$，$\dfrac{a_7}{7}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{70}{3}}$。七人各得钱数为

$$a_1=\frac{19}{10},\ a_2=\frac{16}{10},\ a_3=\frac{13}{10},\ a_4=\frac{10}{10}$$

$$a_5=\frac{7}{10},\ a_6=\frac{4}{10},\ a_7=\frac{1}{10}。$$

[56] 此可仿下术，……，即衰相去也

"下术"即是第十九问的算法，"上率"是等差数列前两项的算术平均数，即 $\dfrac{a_1+a_2}{2}=\dfrac{2\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{5}{4}$。下率是等差数列后三项的算术平均数，或是其中间一项的值，即

$$\frac{a_3+a_4+a_5}{3}=\frac{2\frac{1}{2}}{3}=\frac{5}{6}\ (=a_4)。$$

以上下率的差作为实，也就是以公差的 $2\dfrac{1}{2}$ 倍作为实，即 $\dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{6}$，以 $5-\left(\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2}\right)$ 为法。得公差为

$$d=\frac{\frac{5}{4}-\frac{5}{6}}{5-\left(\frac{2+3}{2}\right)}=\frac{\frac{5}{4}-\frac{5}{6}}{2\frac{1}{2}}=\frac{1}{6},$$

即"衰相去也"。

[一九] 今有竹九节，下三节容四升，上四节容三升。问中间二节欲均容各多少。

答曰：

下初，一升六十六分升之二十九，

次一升六十六分升之二十二，
次一升六十六分升之一十五，
次一升六十六分升之八，
次一升六十六分升之一，
次六十六分升之六十，
次六十六分升之五十三，
次六十六分升之四十六，
次六十六分升之三十九。

术曰：以下三节分四升为下率，以上四节分三升为上率。此二率者，各其平率也。上下率以少减多，余为实。按此上、下节各分所容为率者，各其平率。上、下以少减多者，余为中间五节半之凡差，故以为实也[57]。置四节、三节，各半之，以减九节，余为法。实如法得一升，即衰相去也。按此术，上下节所容已定之节，中间相去节数也。实者，中间五节半之凡差也。故实如法而一，则每节之差也[58]。下率，一升少半升者，下第二节容也。一升少半升者，下三节通分四升之平率。平率即为中分节之容也。

[57] 按此上、下节各分所容为率者，……，故以为实也

下三节所容的算术平均数，称为“下率”。即 $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=\frac{4}{3}$ 升，或 $a_2=\frac{4}{3}$ 升。如“下率，一升少半升者，下第二节容也”。上四节所容的算术平均数，称为“上率”。即 $\frac{a_6+a_7+a_8+a_9}{4}=\frac{3}{4}$ 升，或 $\frac{a_6+a_9}{2}=\frac{a_7+a_8}{2}=\frac{3}{4}$ 升。

$\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{7}{12}$ 升，是公差的 $5\frac{1}{2}$ 倍。即“中间五节半之凡差”。

[58] 按此术，……，则每节之差也

下三节之半，即 $\frac{3}{2}$。上四节之半，即 $\frac{4}{2}$。共为 $\frac{3}{2}+\frac{4}{2}=3\frac{1}{2}$。

因 $9-3\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}$，故公差为：$d=\dfrac{\frac{7}{12}}{5\frac{1}{2}}=\frac{7}{12}\div 5\frac{1}{2}$，即"每节之差也"。

[二〇] 今有凫起南海，七日至北海；雁起北海，九日至南海。今凫雁俱起。问何日相逢。

答曰：三日十六分日之十五。

术曰：并日数为法，日数相乘为实，实如法得一日。按此术，置凫七日一至，雁九日一至。齐其至，同其日，定六十三日凫九至、雁七至。令凫雁俱起而问相逢者，是为共至。并齐以除同，即得相逢日。故并日数为法者并齐之意，日数相乘为实者，犹以同为实也[59]。一曰：凫飞日行七分至之一，雁飞日行九分至之一。齐而同之，凫飞定日行六十三分至之九，雁飞定日行六十三分至之七。是为南、北海相去六十三分，凫日行九分，雁日行七分也。并凫雁一日所行，以除南北相去，而得相逢日也[60]。

[59] 按此术，置凫七日一至，……，犹以同为实也

凫 7 日一至北海，或 63 日九至。雁 9 日一至南海，或 63 日七至。如"定六十三日凫九至、雁七至"。即"齐其至，同齐日"。

若推求凫雁相逢日数，则有 $\dfrac{1}{\frac{1}{7}+\frac{1}{9}}=\dfrac{1}{\frac{9+7}{63}}=\dfrac{63}{9+7}$，

即"并齐 $(9+7)$ 以除同 (63)"得 $\dfrac{63}{9+7}=3\frac{15}{16}$ 日。

[60] 一曰，凫飞日行七分至之一，……，而得相逢日也

这是刘徽提出另一解释：凫一日飞全程的 $\frac{1}{7}$ 或 $\frac{9}{63}$，雁一日飞 $\frac{1}{9}$ 或 $\frac{7}{63}$。若把南北海相距看为 63，凫雁一日共飞可看为 $9+7=16$，故得相逢日数为 $\frac{63}{16}=3\frac{15}{16}$ 日。

［二一］今有甲发长安，五日至齐；乙发齐，七日至长安，今乙发已先二日，甲乃发长安。问几何日相逢。

答曰：二日十二分日之一。

术曰：并五日、七日以为法。按此术，并五日、七日为法者，犹并齐为法。置甲五日一至、乙七日一至，齐而同之，定三十五日甲七至，乙五至。并之为十二至者，用三十五日也。谓甲乙与发之率耳。然则日化为至当除日，故以为法也[61]。以乙先发二日减七日，减七日者，言甲乙俱发，今以发为始发之端，于本道里则余分也[62]。余，以乘甲日数为实。七者，长安去齐之率也。五者，后发相去之率也。今问后发，故舍七用五。以乘甲五日，为二十五日。言甲七至、乙五至更相去用此二十五日也[63]。实如法得一日。一日甲行五分至之一，乙行七分至之一。齐而同之，甲定日行三十五分至之七，乙定日行三十五分至之五。是为齐去长安三十五分，甲日行七分，乙日行五分也。今乙先行发二日，已行十分，余相去二十五分。故减乙二日余，令相乘，为二十五分[64]。

［61］按此术，并五日、七日为法者，……，故以为法也

甲发自长安，5 日可至齐一次，或 35 日七至齐。乙发自齐，7 日可至长安一次，或 35 日五至长安。若用 35 日，则“甲七至，乙五至”。即 $\frac{1}{5}=\frac{7}{35}$，$\frac{1}{7}=\frac{5}{35}$。

因此，可以说 35 日，甲、乙共 $7+5=12$ 至。此即“将日化为至”。

［62］减七日者，言甲乙俱发，……，于本道里则余分也

由于乙先发二日，即相当于二日后甲乙两人同时从两地出发。

[63] 七者，长安去齐之率也。……，用此二十五日也

七，是乙由齐至长安的比率。五，是二日后乙距甲的比率。因问甲几日逢乙，故以 5 乘甲一至所用的日数为实。即 $5 \times 5 = 25$ 日。

[64] 一日甲行五分至之一，……，为二十五分

另一解释：甲 5 日至齐，即一日走全程的 $\frac{1}{5}$ 或 $\frac{7}{35}$。乙 7 日至长安，即日行全程的 $\frac{1}{7}$ 或 $\frac{5}{35}$。若定全程为 35，则每日甲行 7 而乙行 5。因乙先行二日，即乙已先行 $2 \times 5 = 10$，故 $35 - 10 = 25$ 为所余的路程。以甲乙所行的和 $7 + 5 = 12$ 除之，即得相逢日数 $25 \div 12 = 2\frac{1}{12}$ 日。

[二二] 今有一人一日为牡瓦三十八枚，一人一日为牝瓦七十六枚。今令一人一日作瓦，牝、牡相半，问成瓦几何。

答曰：二十五枚少半枚。

术曰：并牝、牡为法，牝、牡相乘为实，实如法得一枚。此意亦与凫雁同术。牝、牡瓦相并，犹如凫、雁日飞相并也。 臣淳风等谨按：此术，并牝、牡为法者，并齐之意。牝、牡相乘为实者，犹以同为实也。故实如法即得也。

[二三] 今有一人一日矫矢五十，一人一日羽矢三十，一人一日筈矢十五。今令一人一日自矫、羽、筈，问成矢几何。

答曰：八矢少半矢。

术曰：矫矢五十，用徒一人。羽矢五十，用徒一

人太半人。箬矢五十，用徒三人少半人。并之，得六人，以为法。以五十矢为实。实如法得一矢[65]。按此术，言成矢五十，用徒六人一日工也。此同工共作，犹凫雁共至之类，亦以同为实，并齐为法。可令矢互乘一人为齐，矢相乘为同。今先令同于五十矢，矢同则徒齐，其归一也。以此术为凫雁者，当雁飞九日而一至，凫飞九日而一至七分至之二，并之得二至七分至之二，以为法。以九日为实。实如法而一，得凫雁相逢日数也[66]。

[65] 术曰：𥎊矢五十，……，实如法得一矢

此问原可仿凫雁术人算。即

$$\frac{1}{\frac{1}{50}+\frac{1}{30}+\frac{1}{15}}=\frac{150}{3+5+10}=8\frac{1}{3}\text{矢。}$$

但是，为术之意，系采用另一算法。即

因一人一日𥎊矢五十，一人一日羽矢三十，一人一日箬矢十五。若一日𥎊矢五十，则需用 $\frac{50}{50}=1$ 人，一日羽矢五十，需用 $\frac{50}{30}=1\frac{2}{3}$ 人，一日箬矢五十，需用 $\frac{50}{15}=3\frac{1}{3}$ 人。故知成矢五十，共需 $1+1\frac{2}{3}+3\frac{1}{3}=6$ 人作一日工。也可看作是一人一日成 $\frac{50}{6}=8\frac{1}{3}$ 矢，即是“同日共作”。其实这一方法与凫雁术算法相同，只是解释不一，故称“其归一也”。

[66] 以此术为凫雁者，……，得凫雁相逢日数也

第二十问也可用此术计算。

若凫雁俱飞 9 日，雁为 1 至，则凫为 $\frac{1}{7}\times 9=1\frac{2}{7}$ 至。凫雁共为 $1+1\frac{2}{7}=2\frac{2}{7}$ 至。故其相逢日数为 $9\div 2\frac{2}{7}=3\frac{15}{16}$ 日。

[二四] 今有假田，初假之岁三亩一钱，明年四亩一钱，后年五亩一钱。凡三岁得一百，问田几何。

答曰：一顷二十七亩四十七分亩之三十一。

术曰：置亩数及钱数，令亩数互乘钱数，并以为法。亩数相乘，又以百钱乘之，为实。实如法得一亩。按此术，令亩互乘钱者，齐其钱。亩数相乘者，同其亩。同于六十，则初假之岁得钱二十，明年得钱十五，后年得钱十二也。凡三岁得钱一百为所有数，同亩为所求率，四十七钱为所有率，今有之，即得也。齐其钱，同其亩，亦如凫雁术[67]。于今有术，百钱为所有数，同亩为所求率，并齐为所有率。　臣淳风等谨按：假田六十亩，初岁得钱二十，明年得钱十五，后年得钱十二，并之得钱四十七，是为得田六十亩三岁所假。于今有术，百钱为所有数，六十亩为所求率，四十七为所有率，而今有之，即合问也。

[二五] 今有程耕，一人一日发七亩，一人一日耕三亩，一人一日耰种五亩。今令一人一日自发、耕、耰种之，问治田几何。

答曰：一亩一百一十四步七十一分步之六十六。

术曰：置发、耕、耰亩数，令互乘人数，并以为法。亩数相乘为实。实如法得一亩。此犹凫雁术也。　臣淳风等谨按：此术以发、耕、耰种亩数互乘人者齐其人，亩数相乘者同其亩。故并齐为法，以同为实。计田一百五亩，发用十五人，耕用三十五人，种用二十一人。并之得七十一工。治得一百五亩，故以为实。而一人一日所治，故以人数为法除之，即得也。

[67] 按此术，令亩互乘钱者，……，亦如凫雁术

第一年典田三亩赁价 1 钱，即每亩赁价 $\frac{1}{3}$ 钱或 $\frac{20}{60}$ 钱，明年则每亩赁价 $\frac{1}{4}$ 钱或 $\frac{15}{60}$ 钱，后年 $\frac{1}{5}$ 钱或 $\frac{12}{60}$ 钱。也就是说每 60 亩第一年赁价 20 钱，明年 15 钱，后年 12 钱。即“齐其钱”，“同其亩”。

三年典率之和为：$20+15+12=47$，按比例计算，得亩数 (x) 为

$$x:60=100:47，或\ x=\frac{100\times 60}{47}=127\frac{31}{47}\ 亩。$$

此问也可按凫雁术入算。初假，明年假，后年假每亩各为 $\frac{20}{60}$，$\frac{15}{60}$，$\frac{12}{60}$ 钱，相加的和为 $\frac{47}{60}$ 钱。三年共得 100 钱，故有

$$100\div\frac{47}{60}=127\frac{31}{47}\ 亩。$$

[二六] 今有池，五渠注之。其一渠开之，少半日一满；次，一日一满；次，二日半一满；次，三日一满；次，五日一满。今皆决之，问几何日满池。

答曰：七十四分日之十五。

术曰：各置渠一日满池之数，并以为法。按此术，其一渠少半日满者，是一日三满也。次，一日一满。次，二日半满者，是一日五分满之二也。次，三日满者，是一日三分满之一也。次，五日满者，是一日五分满之一也。并之，得四满十五分满之十四也[68]。以一日为实。实如法得一日。此犹矫矢之术也。先令同于一日，日同则满齐。自凫雁至此，其为同齐有二术焉，可随率宜也。其一术，列置日数及满数[69]，其一渠少半日满者，是一日三满也。次一日一满。次二日半满者，是五日二满。次三日一满。次五日一满。此谓之列置日数及满数也。今日互相乘满，并以为法，日数相乘为实，实如法得一日[70]。亦如凫雁术也。　臣淳风等谨按：此术其一渠少半日满池者，是一日三满池也。次，一日一满。次，二日半满者，是五日再满。次，三日一满。次，五日一满。此谓列置日数于右行及满数于左行。以日互乘满者，齐其满。日数相乘者，同其日。满齐而日同，故并齐以除同，即得也。

[68] 按此术，其一渠少半日满者，……，得四满十五分满之十四也

一渠注水入池，$\frac{1}{3}$ 日满池 1 次，即是 1 日满池 3 次。次一渠

为 1 日满池 1 次。第三渠 $2\frac{1}{2}$ 日满池 1 次，也可以说是注水 5 日满 2 次，或 1 日而 $\frac{2}{5}$ 满。第四渠 3 日 1 满，即 1 日 $\frac{1}{3}$ 满。第五渠则 1 日 $\frac{1}{5}$ 满。若五渠同开，注水 1 日可得 $3+1+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=4\frac{14}{15}$ 满。

[69] 其一术，列置日数及满数

按照古代算法，应将日数、满数各列一行。即

日数	1	1	5	3	5
满数	3	1	2	1	1

注文所说"二日半满者"，即是 5 日 2 满。

[70] 今日互相乘满，并以为法，日数相乘为实，实如法得一日

以日数相乘为实，即 $1\times1\times5\times3\times5=75$。若五渠分别开放注水，则 75 日每渠各为 225 满，75 满，30 满，25 满，15 满。也即 75 日共 $225+75+30+25+15=370$ 满。于是得

$$\frac{75}{370}=\frac{15}{74}\text{日。}$$

[二七] 今有人持米出三关，外关三而取一，中关五而取一，内关七而取一，余米五斗。问本持米几何。

答曰：十斗九升八分升之三。

术[71]曰：置米五斗。以所税者[72]三之，五之，七之，为实。以余不税者[72]二、四、六相乘为法。实如法得一斗。此亦重今有术也。所税者谓今所当税之本。三、五、七皆为所求率，二、四、六皆为所有率。置今有余米五斗，以七乘之，六而一，即内关未税之本米也。又以五乘之，四而一，即中关未税之本米也。又以三乘之，二而一，即外关未税之本米也。今从末求本，不问中间，故令中率转相乘而同之[73]亦如络丝术。

又一术：外关三而取一，则其余本米三分之二也。求外关所税之余，则当置本持米，二乘之，三而一。欲知中关，以四乘之，五而一。欲知内关，以六乘之，七而一。凡余分者，乘其母子，以三、五、七相乘得一百五，为分母；二、四、六相乘得四十八，为分子。约而言之，则是余米于本所持三十五分之十六也。于今有术，余米五斗为所有数，分母三十五为所求率，分子十六为所有率也[74]。

[71] 术

余米 5 斗。因内关税为 $\frac{1}{7}$，故其课税前的米数为 $\frac{5}{1-\frac{1}{7}}=5\times\frac{7}{6}$ 斗。中关税为 $\frac{1}{5}$，其课税前的米数为 $\frac{5\times\frac{7}{6}}{1-\frac{1}{5}}=5\times\frac{7}{6}\times\frac{5}{4}$ 斗。外关税为 $\frac{1}{3}$，其课税前的米数为 $\frac{5\times\frac{7}{6}\times\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{3}}=5\times\frac{7}{6}\times\frac{5}{4}\times\frac{3}{2}=5\times\frac{7\times5\times3}{6\times4\times2}$ 斗。

[72] 税者，不税者

所当课税的数，称为“税者”。所税之余，称为“不税者”。如本问外关三而取一，余为 $3-1=2$。中关五而取一，余为 $5-1=4$。内关七而取一，余为 $7-1=6$。其中 3，5，7 称为“税者”，2，4，6 称为“不税者”。

[73] 此亦重今有术也。……，故令中率转相乘而同之

以税者 3，5，7 为所求率，以不税者 2，4，6 为所有率，以余米 5 斗为所有数，每次课税前的米数为所求数。设内关，中关，外关税前米数分别为 x，y，z，按比例乃得

$$x:5=7:6,\quad 或\ x=\frac{5\times7}{6}。$$

$$y:x=5:4,\quad 或\ y=\frac{5x}{4}=\frac{5\times5\times7}{4\times6}。$$

$z:y=3:2$，或 $z=\frac{3y}{2}=\frac{5\times3\times5\times7}{2\times4\times6}=109\frac{3}{8}$ 升。此即"重今有术也"。

[74] 又一术：……，分子十六为所有率也

"外关三而取一"即取 $\frac{1}{3}$，余米为 $\frac{2}{3}$。"中关五而取一"，即取 $\frac{1}{5}$，余米为 $\frac{4}{5}$。"内关七而取一"，即取 $\frac{1}{7}$，余米为 $\frac{6}{7}$。

因 $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=\frac{16}{35}$，故可看作三关 35 而取 16，余米则为 $\frac{16}{35}$。依比例得：

$\frac{本持米数}{5}=\frac{35}{16}$，或 本持米数 $=\frac{35\times5}{16}=109\frac{3}{8}$ 升。

[二八] 今有人持金出五关，前关二而税一，次关三而税一，次关四而税一，次关五而税一，次关六而税一。并五关所税，适重一斤。问本持金几何。

答曰：一斤三两四铢五分铢之四。

术曰：置一斤，通所税者以乘之为实。亦通其不税者以减所通，余为法。实如法得一斤[75]。此意犹上术也。置一斤。通所税者，谓令二、三、四、五、六相乘为分母七百二十也。通其所不税者，谓令所税之余一、二、三、四、五相乘为分子一百二十也。约而言之，是为余金于本所持六分之一也。以子减母，凡五关所税六分之五也。于今有术，所税一斤为所有数，分母六为所求率，分子五为所有率[76]。此亦重今有之义。又虽各有率，不问中间，故令中率转相乘而连除之，即得也。置一以为持金之本率，以税率乘之除之，则其率亦成积分也。

[75] 置一斤，……，实如法得一斤

五关所税为 1 斤。所税者 2，3，4，5，6 的乘积为 $2\times3\times4\times5\times6=720$，不税者 1,2,3,4,5 的乘积为 $1\times2\times3\times4\times5=120$。

以 $1\times720=720$ 为实，以 $720-120=600$ 为法，故得本持金数为 $720\div600=1\ \dfrac{120}{600}$ 斤 $=1$ 斤 3 两 $4\dfrac{4}{5}$ 铢。

[76] 置一斤。通所税者，……，分子五为所有率

使所税者的乘积为分母，以不税者的乘积为分子。即得

$$\frac{1\times2\times3\times4\times5}{2\times3\times4\times5\times6}=\frac{120}{720}=\frac{1}{6},$$

即是“余金于本所持六分之一也”。五关所税则为 $\left(1-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{5}{6}$。

设本持金数为 x，按比例得 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{6}{5}$，

即得 $$x=\frac{1\times6}{5}=1\text{ 斤 }3\text{ 两 }4\frac{4}{5}\text{ 铢。}$$

九章算术卷第七

盈不足[1]以御隐杂互见

[一] 今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四。问人数、物价各几何。

答曰：七人，

物价五十三。

[二] 今有共买鸡，人出九，盈十一；人出六，不足十六。问人数、鸡价各几何。

答曰：九人，

鸡价七十。

[三] 今有共买琎，人出半，盈四；人出少半，不足三。问人数、琎价各几何。

答曰：四十二人，

琎价十七。

[四] 今有共买牛，七家共出一百九十，不足三百三十；九家共出二百七十，盈三十。问家数、牛价各几何。

答曰：一百二十六家，

牛价三千七百五十。

按此术，并盈不足者，为众家之差，故以为实。置所出率各以家数除之，各得一家所出率，以少减多者得一家之差。以除即家数。以所出率乘之，减盈、增不足，故得牛价也[2]。

盈不足术曰：置所出率，盈、不足各居其下。令

维乘所出率，并以为实[3]。并盈、不足为法。实如法而一[4]。按盈者，谓之朓；不足者，谓之朒。所出率谓之假令。盈朒维乘两设者欲为齐同之意[5]。据"共买物，人出八，盈三；人出七，不足四"，齐其假令，同其盈朒，盈朒俱十二。通计齐则不盈不朒之正数，故可并以为实。并盈不足为法。齐之三十二者，是四假令，有盈十二。齐之二十一者，是三假令，亦朒十二。并七假令合为一实。故并三、四为法[6]。有分者，通之。若两设有分者，齐其子，同其母。此问两设俱见零分[7]，故齐其子，同其母。盈不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数[8]。令下维乘上讫，以同约之。不可约，故以同乘之。所出率以少减多者，余谓之设差，以为少设。则并盈朒是为定实。故以少设约法则为人数，约实则为物价[9]。盈朒当与少设相通，不可偏约，亦当分母乘，设差为约法实[10]。

其一术曰：并盈不足为实。以所出率以少减多，余为法。实如法得一人。以所出率乘之，减盈、增不足即物价[11]。此术意谓盈不足为众人之差，以所出率以少减多，余为一人之差。以一人之差约众人之差，故得人数也。

[1] 盈不足

李籍《音义》说："盈者，满也。不足者，虚也。满虚相推，以求其适，故曰盈不足。"

本章共二十问，第一至四问是一盈一不足，第五问是两盈，第六问是两不足，第七问是一盈一适足，第八问是一不足一适足，第九以后各问，并非盈不足问题，而是以盈不足术计算的问题。

一般算术题都有一确切答案。欲以盈不足术计算的题，无妨先取一数设作答案，依题核算，若结果合问，则所设的数即是所求的数；若不合问，与已知数据相较，不是盈余便是不足。通过这样两次假设，便可变原题为盈不足问题。可见一般算术题皆可按盈不足术计算。为此，一般西方学者称盈不足术为"双设法"。

若已知数与未知数的关系式为一次方程

$$f(x)=ax+b=0,$$

设 $x=x_1$，x_2 分别代入上式得 $f(x_1)=ax_1+b$，$f(x_2)=ax_2+b$。

又设 $f(x_1)<f(x)<f(x_2)$，即 $f(x_2)$ 为盈余，$f(x_1)$ 为不足，故得：$x=\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}=-\frac{b}{a}$，与方程 $ax+b=0$ 的解相同。

画出 $y=f(x)=ax+b$ 的图象。如图 1，易知 $OA=OB+BA=OC+CA$。由相似句股形得：

$$BA=\frac{AC\cdot P_1B}{CP_2}=\frac{BC\cdot P_1B}{BP_2}=\frac{(x_1-x_2)f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)},$$

$$AC=\frac{(x_2-x_1)f(x_2)}{f(x_2)-f(x_1)},$$

则有：

$$OA=x=x_1+\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)}=x_2+\frac{(x_2-x_1)f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}$$

$$=\frac{x_1f(x_2)-x_2\cdot f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}=-\frac{b}{a}。$$

$OA=-\frac{b}{a}$ 乃是方程 $ax+b=0$ 的解。

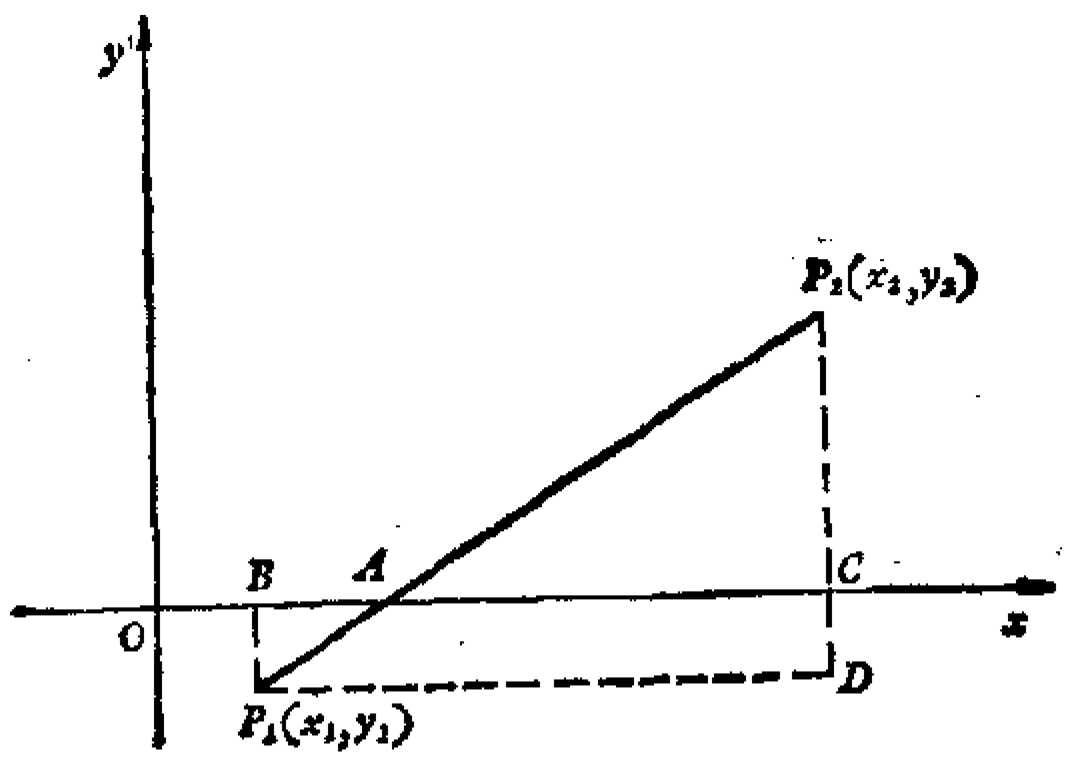


图 1

第九、十、十三、十四、十五、十六、十七、十八及二十诸问都是

一次方程问题，以盈不足术计算，都得确切解。但，第十一、十二、十九各问并非一次方程问题，若以盈不足术计算，所得为近似解。

设所列已知数与未知数的关系式为 $f(x)=0$ 非一次方程，又设 $y=f(x)$ 于区间 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 为单调连续函数，$f(x)=0$ 于 $[x_1, x_2]$ 内之根约等于：

$$
\begin{aligned}
x&=x_1+\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)}=x_2+\frac{(x_2-x_1)f(x_2)}{f(x_2)-f(x_1)}\\
&=\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}。
\end{aligned}
$$

其实，上式是两点 $P_1(x_1, f(x_1))$，$P_2(x_2, f(x_2))$ 间直线与 x 轴交点 A 的横坐标。不是函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标（图 2）。

由相似句股形得：

$$
BA=\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)},\quad CA=\frac{(x_2-x_1)f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)},
$$

故得：

$$
\begin{aligned}
OA&=x_1+\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{f(x_1)-f(x_2)}=x_2+\frac{(x_2-x_1)f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}\\
&=\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}\doteq OM。
\end{aligned}
$$

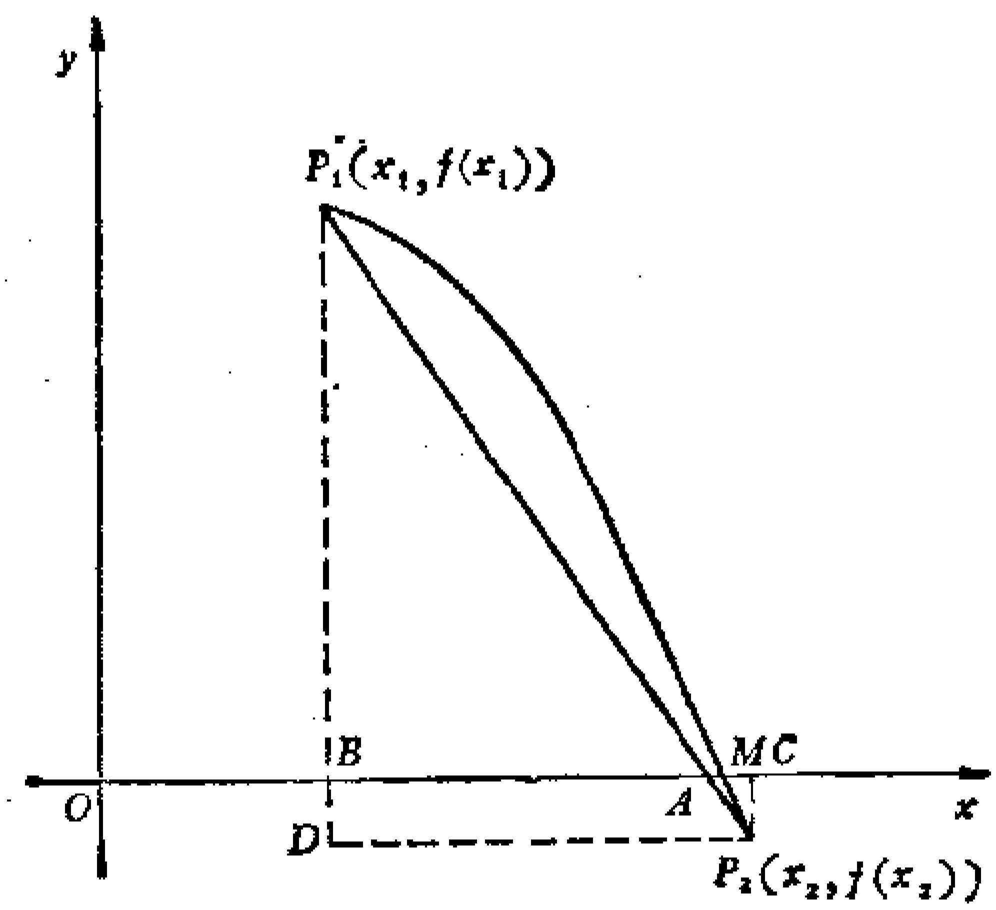


图 2

上式的值即是 M 点横坐标的近似值，求此值的方法在数学里称为“弦位法”或“假借法”。此法实际是盈不足术。

隋唐时代，一些中东数学著作如阿尔·纳吉姆（al-Nadim）的《算法之书》（约 987）中曾引证色丹尼为阿尔·花剌子模（al-Khowarizmi，约 830）的《盈不足算书》作过注解。因此，人们便认为盈不足术在九世纪可能已传入到中东。后来，在中东一般称盈不足术为“hisab el-chataain（契丹算法）”。至宋元时代，意大利斐波纳奇（Fibonacci，1170—1250）的《算术之书》（1202）中称盈不足为“De regulis el-chatayn（契丹算法）”，并明确地说此法来自阿拉伯。

古代，一般称中国为契丹，至目前为止，仍有些国家把中国称为契丹。由于 el-chatayn 及 el-chataain 是契丹的译音，钱宝琮及杜石然根据这些线索考证出盈不足曾传入中东，又传入欧洲。

明末，李之藻编译《同文算指》，称“双设法”为“迭借互征”。并以为“迭借互征”原源于外国，殊不知“双设法”即古代的“盈不足术”。如钱宝琮《中国数学史话》说：“我们不要数典忘祖，这个方法应该叫盈不足术。”

〔2〕按此术，并盈不足者，……，故得牛价也

今以第四问为例，逐步计算如下

家数为 $\dfrac{330+30}{\dfrac{270}{9}-\dfrac{190}{7}}=\dfrac{360}{\dfrac{180}{63}}=\dfrac{360\times 63}{180}$，

其中 30 为盈，330 为不足，$330+30=360$ 即是众家之差，作为被除数；七家共出 190 钱，每家出 $\dfrac{190}{7}$ 钱；九家共出 270 钱，每家出 $\dfrac{270}{9}$ 钱；$\dfrac{270}{9}-\dfrac{190}{7}=\dfrac{180}{63}$ 为一家之差，作为除数。以众家之差除以一家之差，即得家数 $\dfrac{330+30}{\dfrac{270}{9}-\dfrac{190}{7}}=126$ 家。

以家数乘每家出钱数与不足数相加为：

$$126\times\frac{190}{7}+330=3750,$$

即得牛价。或以家数乘每家出钱数减去盈数，也得牛价

$$126\times\frac{270}{9}-30=3750。$$

上式 $126\times\frac{190}{7}+330$ 为“增不足”，此式 $126\times\frac{270}{9}-30$ 是“减盈”。故称“减盈、增不足，故得牛价也”。

[3] 置所出率，……，并以为实

“所出率”称为“两设”，也称为“假令”。如注文“所出率谓之假令”，就是每人(或每家)所出钱数。如第一问“人出八、人出七”的“八、七”即所出率。

先置所出率，使盈朒二数各居于其下。如第一问“人出八 (a)，盈三 (b)；人出七 (c)，不足四 (d)”。置 $8(a)$，$7(c)$ 于上，使 $3(b)$，$4(d)$ 各居其下。如图 3。

$8(a)$	$7(c)$
$3(b)$	$4(d)$

图 3

“维乘”即是交错相乘。

使盈不足二数与对应的所出率交错相乘。如 $4\times 8(ad)$、$3\times 7(bc)$ 都是维乘的积，然后“并以为实”，即

$4\times 8+3\times 7=53$ 或 $ad+bc$，

[4] 实如法而一

以第一问为例，按术计算如下：

设人数为 x，物价为 y，则得 $\frac{y}{x}=\frac{ad+bc}{b+d}=\frac{4\times 8+3\times 7}{3+4}=7\frac{4}{7}$。即是每人应出钱数。若每人出 $\frac{ad+bc}{b+d}=7\frac{4}{7}$ 钱，则不盈不朒。

第一问所问为“人数、物价各几何”。若按术计算，所得只是每人应出钱数。当求得每人应出钱数时，虽然也可以推算出人数和物价，但术文并未叙述推求人数、物价的方法。显见本问与术文两者所论不同。

戴校本说：“考此术法实，皆以设差约之，实为物价，法为人

数。与他术实如法而一者不同。此五字后人所加。今删。"若仅就第一至四问来说，戴震所论确有一定道理。若按第九、十问来说，则不当删去。如钱校本说："按此系本章术文，不专为共买物问题而设。'实如法而一'所得即为刘注所谓'不盈不朒之正数'。此五字不应删去"。今从钱说。

若所问为人数、物价，可理解为"置所出率，以少减多，余，以约法实。实为物价，法为人数"。若所问为不盈不朒之正数，则可按"实如法而一"计算。

[5] 按盈者，谓之朓；不足者，谓之朒。……欲为齐同之意

以第一问为例，注释如次：

"人出八 (a)，盈三 (b)；人出七 (c)，不足四 (d)"。可改为人出 32($8\times4=ad$)，盈12($3\times4=bd$)；人出 21($7\times3=bc$)，不足 12($4\times3=bd$)。其中人出 32，盈12是"人出八，盈三"的四倍，而人出 21，不足 12 是"人出七，不足四"的三倍。按照这样，盈朒二数相乘称为"同"，"盈朒维乘两设者"称为"齐"。如"齐其假令，同其盈朒，盈朒俱十二"。"齐之三十二者，是四假令，有盈十二。齐之二十一者，是三假令，亦朒十二"。

"盈朒维乘两设者欲为齐同之意"，即是盈朒二数维乘两设可作为两设，盈朒二数相乘可作为盈朒。

注文"按盈者"至"欲为齐同之意"一段，钱校本置于"盈不足"、"术曰"之间。殿本则置于"据共买物"之前。"按盈者，谓之朓；不足者，谓之朒"一语在"盈不足"、"术曰"之间未为不可，但"所出率谓之假令。盈朒维乘两设者欲为齐同之意"一语，理应在术文之后。今依殿本移至术文之后。

[6] 齐其假令，同其盈朒，……，故并三、四为法

盈朒维乘两设称为"齐"，盈朒相乘称为"同"。如第一问"人出八 (a)，盈三 (b)；人出七 (c)，不足四 (d)"。乃得图 4

其中 32，21 即是"齐其假令"，12 即是"同齐盈朒"。

因 32，12 是"人出八，盈三"的四倍，即"是四假令"。21，12 是"人出七，不足四"的三倍，即"是三假令"。

盈朒维乘两设(齐):	$4\times 8=32(ad)$	$3\times 7=21(bc)$
盈朒相乘(同):	$3\times 4=12(bd)$	$3\times 4=12(bd)$

图 4

前后共计 ($b+d=4+3=7$) 七假令，"并七假令合为一实，故并三、四为法"。即得：$\frac{ad+bc}{b+d}=\frac{32+21}{3+4}=\frac{53}{7}$，即是"通计齐则不盈不朒之正数"。可见术文是推求不盈不朒的正数，即每人应出钱数。

设人数为 x，物价为 y。依题意，乃有：

$$\begin{cases} y=8x-3=ax-b \\ y=7x+4=cx+d \end{cases},$$

若按方程计算，两式消去常数项可得：$\frac{y}{x}=\frac{53}{7}=\frac{ad+bc}{b+d}$；两式消元可得：

$$x=\frac{3+4}{8-7}=7=\frac{b+d}{a-c},$$

$$y=\frac{32+21}{8-7}=53=\frac{ad+bc}{a-c}。$$

[7] 此问两设俱见零分

"此问"二字是指第三、四两问。

如第三问"人出半"、"人出少半"，即是两设人出分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，都是分数。

[8] 盈不足相与同其买物者，……，法为人数

今以第四问为例，注释如下：

"七家共出一百九十"，即每家出 $\frac{190}{7}$ 钱；"九家共出二百七十"，即每家出 $\frac{270}{9}$ 钱。其中 $\frac{190}{7}$，$\frac{270}{9}$ 即是"所出率"。"置所出率，

以少减多”。其差为 $\frac{270}{9}-\frac{190}{7}=\frac{180}{63}$。

“以约法、实”的“法”、“实”是术文所说“并盈、不足为法”。“维乘所出率，并以为实”的“法”、“实”。即

$$法：30+330，\quad 实：330\times\frac{270}{9}+30\times\frac{190}{7}。$$

“以约法、实”即 $\dfrac{30+330}{\frac{270}{9}-\frac{190}{7}}$，$\dfrac{330\times\frac{270}{9}+30\times\frac{190}{7}}{\frac{270}{9}-\frac{190}{7}}$。

“实为物价”的“实”，即是约实的商，即 $\dfrac{330\times\frac{270}{9}+30\times\frac{190}{7}}{\frac{270}{9}-\frac{190}{7}}$ $=3750$，“法为人数”的“法”，即是约法的商，即 $\dfrac{30+330}{\frac{270}{9}-\frac{190}{7}}=126$。

如按上注所设，即得：$y=\dfrac{ad+bc}{|a-c|}$，$x=\dfrac{b+d}{|a-c|}$。前者是物价，后者是人数(或家数)。

[9] 令下维乘上讫，……，约实则为物价

“令下维乘上讫”的“下”、“上”两字，分别指盈朒及所出率，是针对前文“置所出率，盈不足各居其下”来说的。其实，即是“盈朒维乘两设”。

若两设及盈朒是分数时，“维乘所出率，并以为实”也可能是分数，如欲化简此分数，需以其分母约分。若“不可约”，则应将“并盈不足为法”乘其分母。注文“以同约之”即是以其分母约“实”。“以同乘之”即是以其分母乘“法”。

“所出率以少减多者，余谓之设差。以为少设”。因所出率称为两设，故称所出率相减的差为“设差”。又因两设一数较多另一数较少，于是又称“设差”为“少设”。

“并盈朒是为定实”。为了区别于泛实，所以称为“定实”。

今以第四问为例，注释如下：

“令下维乘上讫”：$330\times\frac{270}{9}+30\times\frac{190}{7}=\frac{675000}{63}$，

以“同”63约之不尽，即“不可约”。因 $330\times270\times7+30\times190\times9=675000$ 为实，$330+30=360$ 为法。由于“不可约”，故“以同乘之”，即是以“同”63乘法 $(330+30)\times63=22680$。

所谓“设差”或“少设”，即是 $\frac{270}{9}-\frac{190}{7}=\frac{180}{63}$。

“则并盈朒是为定实”，即 $330+30=360$。

“故以少设约法则为人数，约实则为物价”。即

$$x=\frac{330+30}{\frac{270}{9}-\frac{190}{7}}=\frac{360}{\frac{180}{63}}=\frac{360\times63}{180}=126,$$

$$y=\frac{330\times\frac{270}{9}+30\times\frac{190}{7}}{\frac{270}{9}-\frac{190}{7}}=\frac{\frac{675000}{63}}{\frac{180}{63}}=\frac{675000}{180}=3750。$$

钱校本断句为：“所出率以少减多者，余谓之设差。以为少设，则并盈朒是为定实。”似不妥当，今校正。

[10] 盈朒当与少设相通。……，设差为约法实

此处“盈朒”即是“并盈朒是为定实”。$330+30=360$。“盈朒”360不乘以分母63，谓之不相通。若乘以分母63，即称为相通。

因所出率 $\frac{190}{7}$、$\frac{270}{9}$ 为分数，而设差 $\frac{270}{9}-\frac{190}{7}=\frac{180}{63}$ 也为分数。又因“少设”只能约实，$y=\frac{\frac{675000}{63}}{\frac{180}{63}}=3750$，不可约法，$x=\frac{360}{\frac{180}{63}}$，这样就叫做“不可偏约”。当推求家数 (x) 及物价 (y) 时，

需使“盈朒当与少设相通,”又“不可徧约”，所以应当以分母 63 乘“盈朒”,即 $x=\dfrac{360}{\dfrac{180}{63}}=\dfrac{360\times 63}{180}$。

如上所述,则得家数、物价各为:

$$x=\frac{360}{\frac{180}{63}}=\frac{360\times 63}{180}=126,\quad y=\frac{\frac{675000}{63}}{\frac{180}{63}}=3750。$$

当“不可徧约”时,应以分母乘盈朒，由以上所述可知，钱校本断句为“亦当分母乘设差为约法实”。易于误解。今以意改为“亦当分母乘,设差为约法实”。或较妥当。

[11] 其一术曰: ……,减盈、增不足即物价

这是推求人数、物价的另一方法。以第一问为例,推算如下:

按术则得人数为 $\quad x=\dfrac{b+d}{a-c}=\dfrac{3+4}{8-7}=7$ 人

推求物价时,可以所出率乘人数减盈数即得物价,或以所出率乘人数加不足数也得物价。即

$$y=a\times\frac{b+d}{a-c}-b=56-3=53,$$

或

$$y=c\times\frac{b+d}{a-c}+d=49+4=53。$$

若依方程组计算,乃有 $\begin{cases}y=ax-b\\ y=cx+d\end{cases}$, 故得 $x=\dfrac{b+d}{a-c}$, 于是有: $y=a\times\dfrac{b+d}{a-c}-b$, 是“减盈”，或 $y=c\times\dfrac{b+d}{a-c}+d$，是“增不足”。

[五] 今有共买金,人出四百,盈三千四百;人出三百,盈一百。问人数、金价各几何。

答曰：三十三人，

金价九千八百。

[六] 今有共买羊，人出五，不足四十五；人出七，不足三。问人数、羊价各几何。

答曰：二十一人，

羊价一百五十。

两盈、两不足术曰：置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，以少减多，余为实。两盈、两不足以少减多，余为法。实如法而一。有分者通之。两盈、两不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法实，实为物价，法为人数。按此术，两盈者，两设皆逾于正数；两不足者，两设皆不足于正数。其所以变化，犹两盈，而或有势同而情违者。当其为实，俱令不足维乘相减，则遗其所不足焉。故其余所以为实者，无朒数以损焉。盖出而有余两盈，两设皆逾于正数[12]。假令与共买物，人出八盈三，人出九盈十，齐其假令，同其两盈，两盈俱三十。举齐兼去则其余所以为实者无盈数。两盈以少减多，余为法。齐之八十者，是十假令；而凡盈三十者，是三以十齐之。齐之二十七者，是三假令；而凡盈三十者，是十以三齐之。今假令两盈十、三，以二十七减八十，余五十三为实。故令以三减十，余七为法[13]。所出率以少减多，余，谓之设差。因设差为少设，则两盈之差是为定实。故以少设约法则为人数，约实则得物价[14]。

其一术曰：置所出率，以少减多，余为法。两盈、两不足，以少减多，余为实。实如法而一得人数。以所出率乘之，减盈、增不足，即物价[15]。置所出率，以少减多得一人之差。两盈、两不足相减，余为众人之差。故以一人之差除之，得人数。以所出率乘之，减盈、增不足，即物价。

[12] 按此术，两盈者，……，两设皆逾于正数

盈不足术注文“通计齐则不盈不朒之正数”。第九问注文“得故米斗数，乃不盈不朒之正数”。第十问注文“即设差不盈不朒之

正数，即得日数”。第十九问注文“得日数者，即设差不盈不朒之正数”。据此，可知刘徽所谓“正数”，即是问题的答数。如第一问的 $\frac{8\times4+7\times3}{3+4}=\frac{53}{7}$，即是“正数”。

设 $y=f(x)$ 为单调连续函数，当 $x=x_1$，$x=x_2$ 时，得 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$。若都是不足数。如果当 $x=x_0$，且 $y=y_0=0$ 时，其中 $x_0=\frac{x_2\cdot f(x_1)-x_1\cdot f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}$ 即是所谓“正数”。

在 $y=f(x)$ 中，当 $x=x_1$，$x=x_2$ 时，得 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$。若都是盈数，即“两设皆逾于正数。”乃有：

$$x_1>\frac{x_2\cdot f(x_1)-x_1\cdot f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)},\ x_2>\frac{x_2\cdot f(x_1)-x_1\cdot f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}。$$

对于两不足的问题，即“两设皆不足于正数”。乃有：

$$x_1<\frac{x_2\cdot f(x_1)-x_1\cdot f(x_3)}{f(x_1)-f(x_2)},\ x_2<\frac{x_2\cdot f(x_1)-x_1\cdot f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}。$$

大典本、殿本在“按此术”之下为“两盈两不足者”。钱校本以为是衍文，删去“两盈”二字。术文既是“两盈两不足术”，此处当有“两盈”。今校补。戴震于“两盈”下校补“者，两设皆逾于正数”八字，并从戴校本。

[13] 假令与共买物，人出八盈三，……，余七为法

今以“人出八盈三，人出九盈十”为例，说明两盈问题的齐同意义。

“齐其假令，同其两盈”。即是将人出 8 盈 3，人出 9 盈 10 改为人出 $8\times10=80$ 盈 $3\times10=30$，人出 $9\times3=27$ 盈 $10\times3=30$。即得“两盈俱三十”。就是说人出 $8\times10=80$ 是“十假令”，盈 $3\times10=30$ 是“三以十齐之”。人出 $9\times3=27$ 是“三假令”，盈 $10\times3=30$ 是“十以三齐之”。以两假令之差为实，即 $8\times10-9\times3=53$，以两盈之差为法，即 $10-3=7$。

[14] 所出率以少减多，……，约实则得物价

以“人出八盈三，人出九盈十”为例，注释如下：

“设差”即是 $9-8=1$，“定实”即是 $10-3=7$。“以少设约法”、“约实”的“法”、“实”是指术文所说的“法”、“实”。即“法”为 $10-3=7$，“实”为 $8\times10-9\times3=53$。故人数为 $\frac{10-3}{9-8}=7$ 人，物价为 $\frac{8\times10-9\times3}{9-8}=53$ 钱。

[15] 其一术曰：置所出率，……，减盈、增不足，即物价

这是两盈、两不足问题的另一解法。今以第六问为例注释如下：

按术推算，得人数为：$\frac{b-d}{c-a}=\frac{45-3}{7-5}=21$ 人。

求物价时，可以所出率乘人数加不足数即得物价。即

$$c\times\frac{b-d}{c-a}+d=7\times21+3=150,$$

或

$$a\times\frac{b-d}{c-a}+b=5\times21+45=150。$$

设人数为 x，物价为 y，若依方程组计算，乃有

$$\begin{cases}y=ax+b=5x+45\\y=cx+d=7x+3\end{cases},$$

解之得

$$x=\frac{b-d}{c-a}=21,\quad y=c\times\frac{b-d}{c-a}+d=150,$$

或

$$y=a\times\frac{b-d}{c-a}+b=150。$$

[七] 今有共买豕，人出一百，盈一百；人出九十，适足。问人数、豕价各几何[16]。

答曰：一十人，

豕价九百。

[八] 今有共买犬，人出五，不足九十；人出五十，适足。问人数、犬价各几何。

答曰：二人，

犬价一百。

盈、适足，不足、适足术曰：以盈及不足之数为实。置所出率，以少减多，余为法。实如法得一人。其求物价者，以适足乘人数得物价。盈不足数为实者，数单见即众人差，故以为实。所出率以少减多者，余，即一人差，故以为法。以除众人差，得人数。以适足乘人数，即得物价也。此术意谓所出率以少减多者，余是一人不足之差。不足数为众人之差。以一人差约之，故得人之数也。

[九] 今有米在十斗桶中，不知其数。满中添粟而舂之，得米七斗。问故米几何。

答曰：二斗五升。

术曰：以盈不足术求之，假令故米二斗，不足二升。令之三斗，有余二升[17]。按桶受一斛。若使故米二斗，须添粟八斗以满之。八斗得粝米四斗八升。课于七斗是为不足二升。若使故米三斗，添粟七斗以满之。七斗得粝米四斗二升。课于七斗是为有余二升。以盈不足维乘假令之数者，欲为齐同之意。实如法，即得故米斗数，乃不盈不朒之正数也。

[16] 今有共买豕，……，豕价各几何

第七问为“今有共买豕，……”。独殿本无此问。显系漏抄，今从钱校本。

[17] 术曰：以盈不足术求之，……，有余二升

第九至二十各问，并非盈不足问题，而是以盈不足术计算的问题。

例如，变第九问为盈不足问题：

如有故米二斗，假设添粟米八斗以满桶。按粟米之法，八斗粟米得粝米 $8\times\frac{3}{5}=4$ 斗 8 升。与故米二斗相加，计六斗八升。与七斗相较，则不足二升。

如有故米三斗，假设需添粟米七斗以满桶。按粟米之法，七斗粟米得粝米 $7\times\frac{3}{5}=4$ 斗 2 升，加故米三斗，计七斗二升。与七斗相较，则盈余二升。

根据以上两次假令，原问可变为："假令故米二斗，不足二升；令之三斗，有余二升。"如此，本问便可按盈不足术进行计算。

[一〇] 今有垣高九尺。瓜生其上，蔓日长七寸。瓠生其下，蔓日长一尺。问几何日相逢，瓜、瓠各长几何。

答曰：五日十七分日之五。

瓜长三尺七寸十七分寸之一，

瓠长五尺二寸十七分寸之十六。

术曰：假令五日，不足五寸。令之六日，有余一尺二寸。按假令五日不足五寸者，瓜生五日，下垂蔓三尺五寸，瓠生五日，上延蔓五尺。课于九尺之垣，是为不足五寸。令之六日，有余一尺二寸者，若使瓜生六日，下垂蔓四尺二寸，瓠生六日，上延蔓六尺。课于九尺之垣，是为有余一尺二寸。以盈不足维乘假令之数者，欲为齐同之意。实如法而一，即设差不盈不朒之正数，即得日数。以瓜、瓠一日之长乘之，故各得其长之数也。

[一一] 今有蒲生一日，长三尺。莞生一日，长一尺。蒲生日自半。莞生日自倍。问几何日而长等[18]。

答曰：二日十三分日之六。

各长四尺八寸十三分寸之六。

术曰：假令二日，不足一尺五寸。令之三日，有余一尺七寸半。按假令二日，不足一尺五寸者，蒲生二日，长四尺五寸，莞生二日，长三尺，是为未相及一尺五寸，故曰不足。令之三日，有余一尺七

寸半者，蒲增前七寸半，莞增前四尺，是为过一尺七寸半，故曰有余。以盈、不足乘除之，又以后一日所长，各乘日分子，如日分母而一者，各得日分子之长也。故各增二日定长即得其数。

[18] 今有蒲生一日，长三尺。……，问几何日而长等

由经文"蒲生日自半，莞生日自倍"来看，这问确实是一等比数列问题。"蒲生一日，长三尺"即是"蒲"数列的首项，"日自半"即其公比；而"莞生一日，长一尺"即是"莞"数列的首项，"日自倍"即其公比。已知首项，已知公比的数列，称为已知数列；在已知等比数列里，一般可用公式求得其和。但注文说"按假令二日，不足一尺五寸者，蒲生二日，长四尺五寸，莞生二日，长三尺，是为未相及一尺五寸，故曰不足。令之三日，有余一尺七寸半者，蒲增前七寸半，莞增前四尺，是为过一尺七寸半，故曰有余"。好像是按逐项相加求得其和的。

由于蒲、莞是分别按累减、累加速度连续地生长，若将刘注里等比数列的求和公式扩充为连续函数，并设 x 日等长，则得

$$\frac{3-3\cdot\dfrac{1}{2^x}}{1-\dfrac{1}{2}}=\frac{1-2^x}{1-2},\quad 或\ (2^x)^2-7(2^x)+6=0,$$

解之得 $x=1+\dfrac{\lg 3}{\lg 2}$。 又设 y 是蒲、莞生长之差，则有

$$y=\frac{1-2^x}{1-2}-\frac{3\left(1-\dfrac{1}{2^x}\right)}{1-\dfrac{1}{2}},\ 或\ y=\frac{(1-2^x)(6-2^x)}{2^x}。$$

在上式中，令 $x=2$，则 $y=-1\dfrac{1}{2}$，令 $x=3$，则 $y=1\dfrac{3}{4}$。按两次假令，即可近似地求得一次函数为

$$y=3\frac{1}{4}x-8。$$

这是以一次函数代替上述函数，因而所得为近似解。

[一二] 今有垣厚五尺，两鼠对穿。大鼠日一尺，小鼠亦日一尺。大鼠日自倍，小鼠日自半。问几何日相逢、各穿几何[19]。

答曰：二日十七分日之二。

大鼠穿三尺四寸十七分寸之十二，

小鼠穿一尺五寸十七分寸之五。

术曰：假令二日，不足五寸。令之三日，有余三尺七寸半。 大鼠日倍，二日合穿三尺；小鼠日自半，合穿一尺五寸。并大、小鼠所穿，合四尺五寸，课于垣厚五尺，是为不足五寸。令之三日，大鼠穿得七尺，小鼠穿得一尺七寸半，并之，以减垣厚五尺，有余三尺七寸半。以盈不足术求之即得。以后一日所穿乘日分子，如日分母而一，即各得日分子之中所穿。故各增二日定穿，即合所问也。

[19] 今有垣厚五尺，……，问几何日相逢、各穿几何

仿照注[18]的说法设两鼠相逢日数为 x，依题意则有

$$\frac{2^x-1}{2-1}+\frac{1-\frac{1}{2^x}}{1-\frac{1}{2}}=5,\ \text{或}\ (2^x)^2-4(2^x)-2=0。$$

解之得 $$x=\frac{\lg(2+\sqrt{6})}{\lg 2}。$$

两鼠穿墙深度 y 是日数 x 的函数，故有

$$y=\frac{2^x-1}{2-1}+\frac{1-\frac{1}{2^x}}{1-\frac{1}{2}}-5,\ \text{或}\ y=\frac{2^{2x}-2^{x+2}-2}{2^x}。$$

在上式中，假令 $x=2$，则 $y=-\frac{1}{2}$；假令 $x=3$，则 $y=3\frac{3}{4}$。即“假令二日，不足五寸。令之三日，有余三尺七寸半”。

按两次假令，可近似地得到一次函数为：$y = 4\frac{1}{4}x - 9$。

这是以一次函数代替上述函数，故得近似解。

本问是第十二问，殿本则列为最后一问。今从钱校本。

[一三] 今有醇酒一斗，直钱五十；行酒一斗，直钱一十。今将钱三十，得酒二斗。问醇、行酒各得几何。

答曰：醇酒二升半，

行酒一斗七升半。

术曰：假令醇酒五升，行酒一斗五升，有余一十。令之醇酒二升，行酒一斗八升，不足二。据醇酒五升，直钱二十五，行酒一斗五升，直钱一十五。课于三十，是为有余十。据醇酒二升，直钱一十，行酒一斗八升，直钱一十八。课于三十，是为不足二。以盈不足术求之。此问已有重设及其齐同之意也。

[一四] 今有大器五、小器一容三斛；大器一、小器五容二斛。问大、小器各容几何。

答曰：大器容二十四分斛之十三，

小器容二十四分斛之七。

术曰：假令大器五斗，小器亦五斗，盈一十斗。令之大器五斗五升，小器二斗五升，不足二斗。按大器容五斗，大器五，容二斛五斗。以减三斛，余五斗，即小器一所容。故曰小器亦五斗。小器五，容二斛五斗，大器一容五斗，合为三斛。课于两斛，乃多十斗。令之大器五斗五升，大器五，合容二斛七斗五升。以减三斛，余二斗五升，即小器一所容。故曰小器二斗五升。大器一容五斗五升，小器五合容一斛二斗五升，合为一斛八斗。课于二斛，少二斗。故曰不足二斗。以盈不足维乘之为实。并盈不足为法，除之。

[一五] 今有漆三得油四，油四和漆五。今有漆三斗，欲令分以易油，还自和余漆。问出漆、得油、和漆各几

何。

答曰：出漆一斗一升四分升之一，

得油一斗五升，

和漆一斗八升四分升之三。

术曰：假令出漆九升，不足六升。令之出漆一斗二升，有余二升。按此术，三斗之漆，出九升，得油一斗二升，可和漆一斗五升。余有二斗一升，则六升无油可和。故曰不足六升。令之出漆一斗二升，则易得油一斗六升，可和漆二斗。于三斗之中已出一斗二升，余有一斗八升。见在油合和得漆二斗，则是有余二升。以盈不足维乘之为实，并盈不足为法，实如法而一，得出漆升数。求油及和漆者，四、五各为所求率，三、四各为所有率，而今有之，即得也。

[一六] 今有玉方一寸，重七两；石方一寸，重六两。今有石立方三寸，中有玉，并重十一斤。问玉、石重各几何。

答曰：玉一十四寸，重六斤二两。

石一十三寸，重四斤十四两。

术曰：假令皆玉，多十三两。令之皆石，不足十四两。不足为玉，多为石。各以一寸之重乘之，得玉石之积重。立方三寸是一面之方，计积二十七寸。玉方一寸重七两，石方一寸重六两，是为玉石重差一两。假令皆玉，合有一百八十九两。课于一十一斤，有余一十三两。玉重而石轻，故有此多。即二十七寸之中有十三寸，寸损一两则以为石重，故言多为石。言多之数出于石以为玉。假令皆石，合有一百六十二两。课于十一斤，少十四两。故曰不足。此不足即以重为轻，故令减少数于石重。即二十七寸之中有十四寸，寸增一两也。

[一七] 今有善田一亩，价三百；恶田七亩，价五百。今并买一顷，价钱一万。问善、恶田各几何。

答曰：善田一十二亩半，

恶田八十七亩半。

术曰：假令善田二十亩，恶田八十亩，多一千七百一十四钱七分钱之二。令之善田一十亩，恶田九十亩，不足五百七十一钱七分钱之三。按善田二十亩，直钱六千，恶田八十亩，直钱五千七百一十四七分钱之二。课于一万，是多一千七百一十四七分钱之二。令之善田十亩，直田三千，恶田九十亩，直钱六千四百二十八七分钱之四。课于一万，是为不足五百七十一七分钱之三。以盈不足术求之也。

[一八] 今有黄金九枚，白银一十一枚，称之重适等。交易其一，金轻十三两。问金、银一枚各重几何。

答曰：金重二斤三两一十八铢，

银重一斤十三两六铢。

术曰：假令黄金三斤，白银二斤一十一分斤之五，不足四十九，于右行。令之黄金二斤，白银一斤一十一分斤之七，多一十五于左行。以分母各乘其行内之数，以盈不足维乘所出率，并以为实。并盈不足为法。实如法，得黄金重。分母乘法以除，得银重。约之得分也。按此术，假令黄金九，白银十一，俱重二十七斤。金，九约之得三斤。银，十一约之得二斤十一分斤之五。各为金银一枚重数。就金重二十七斤之中减一金之重以益银，银重二十七斤之中减一银之重以益金，则金重二十六斤十一分斤之五，银重二十七斤十一分斤之六。以少减多，则金轻十七两十一分两之五。课于十三两，多四两十一分两之五。通分内子言之，是为不足四十九。又令之黄金九，一枚重二斤，九枚重十八斤，白银十一亦合重十八斤也。乃以十一除之，得一斤十一分斤之七，为银一枚之重数。今就金重十八斤之中减一枚金以益银，复减一枚银以益金，则金重十七斤十一分斤之七，银重十八斤十一分斤之四。以少减多即金轻十一分斤之八，课于十三两，少一两十一分两之四。通分内子言之，是为多十五。以盈不足术求之，实如法，得金重。分母乘法以除者，谓银两分母同，须通法而后乃除，得银重。余皆约之者，术省故也。

[一九] 今有良马与驽马发长安至齐。齐去长安三千里。良马初日行一百九十三里，日增十三里。驽马初

日行九十七里，日减半里。良马先至齐，复还迎驽马。问几何日相逢及各行几何[20]。

答曰：一十五日一百九十一分日之一百三十五而相逢。

良马行四千五百三十四里一百九十一分里之四十六。

驽马行一千四百六十五里一百九十一分里之一百四十五。

术曰：假令十五日，不足三百三十七里半。令之十六日，多一百四十里。以盈不足维乘假令之数，并而为实。并盈不足为法。实如法而一，得日数。不尽者，以等数除之而命分[21]。 求良马行者：十四乘益疾里数而半之，加良马初日之行里数，以乘十五日，得十五日之凡行。又以十五日乘益疾里数，加良马初日之行，以乘日分子，如日分母而一，所得加前良马凡行里数，即得定行里数及其不尽而命分。求驽马行者：以十四乘半里，又半之，以减驽马初日之行里数，乘十五日，得驽马十五日之凡行。又以十五日乘半里，以减驽马初日之行，余，以乘日分子，如日分母而一，所得加前里，即驽马定行里数。其奇半里者为半法。以半法增残分，即得其不尽者而命分[22]。按令十五日，不足三百三十七里半者，据良马十五日凡行四千二百六十里，除先去齐三千里，定还迎驽马一千二百六十里。驽马十五日，凡行一千四百二里半。并良、驽二马所行得二千六百六十二里半。课于三千里，少三百三十七里半，故曰不足。令之十六日，多一百四十里者；据良马十六日凡行四千六百四十八里，先除去齐三千里，定还迎驽马一千六百四十八里。驽马十六日凡行一千四百九十二里，并良、驽二马所行，得三千一百四十里。课于三千里，余有一百四十里，故谓之多也。以盈不足维乘假令之数，并而为实，并盈不足为法，实如法而一，得日数者，即设差不盈不朒之正数[23]。以二马初日所行里乘十五日，为十五日平行数。求初末益疾减迟之数者，并一与十四，以十四乘而半之，为中平之积。又令益疾减迟里数乘之，各为减益之中平里，故各减益平行数，得十五日定行里。若求后一日，以十六日之定行里数，乘日分子，如日分母而一，各得日分子之定行里数。故各并十五日定行里，即得。其驽马奇半里者，法为全里之分，故破半里为半法，以增残分，即合所问也[24]。

[20] 今有良马与驽马发长安至齐。……，各行几何

良马、驽马分别按匀加、匀减速度行走，若仿照注[18]的说法，并设两马相逢日数为 x，则得

$$\left[193+\frac{13}{2}(x-1)\right]x+\left[97-\frac{\frac{1}{2}}{2}(x-1)\right]x=6000,$$

或

$$x^2+45\frac{2}{5}x-960=0。$$

解之得 $$x=\sqrt{1475.29}-22.9。$$

因 $\sqrt{1475.29}-22.9<15\frac{135}{191}$，故知本问答数都是近似解。

两马行程 y 是相逢日数 x 的函数，因有：

$$y=\left[193+\frac{13}{2}(x-1)\right]x+\left[97-\frac{\frac{1}{2}}{2}(x-1)\right]x-6000,$$

或

$$y=6\frac{1}{4}x^2+283\frac{7}{4}x-6000。$$

在上式中，假令 $x=15$，则得 $y=-337\frac{1}{2}$；假令 $x=16$，则得 $y=140$。即术文"假令十五日，不足三百三十七里半。令之十六日，多一百四十里"。

[21] 术曰：假令十五日，……，以等数除之而命分

良马逐日所行里数是一递增等差数列，十五日共走

$$\frac{15}{2}[193+(193+13\times14)]=4260\text{ 里},$$

第十六日应走 $193+13\times15=388$ 里。

驽马逐日所行里数是一递减等差数列，十五日共走

$$\frac{15}{2}\left[97+\left(97-\frac{1}{2}\times14\right)\right]=1402\frac{1}{2}\text{ 里},$$

第十六日应走 $97-\frac{1}{2}\times 15=89\frac{1}{2}$ 里。

因良马先至齐，复还迎及驽马，故知两马应行 $3000\times 2=6000$ 里。若按十五日计算，两马共行 $4260+1402\frac{1}{2}=5662\frac{1}{2}$ 里。可见不足 $6000-5662\frac{1}{2}=337\frac{1}{2}$ 里。

若按十六日计算,两马共行

$$(4260+388)+\left(1402\frac{1}{2}+89\frac{1}{2}\right)=6140\text{ 里。}$$

可见多行 $6140-6000=140$ 里。

按术计算,得相逢日数为:

$$\frac{15\times 140+16\times 337\frac{1}{2}}{337\frac{1}{2}+140}=\frac{7500}{477\frac{1}{2}}=15\frac{135}{191}\text{ 日。}$$

[22] 求良马行者:……,即得其不尽者而命分

术文只有计算两马相逢日数的方法;缺少推求其行程的步骤。这段注文乃是弥补术文的不足。

“益疾”是良马逐日递增的里数(13 里),也即递增等差数列的公差。

良马十五日的行程为$\left(193+\frac{13\times 14}{2}\right)15=4260$ 里,

或

$$S_n=\left[a_1+\frac{(n-1)d}{2}\right]n。$$

第十六日仅走 $(193+13\times 15)\frac{135}{191}=274\frac{46}{191}$ 里。

良马定行 $4260+274\frac{46}{191}=4534\frac{46}{191}$ 里。

“以十四乘半里”的“半里”，是驽马逐日递减的里数，称为“减

迟”。也即递减等差数列的公差。

驽马十五日的行程为$\left(97-\dfrac{\frac{1}{2}\times 14}{2}\right)15=1402\dfrac{1}{2}$里，

或

$$S'_n=\left[a'_1-\frac{(n-1)d'}{2}\right]n。$$

第十六日仅走$\left(97-\dfrac{1}{2}\times 15\right)\dfrac{135}{191}=63\dfrac{49\frac{1}{2}}{191}$里。

驽马定行

$$1402\frac{1}{2}+63\frac{49\frac{1}{2}}{191}=1465+\left(\frac{1}{2}+\frac{49\frac{1}{2}}{191}\right)$$

$$=1465+\left(\frac{95\frac{1}{2}}{191}+\frac{49\frac{1}{2}}{191}\right)=1465\frac{145}{191}\text{里。}$$

在上式中，奇零数$\dfrac{1}{2}$，可看作是以191为分母、以191之半为分子的分数；即$\dfrac{1}{2}=\dfrac{\frac{191}{2}}{191}=\dfrac{95\frac{1}{2}}{191}$，称为“半法”。再以“半法”$\dfrac{95\frac{1}{2}}{191}$与残分$\dfrac{49\frac{1}{2}}{191}$相加，即得：$\dfrac{1}{2}+\dfrac{49\frac{1}{2}}{191}=\dfrac{95\frac{1}{2}+49\frac{1}{2}}{191}=\dfrac{145}{191}$。故注文说：“其奇半里者为半法。以半法增残分，即得其不尽者而命分。”实际上就是通分相加的意思。

由注文看出，刘徽既正确地提出了而且也运用了等差数列的通项公式与和的公式。在我国古代数学里，确是个创举。

[23] 按令十五日，……，即设差不盈不朒之正数

以良马十五日凡行里数减长安至齐里数，得 $4260-3000=1260$ 里，即是良马迎驽马的里数。

驽马十五日凡行里数为 $1402\frac{1}{2}$ 里。

将良马迎驽马里数与驽马十五日所行里数相加，再与长安至齐里数相较，得 $1260+1402\frac{1}{2}=2662\frac{1}{2}$，

$$3000-2662\frac{1}{2}=337\frac{1}{2}。$$

即注文"少三百三十七里半，故曰不足"。

以良马十六日凡行里数减长安至齐里数，得 $4648-3000=1648$ 里，即是良马迎驽马的里数。

驽马十六日凡行里数为 1492 里。

将良马迎驽马里数与驽马十六日所行里数相加，再与长安至齐里数相较，得：$1648+1492=3140$，$3140-3000=140$。即注文"余有一百四十里，故谓之多也"。

按盈不足术计算，得"实"、"法"分别为：

$$15\times140+16\times337\frac{1}{2}=7500,$$

$$337\frac{1}{2}+140=477\frac{1}{2};$$

于是得相逢日数为 $7500\div477\frac{1}{2}=15\frac{135}{191}$。即"不盈不朒之正数"。

[24] 以二马初日所行里乘十五日，……，即合所问也

按另一方法推算两马所行里数：

将良马十五日逐日所行里数相加，得：

$$193+(193+13)+(193+13\times2)+\cdots+(193+13\times14)$$
$$=193\times15+(1+2+3+\cdots+14)\times13$$
$$=2895+(1+14)\frac{14}{2}\times13=2895+1365=4260,$$

其中 $193\times 15=2895$ 为“平行数”，13 为“益疾”，$(1+14)\times\frac{14}{2}$ 为“中平之积”，$(1+14)\times\frac{14}{2}\times 13=1365$ 为“中平里”，而 4260为“定行里”。

将驽马十五日逐日所行里数相加，得：

$$97+\left(97-\frac{1}{2}\right)+\left(97-\frac{1}{2}\times 2\right)+\cdots+\left(97-\frac{1}{2}\times 14\right)=97\times 15+(1+2+3+\cdots+14)\times\frac{1}{2}=1455-(1+14)\times\frac{14}{2}\times\frac{1}{2}=1455-52\frac{1}{2}=1402\frac{1}{2},$$

其中 $97\times 15=1455$ 为“平行数”，$\frac{1}{2}$ 为“减迟”，$(1+14)\times\frac{14}{2}$ 为“中平之积”，$(1+14)\times\frac{14}{2}\times\frac{1}{2}=52\frac{1}{2}$ 为“中平里”，而 $1402\frac{1}{2}$ 为“定行里”。

第十六日良、驽马定行里各为：

$$(193+13\times 15)\frac{135}{191}=274\frac{46}{191},$$

$$\left(97-\frac{1}{2}\times 15\right)\frac{135}{191}=63\frac{49\frac{1}{2}}{191}。$$

故得两马共行里数分别为：

良马

$$4260+274\frac{46}{191}=4534\frac{46}{191},$$

驽马

$$1402\frac{1}{2}+63\frac{49\frac{1}{2}}{191}=1465\frac{145}{191}。$$

［二〇］今有人持钱之蜀贾，利十三[25]。初返归一万四千，次返归一万三千，次返归一万二千，次返归一万一千，后返归一万。凡五返归钱，本利俱尽。问本持钱及利各几何。

答曰：　本三万四百六十八钱三十七万一千二百九十三分钱之八万四千八百七十六。

利二万九千五百三十一钱三十七万一千二百九十三分钱之二十八万六千四百一十七。

术曰：假令本钱三万，不足一千七百三十八钱半。令之四万，多三万五千三百九十钱八分[26]。按假令本钱三万，并利为三万九千，除初返归留，余，加利为三万二千五百。除二返归留，余，又加利为二万五千三百五十。除第三返归留，余，又加利为一万七千三百五十五。除第四返归留，余，又加利为八千二百六十一钱半。除第五返归留，合一万钱，不足一千七百三十八钱半。若使本钱四万，并利为五万二千。除初返归留，余，加利为四万九千四百。除第二返归留，余，又加利为四万七千三百二十。除第三返归留，余，又加利为四万五千九百一十六。除第四返归留，余，又加利为四万五千三百九十钱八分。除第五返归留，合一万，余三万五千三百九十钱八分，故曰多[27]。　又术置后返归一万，以十乘之，十三而一，即后所持之本。加一万一千，又以十乘之，十三而一，即第四返之本。加一万二千，又以十乘之，十三而一，即第三返之本。加一万三千，又以十乘之，十三而一，即第二返之本。加一万四千，又以十乘之，十三而一，即初持之本。并五返之钱以减之，即利也[28]。

［25］今有人持钱之蜀贾，利十三

钱校本断句为“今有人持钱之蜀，贾利十三”。李籍、戴震、李

潢断句为“今有人持钱之蜀贾，利十三”。今从后者。

[26] 术曰：假令本钱三万，……，多三万五千三百九十钱八分

若按一般方法解题，设本钱为 x，本利和为 y，依题意得一次函数为：

$$y=\left[\left(\left\{\left[x\left(1+\frac{3}{10}\right)-14000\right]\left(1+\frac{3}{10}\right)-13000\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(1+\frac{3}{10}\right)-12000\right)\left(1+\frac{3}{10}\right)-11000\right]$$
$$\times\left(1+\frac{3}{10}\right)-10000,$$

或

$$y=3.71293x-113126.4。$$

在上式中，假令 $x=30000$，则得 $y=-1738\frac{1}{2}$，即不足数；假令 $x=40000$，则得 $y=3539\frac{8}{10}$，即盈数。

[27] 按假令本钱三万，……，故曰多

刘徽给出推求盈不足的步骤。今按注文计算如下：

设本钱三万加利为

$$30000+30000\times\frac{3}{10}=30000\times\frac{13}{10}=39000,$$

减去初返归留加利为

$$\left(30000\times\frac{13}{10}-14000\right)\frac{13}{10}=32500,$$

减去次返归留加利为

$$\left[\left(30000\times\frac{13}{10}-14000\right)\frac{13}{10}-13000\right]\frac{13}{10}=25350,$$

减去三返归留加利为

$$\left\{\left[\left(30000\times\frac{13}{10}-14000\right)\frac{13}{10}-13000\right]\frac{13}{10}\right.$$

$$-12000\Big\}\frac{13}{10}=17355,$$

减去四返归留加利为

$$\left(\left\{\left[\left(30000\times\frac{13}{10}-14000\right)\frac{13}{10}-13000\right]\frac{13}{10}\right.\right.$$

$$\left.\left.-12000\right\}\frac{13}{10}-11000\right)\frac{13}{10}=8261\frac{1}{2};$$

与五返归留相较，则得不足数为

$$10000-8261\frac{1}{2}=1738\frac{1}{2}。$$

设本钱四万，仿此可得盈数为

$$\left(\left\{\left[\left(40000\times\frac{13}{10}-14000\right)\frac{13}{10}-13000\right]\frac{13}{10}-12000\right\}\right.$$

$$\left.\times\frac{13}{10}-11000\right)\frac{13}{10}-10000=35390\frac{8}{10}。$$

[28] 又术置后返归一万，……，即利也

若以盈不足术计算，似嫌过繁。刘徽乃补"又术"。

今按"又术"计算，所求本钱为

$$\left(\left\{\left[\left(10000\times\frac{10}{13}+11000\right)\frac{10}{13}+12000\right]\frac{10}{13}\right.\right.$$

$$\left.\left.+13000\right\}\frac{10}{13}+14000\right)\frac{10}{13}=10000\left(\frac{10}{13}\right)^5$$

$$+11000\left(\frac{10}{13}\right)^4+12000\left(\frac{10}{13}\right)^3+13000\left(\frac{10}{13}\right)^2$$

$$+14000\left(\frac{10}{13}\right)=30468\frac{84876}{371293}。$$

实际上就是下列方程的解：

$$\left[\left(\left\{\left[x\left(1+\frac{3}{10}\right)-14000\right]\left(1+\frac{3}{10}\right)-13000\right\}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(1+\frac{3}{10}\right)-12000\right)\left(1+\frac{3}{10}\right)-11000\right]$$

$$\times\left(1+\frac{3}{10}\right)-10000=0$$

或

$$3.71293x-113126.4=0。$$

因五返之钱为

$$14000+13000+12000+11000+10000=60000,$$

故利钱为

$$60000-30468\frac{84876}{371293}=29531\frac{286417}{371293}。$$

九章算术卷第八

方程[1]以御错糅正负

[一] 今有上禾三秉[2]，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何。

答曰：

上禾一秉，九斗四分斗之一，

中禾一秉，四斗四分斗之一，

下禾一秉，二斗四分斗之三。

方程程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实。令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程[3]。行之左右无所同存，且为有所据而言耳[4]。术曰，置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗，于右方。中、左行列如右方。此都术也，以空言难晓，故特系之禾以决之。又列中、左行如右行也[5]。以右行上禾偏乘中行而以直除[6]。为术之意，令少行减多行，反复相减，则头位必先尽。上无一位则此行亦阙一物矣。然而举率以相减，不害余数之课也。若消去头位则下去一物之实。如是直令左右行相减，审其正负，则可得而知[7]。先令右行上禾乘中行，为齐同之意[8]。为齐同者谓中行上禾亦乘右行也。从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣[9]。又乘其次，亦以直除[10]。复去左行首。然以中行中禾不尽者偏乘左行而以直除。亦令两行相去行之中禾也。左方下禾不尽者，上为法，下为实。实即下禾之实[11]。上、中禾皆去，故余数是下禾实，

非但一乘。欲约众乘之实，当以禾乘数为法。列此，以下禾之乘数乘两行，以直除，则下禾之位自去矣。各以其余一位之乘除其下实，即斗数矣[12]。用算繁而不省，所以别为法，约也。然犹不如自用其旧，广异法也[13]。求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实[14]。此谓中下两禾实。下禾一乘实数先见，将于中行求中禾，先列实以减下实。而左方下禾一乘之实以法为母，于率不通。故先以法乘其实而同之，俱令法为母，而除下禾实。以下禾先见之实令乘下禾乘数，即得下禾一位之列实。减于下实，则其数是中禾之实也[15]。余如中禾秉数而一，即中禾之实[16]。余中禾一位之实也。故以一位秉数约之，乃得一秉之实也。求上禾亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实[17]。此右行三禾共实。今中下禾之实，其数并见，令乘右行之禾秉以减之，故亦如前，各求列实以减下实也。余如上禾秉数而一，即上禾之实[18]。实皆如法，各得一斗[19]。三实同用。不满法者，以法命之。母、实皆当约之。

[1] 方程

李籍《音义》说："方者，左右也。程者，课率也。左右课率，总统群物，故曰方程。"杨辉《详解九章算法》说："方者，数之形也；程者，量度之总名，亦权衡丈、尺、斛、斗之平法也。尤课分明多寡之义。"程大位《算法统宗》解释为："方，正也。程，数也。"

"方"即方形，"程"即表达相课的意思，或者是表达式。于某一问题中，如有含若干个相关的数据，将这些相关的数据并肩排列成方形，则称为"方程"。所谓"方程"即现今的增广矩阵。

西算东来后，我国第一部代数学的译本《阿尔热巴拉算法》中，译 œquatio 为"相等式"。因英语 equation 是由拉丁语 œquatio 演变而成，虽然其原意为等式，而后人如李善兰于 1850 年则译 equation 为方程式。1872 年，华蘅芳译华里司（J. Wallis, 1616—1703）《代数术》(1872) 也译为方程式。五十年代以后，把方程式改称为方程。方程一名，才逐渐固定下来。

"方程"也可看作是线性方程组，一般所说方程，其形不方。虽

然现今方程与“方程”的原意不同，但是未尝不可视单一方程为方程组或“方程”的特殊情形。

［2］ 秉

李籍《音义》说：“刈禾盈手为秉。”《说文解字》称：“秉，禾束也”。此处之“秉”宜作一束或一捆解释。所谓“上禾三秉”，即是上等禾有三束。

［3］ 程，课程也。……；故谓之方程

“程，课程也”以下一段，是刘徽对“方程”一词所下的定义。就世界数学发展史来说，这是最早的较正确的定义。

“课”与“课分”之“课”的意义相似，有比较的意思，“程”是表达的意思。如李潢于《九章算术细草图说》称：“两行相并为方，多少相课为程。”可见“方程”即是方形表达式。

“群物总杂，各列有数，总言其实”是说每一行的组成方法：群物聚集一起，有几物则列几位，每位置以各该物的数量，最后列出各物的总实数。

今以第一问为例注释如下：

“上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，……”第一问共有三物，故列三位：头位、中位及下位，每位分别置以上禾、中禾、下禾的数量，即是“各列有数”。又因经文“实三十九斗”、“实三十四斗”、“实二十六斗”，故知 39 斗、34 斗、26 斗乃是总于一起的实数，将总实数分别列于每行之下，即是“总言其实”。于是得“方程”为：

		左行	中行	右行
头位	上禾	1	2	3
中位	中禾	2	3	2
下位	下禾	3	1	1
	实	26	34	39

或

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

其中 x，y，z 分别为上、中、下禾一秉的斗数。

“实“的原意来自除法，是表示被除数。开方时则表示被开方数。由于解方程的最后一步运算是除法或开方，所以就把方程的

常数项叫做“实”。

“方程”中39斗、34斗、26斗分别是每行三种禾的数量之和，是常数项，故称为总实。若方程中有加有减，如 $4x+8y-z=68\frac{1}{4}$，其中$68\frac{1}{4}$也是总言其实，因其有差，也可称为“差实”。

若有几物，则需列几行或几程，即“如物数程之”；所列的行数，应以物数为准。即注文“二物者再程，三物者三程，皆如物数程之”。因第一问共有三物，故列三程。欲区别各程，便称之为左行、中行、右行。

每行的相关的数量都可看作是一组成比率的数，如上述“方程”左行为1，2，3，26，中行则为2，3，1，34，右行为3，2，1，39，这些每行的数量都各是一组成比率的数。即是刘注所说“每行为率”。

以此三程并列于一起，形成方形，因而叫做“方程”。

[4] 行之左右无所同存，且为有所据而言耳

“行之左右无所同存”，即是在“方程”中，每行与其左、右各行之率需是不尽相同或不尽成比例；以近代术语表示：于方程组中，需无相依方程。

“且为有所据而言耳”一语，即是说，在“方程”中每一行必须合于实际而有所依据。如第一问所列的每一行，皆本诸实际，并非虚构；也就是说在方程组中，不得有矛盾方程。

欲使方程有有限组解时，既需无相依方程，又需无矛盾方程。由注文可以看出，刘徽深知这一理论。

[5] 此都术也，……，又列中、左行如右行也

若以未知数列出方程，较比抽象，不易了解。欲使之具体，乃系之以“禾”，即是用上禾、中禾、下禾表示各未知数。

仿照右行，可列出“方程”的中、左两行。即“又列中、左行如右行也”。

“此都术也”至“如右行也”一段显然是注解术文。按照惯例，注文应在术文“中、左行列如右方”之后，但各版本都误置于“术曰”之前。今以意校正。

又，术文"中、左行列如右方"。各版本都讹作"左禾"，今校正。

[6] 以右行上禾偏乘中行而以直除

按术文"置上禾三秉，……，中、左行列如右方"，得"方程"为

	左行	中行	右行
上禾	1	2	3
中禾	2	3	2
下禾	3	1	1
实	26	34	39

或

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

"以右行上禾偏乘中行而以直除"，即是以右行上禾的秉数 3，遍乘中行各项，得

	左行	中行	右行
上禾	1	6	3
中禾	2	9	2
下禾	3	3	1
实	26	102	39

或

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 6x+9y+3z=102 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

由中行连续减去右行各对应项，乃得

	左行	中行	右行
上禾	1	0	3
中禾	2	5	2
下禾	3	1	1
实	26	24	39

或

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 5y+z=24 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

其中"除"是减，"直除"即是连续相减。"直除"法是我国古代解方程组最早的方法。即相减消元法。

[7] 为术之意，……，审其正负，则可得而知

以首项系数较大的整系数方程减去首项系数较小的方程，如一次减不尽，可作几度相减，必能使被减方程的首项系数为零。即"头位必先尽"。这就是所谓"直除"法。用"直除"法解多元一次方程组，在欧洲是法国数学家别朱 (E. Bézout, 1730—1783) 于 1779

年才提出来的。而《九章算术》的解法要比别朱早一千多年。

若头位尽，则减后的新方程缺少一项，其总实（即下实，或常数项）也少去一物的数量；但这样相减，并不破坏新方程与原方程的同解性。即"举率以相减，不害余数之课也"。这就是"直除"法的理论基础，也就是方程两边同减一数，新方程与原方程的解相同。

[8] 先令右行上禾乘中行，为齐同之意

方田章注称："母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。同者，相与通同共一母也。齐者，子与母齐，势不可失本数也。"这就是刘徽的"齐同"术。若两分数相加减时，需先"齐其众分，同其群母"。即是按"齐同"术化为同分母的分数再行加减。

这里，刘徽把"齐同"的意义引伸一步，认为：欲消去整系数方程的首项时，须以首项系数互乘两方程，两首项系数相乘称为同。一方程的首项系数与它方程的其它各项相乘称为齐。如《张邱建算经》卷下第十二问李淳风注称："以右行上锦徧乘中行者，欲为同齐而去中行上锦。同齐者谓：同行首，齐诸下，而以直减中行。术从简易，虽不为同齐，以同齐之意观之，其宜然矣。"可见注文"令右行上禾乘中行"，具有齐同的意义，故称"为齐同之意"。

[9] 为齐同者，谓中行上禾亦乘右行也。……，其义然矣

由上注可知，以右行上禾秉数遍乘中行各项，即是齐同之意；以中行上禾秉数遍乘右行，也应是齐同。术文虽没有说明是齐同，用齐同的观点来看，实为齐同。

若右行上禾秉数为整数，中行上禾秉数不是整数，虽以右行上禾遍乘中行，连续相减，则未必能去中行头位。刘徽有鉴于此，乃提出："为齐同者谓中行上禾亦乘右行也"，以便使右、中两行互乘对减，则中行头位必可去。

戴校本为"为齐同者谓中行上禾亦乘右行也"，不误。杨辉《详解九章算法》、大典本及殿本都讹作"为齐同者谓中行直减右行也"。因"中行直减右行"只是直减，并非齐同，所以"为齐同者谓中行直减右行"一语，于意欠通。另外，"以少减多"或"以 a 减 b" 是我国古代表示相减的习惯说法；与现今说法不同。现今所说是"以

多减少”或“以 b 减 a”。这段既是“以右行上禾偏乘中行而以直除”的注文，如以为刘徽原意是注解“直除”的话，注文应是“以右行直减中行”，不应是“中行直减右行”。这种说法是不符合惯例的。同时，通览这段上下文不难发现，刘徽原意不是注解“直除”而是注解“偏乘”，认为“偏乘”是符合“齐同”意义的。据此可知戴校本不误，今从之。

钱校本认为戴校本是“违反原术直除的意义”，似不妥当。

[10] 又乘其次，亦以直除

如前注所说，以右行上禾乘数遍乘中行各项，连续相减，消去中行头位后；又以右行上禾乘数遍乘左行各项，连续减去右行各对应项，则可消去左行头位。即“又乘其次，亦以直除”。“复去左行首”。

如第一问去中行头位后的“方程”为：

	左	中	右
上	1	0	3
中	2	5	2
下	3	1	1
实	26	24	39

或

$$\begin{cases}3x+2y+z=39\\ 5y+z=24\\ x+2y+3z=26\end{cases}$$

“又乘其次”，即

	左	中	右
上	3	0	3
中	6	5	2
下	9	1	1
实	78	24	39

或

$$\begin{cases}3x+2y+z=39\\ 5y+z=24\\ 3x+6y+9z=78\end{cases}$$

“亦以直除”，即

	左	中	右
上	0	0	3
中	4	5	2
下	8	1	1
实	39	24	39

或

$$\begin{cases}3x+2y+z=39\\ 5y+z=24\\ 4y+8z=39\end{cases}$$

[11] 然以中行中禾不尽者徧乘左行而以直除。……，实即下禾之实

如前注所说，当消去中行及左行头位后，再以中行中禾乘数遍乘左行而以直除，消去左行中位，以求“下禾之实”。故注文为：“亦令两行相去行之中禾也”。即

	左	中	右
上	0	0	3
中	4	5	2
下	8	1	1
实	39	24	39

或

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 4y + 8z = 39 \end{cases}$$

以 5 遍乘左行

	左	中	右
上	0	0	3
中	20	5	2
下	40	1	1
实	195	24	39

或

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 20y + 40z = 195 \end{cases}$$

由左行累减中行

	左	中	右
上	0	0	3
中	0	5	2
下	36	1	1
实	99	24	39

或

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 36z = 99 \end{cases}$$

在上式中，左行上禾、中禾都已消去，而下禾不尽。上余 36 称为“法”，下余 99 称为“实”。 99 是下禾 36 秉之实，或称为共实，并非下禾 1 秉之实。即“上、中禾皆去，故余数是下禾实，非但一秉”。欲求下禾 1 秉之实，应以“法”除“实”，即注文“欲约众秉之实，当以禾秉数为法”。即

$$z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}\text{斗。}$$

[12] 列此，……，即斗数矣

至此，若推求中、上禾的斗数，刘徽认为仍可使用“直除”法，即是以遍乘、直减消去各行下禾后，可分别得到中、上禾的斗数。

[13] 用算繁而不省，……，广异法也

李潢以为：“云用算繁而不省者，所以别为法，约也者。后注所云为作新术是也．云然犹不如自用其旧者，算少者不如用方程旧法也。云广异法者，为作新术所以广异法，故后注多称异术焉。”

刘徽可能认为：所列“方程”，若于算较繁，则可采用其它解法。如用“互乘对减”法，或用“减行”解法，或用消去常数项法等。所列“方程”若于算较简，无妨仍用“直除”法．

戴校本以为“用算繁而不省以下，亦讹舛衍文”。似欠妥当。

[14] 求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实

如第一问。此处之“法”即是左行下禾秉数 36，“中行下实”即 24，“下禾之实”即左行下实 99。按术计算，得

$$24\times36-99。$$

也即后注“余中禾一位之实也”。

[15] 此谓中下两禾实，……，则其数是中禾之实也

于“方程”

	左	中	右
上	0	0	3
中	0	5	2
下	36	1	1
实	99	24	39

或

$$\begin{cases}3x+2y+z=39\\ \quad\;\; 5y+z=24\\ \quad\quad\;\; 36z=99\end{cases}$$

中，中行下实 24 是中禾 5 秉及下禾 1 秉的两禾共实，即“中下两禾实”。

由左行可知，下禾 36 秉，实 99 斗，易于求得下禾 1 秉斗数为 $\frac{99}{36}=2\frac{3}{4}$，即注文“下禾一秉实数先见”。

欲于中行求中禾 1 秉的斗数，需“先列实以减下实”。“列实”是下禾的列实，即下禾 1 秉斗数 $\frac{99}{36}$，“下实”即中行的下实 24。按

术应得 $24-\frac{99}{36}$。

又因左行下实为99，其"下禾一秉之实"为$\frac{99}{36}$，是以法36为分母。中行下实24，并非以36为分母。两数不得相减，故注文说："于率不通"。

因此，需改变此法，"故先以法乘其实而同之，俱令法为母，而除下禾实"。下禾以法36为分母，而中行下实不以36为母，故需以36乘中行下实24，得$36\times24=864$，再减下禾实99，得

$$36\times24-99=864-99=765。$$

此即中禾一位之实。

"以下禾先见之实(99)令乘(中行)下禾秉数(1)，即得下禾一位之列实(99×1)。减于下实(36×24)，则其数是中禾之实也"。即765。

杨辉《详解九章算法》及大典本皆讹作"故先以法乘其通而同之"。显见与理不合。

钱校本改为"故先以法乘中行而同之"。若是乘"中行"，则得

	左	中	右
上	0	0	3
中	0	5×36	2
下	36	1×36	1
实	99	24×36	39

或

$$\begin{cases}3x+2y+z=39\\5\times36y+1\times36z=24\times36\\36z=99。\end{cases}$$

欲求中禾之实，乃得$\frac{24\times36-99}{180}$，即需以180除。但下文"实皆如法"的"法"是36，不是180。若以180除，所得是中禾一秉之实，不是中禾一位之实。又因术文"求中禾，以法乘中行下实"，下文"求上禾，亦以法乘右行下实"。可见求中禾、求上禾都是以法乘"下实"，故知戴校本改为"故先以法乘其实而同之"，不误。今从之。

[16] 余如中禾秉数而一，即中禾之实

按前注，余为 $24\times 36-99$。依术，除以“中禾秉数”5，得

$$\frac{24\times 36-99}{5}=153,$$

即术文“中禾之实”。这实并非中禾一秉之实。若求其一秉之实，需以法 36 除，即 $153\div 36=4\frac{1}{4}$。

也就是注文所说：“余中禾一位之实也。故以一位秉数约之，乃得一秉之实也。”也即 $[(24\times 36-99)\div 5]\div 36=4\frac{1}{4}$。

[17] 求上禾亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实

若求上禾，亦应以法 36 乘右行下实 39，得 39×36。“除下禾，中禾之实”得

$$39\times 36-2\times\left(\frac{24\times 36-99}{5}\right)-\frac{99\times 1}{1}=999。$$

即是注文所说：“令乘右行之禾秉以减之，故亦如前，各求列实以减下实也。”

[18] 余如上禾秉数而一，即上禾之实

如上注，余是 999，右行上禾秉数是 3，按术乃得

$$\frac{999}{3}=333,$$

即“上禾之实”。也即上禾一位之实。

[19] 实皆如法，各得一斗

如术文所论，下禾、中禾、上禾一位之实各为：99，153，333，都除以法 36，各得

$$\frac{99}{36}=2\frac{3}{4}\text{斗},\ \frac{153}{36}=4\frac{1}{4}\text{斗},\ \frac{333}{36}=9\frac{1}{4}\text{斗}。$$

注文“三实同用”，乃是三实同用法 36 为母，约简以 9，则各得下、中、上禾一秉之斗数。

[二] 今有上禾七秉，损实一斗，益之下禾二秉，而实一十斗。下禾八秉，益实一斗与上禾二秉，而实一十斗。

问上、下禾实一秉各几何。

答曰：

上禾一秉实一斗五十二分斗之一十八，

下禾一秉实五十二分斗之四十一。

术曰：如方程。损之曰益，益之曰损[20]。问者之辞虽以损益为说，今按实云上禾七秉，下禾二秉，实一十一斗；上禾二秉，下禾八秉，实九斗也。“损之曰益”，言损一斗余当一十斗。今欲全其实，当加所损也。“益之曰损”，言益实一斗乃满一十斗，今欲知本实，当减所加即得也。损实一斗者，其实过一十斗也。益实一斗者，其实不满一十斗也。重沦损益数者，各以损益之数损益之也。

[20] 如方程。损之曰益，益之曰损

“如方程”即是按照题意建立“方程”。

“损之曰益，益之曰损”。即是移项法则：移负得正，移正得负。今以第二问为例说明如下：

设上禾 1 秉为 x 斗，下禾 1 秉为 y 斗，依经文得

$$\begin{cases}(7x-1)+2y=10\\(8y+1)+2x=10\end{cases},$$

按术“损实一斗者，其实过一十斗也。益实一斗者，其实不满一十斗也”。乃有

$$\begin{cases}7x+2y=10+1\\8y+2x=10-1\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}7x+2y=11\\2x+8y=9\end{cases}.$$

若损 1 斗，其实为 10 斗，若不损 1 斗，其实应为 11 斗，即“损之曰益”。若益 1 斗，其实为 10 斗，若不益 1 斗，其实应为 9 斗，即“益之曰损”。也就是“今欲全其实，当加所损也”。“今欲知本实，当减所加即得也”。

［三］今有上禾二秉，中禾三秉，下禾四秉，实皆不满斗。

上取中，中取下，下取上各一秉而实满斗。问上、中、下禾实一秉各几何。

答曰：

上禾一秉实二十五分斗之九，

中禾一秉实二十五分斗之七，

下禾一秉实二十五分斗之四。

术曰：如方程。各置所取[21]。置上禾二秉为右行之上，中禾三秉为中行之中，下禾四秉为左行之下，所取一秉及实一斗各从其位。诸行相借取之物，皆依此例。以正负术入之。

正负术曰：今两算得失相反，要令正负以名之。正算赤，负算黑。否则以邪正为异[22]。方程自有赤黑相取，左右数相推求之术。而其并减之势不得广通，故使赤黑相消夺之[23]。于算或减或益，同行异位，殊为二品，各有并减之差，见于下焉[24]。著此二条，特系之禾以成此二条之意。故赤黑相杂足以定上下之程，减益虽殊足以通左右之数，差实虽分足以应同异之率[25]。然则其正无入负之，负无入正之，其率不妄也[26]。同名相除[27]，此为以赤除赤，以黑除黑，行求相减者，为去头位也。然则头位同名者当用此条，头位异名者当用下条。异名相益[28]，以行减行当各以其类矣。其异名者，非其类也。非其类者，犹无对也，非所得减也。故赤用黑对则余黑，黑用赤对则余赤。赤黑并于本数，此为相益，皆所以为消夺。消夺之与减益成一实也。术本取要必除行首，至于他位不嫌多少，故或令相减，或令相并，理无同异，一也。正无入负之，负无入正之。无入，为无对也。无所得减，则使消夺者居位也。其当以列实减下实，而行中正负杂者亦用此条。此条者同名减实、异名益实，正无入负之、负无入正之也[29]。其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之[30]。此条异名相除为例，故亦与上条互取。凡正负所以记其同异，使二品互相取而已矣[31]。言负者未必负于少，言正者未必正于多，故每一行之中虽复赤黑异算无伤。然则可得使头位常相与异名。此条之实兼通矣[32]。遂以二条反复一率，观其每与上下互相取位，则随算而言耳，犹一术也[33]。又本设诸行欲因减数以相去耳。故其多少无限，令上下相命而已[34]。若以正负相减如数，有旧增法者每行可均之，不但数物左右之也[35]。

［21］如方程。各置所取

将"上禾二秉，中禾三秉，下禾四秉"各置一行；并分别加中禾、下禾，上禾1秉，即"上取中，中取下，下取上，各一秉"。乃得"方程"

	左	中	右
上禾	1	0	2
中禾	0	3	1
下禾	4	1	0
实	1	1	1

或

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3y+z=1 \\ x+4z=1。\end{cases}$$

［22］今两算得失相反，……，否则以邪正为异

"正"是正数，"负"乃负数。古代以筹入算，这里"算"，应理解为数。注文"今两算得失相反，要令正负以名之"是刘徽给正、负数下的定义。

欲区别正、负数的不同，乃以赤色算筹表示正数，黑色算筹表示负数；或不用色筹，在数字上放一斜筹表示负数，使布算者一望即知正、负。如

$$+6:\quad \perp,\qquad -6:\quad \not\perp。$$

［23］方程自有赤黑相取，……，故使赤黑相消夺之

"方程"每行可能有正数也有负数，左右行相加减时，当用正负数加减法则。由于加、减法则不尽相同，因之"其并减之势不得广通"。故使"相消夺之"。

两数相减一般称为相消，如7－2称为7与2相消，差为5。

于"方程" $\begin{cases} 7x+2y=11 \\ 2x+8y=9 \end{cases}$

中，两式相减，得 $(7-2)x+(2-8)y=11-9$

即 $5x-6y=2$。

此式可看作得自 $7x+2y=11$，其各项系数分别以5，－6，2取而代之。故李潢称："本设诸行意主相减，其相除者为减余；其相益者亦为减余；故曰消。云夺者，谓以相除、相益者夺其位也。"

［24］于算或减或益，……，见于下焉

“二品”即两种事物，此处所指是正、负两种情形。

欲消去方程首项，若两方程首项系数同号，应当相减；若两方程首项系数异号，应当相加。

如在方程组 $\begin{cases} 7x + 2y = 11 \\ 2x + 8y = -9 \end{cases}$

中，首项同号，两式相减得 $(7-2)x + (2-8)y = 11 + 9$，即 $5x - 6y = 20$。

如在方程组 $\begin{cases} 7x + 2y = 11 \\ -2x + 8y = -9 \end{cases}$

中，首项异号，两式相加得 $(7-2)x + (2+8)y = 11 - 9$，即 $5x + 10y = 2$。

[25] 著此二条，……，差实虽分足以应同异之率

“此二条”即是两条正负数加减法则。刘徽特以“方程”释此二条的作用：

方程各项系数虽正负掺杂一起，根据正负数加减法则，足可确定各项的正负。方程首项系数虽殊，足可用正负数加减法则以消元。方程常数项虽然不同，足可适应正负数加减法则。

[26] 然则其正无入负之，……，其率不妄也

“正无入负之，负无入正之”是被减数绝对值小于减数绝对值、同号两数的减法法则。其中“无入”即是无对，或对方为零，或不够减。即“无入，无对也。无所得减，则使消夺者居位也”。其中“负之”、“正之”是说两数差的符号。

若两数为正，被减数小于减数时，则其差为负；若两数为负，被减数大于减数时，则其差为正。也即

设　$b > a \geqslant 0$，且　$b = a + (b - a)$，

则　$a - b = a - [a + (b - a)] = -(b - a)$。

上式中间的 a 和 a 对消，而 $(b - a)$ 无可对消，则改正为负，即“正无入负之”。仿此，“负无入正之”相当于 $-a - (-b) = -a - [-a - (b - a)] = +(b - a)$。

[27] 同名相除

"同名"即同号。若两方程首项系数同号，宜用减法，即"同名相除"。如"此为以赤除赤，……，然则头位同名者当用此条"。

[28] 异名相益

"异名"即异号。若两方程首项系数异号，也可用减法；因异号两数相减实为相加，即"异名相益"。刘徽于注文中引而伸之：异号两数并非一类。若两数相减，乃是无对，即不够减。如负数减正数，其差为负；正数减负数，其差为正。总结为"赤黑并于本数，此为相益，皆所以为消夺。消夺之与减益成一实也"。

[29] 其当以列实减下实，……，负无入正之也

"列实"即本行的实，"下实"即被减行的实。

若两方程以减法消元时，各对应项系数有正有负，仍可用此条。即"同名减实，异名益实，正无入负之，负无入正之"。也即术文"同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之"。

[30] 其异名相除，同名相益，……，负无入负之

解方程组时，古代常用减法消元。因此术文先论说正负数减法，后谈及正负数加法。"异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之"即是正负数加法法则。

异号两数相加，实为相减，即"异名相除"。其和的绝对值等于两数绝对值的差；同号两数相加，实为相加，即"同名相益"。其和的绝对值等于两数绝对值的和。

异号两数相加：若正数绝对值较大，其和为正，即"正无入正之"。若负数绝对值较大，其和为负，即"负无入负之"。以符号表示如下：

若 $a > 0$，$b > 0$，则 $a + b = a + b$，

及 $(-a) + (-b) = -(a + b)$。

若 $a > b \geqslant 0$，

则 $a + (-b) = b + (a - b) + (-b) = a - b$，

或 $(-a) + b = -b - (a - b) + b = -(a - b)$。

若 $b > a \geqslant 0$，

则 $a + (-b) = a + [-a - (b - a)] = -(b - a)$，

或 $(-a)+b=-a+[a+(b-a)]=b-a$。

东汉末刘洪于《乾象历》(206 年)中，论及正负数加减法则为"强正弱负，强弱相并：同名相从，异名相消。其相减也：同名相消，异名相从。无人互之"。其中"无人互之"即"正无入负之，负无入正之"。

宋代杨辉于《详解九章算法》(1261)说："正负法曰：其一，异名相减，同名相加，正无入正之，负无入负之。其二，同名相减，异名相加，正无入负之，负无入正之"。

元代朱世杰于《算学启蒙》(1299)称："明正负术：其同名相减，则异名相加，正无人负之，负无人正之；其异名相减，则同名相加，正无人正之，负无人负之"。又称："同名相乘为正，异名相乘为负"。"同名相除所得为正，异名相除所得为负。"其中"无人"，实即"无入"。

应该指出，虽然朱世杰给出了正负数乘除法则，但《九章》与刘徽在解"方程"时，未必不遇到正负数乘除问题。可惜没有见诸记载。

在欧洲，一般认为荷兰人日拉尔 (A. Girard, 约 1590—1633) 大约于 1629 年是第一个认识并使用负数去解决几何问题的。在印度，一般认为婆罗门笈多 (Brahmagupta, 598—?) 于 628 年承认了负数可以是二次方程的根。

在我国正负数概念的引入，正负数运算法则的形成，在世界数学发展史上是十分值得称道的。不仅比西欧发现得早，而且比印度的发现要早四、五百年之久。

[31] 此条异名相除为例，……，使二品互相取而已矣

加法的"异名相除"可看作减法的"同名相除"；加法的"同名相益"可看作减法的"异名相益"；而"正无入正之，负无入负之"可换作"负无入正之，正无入负之"。

即 $\quad a+(-b)=a-b, \qquad (-a)+b=b-a;$

若 $a>0,\ b>0,\quad$ 则 $a+b=b-(-a),$

$\qquad (-a)+(-b)=(-b)-a;$

若 $a>b\geqslant 0,\quad$ 则 $a-(-b)=a+b;$

若 $b>a\geqslant 0,\quad$ 则 $a+(-b)=-(b-a)$。

据此足证我国古代十分了解正负数加法法则与其减法法则可以相互转化；也即“凡正负所以记其同异，使二品互相取而已矣。”

[32] 言负者未必负于少，……，此条之实兼通矣

“负于少”即是实际意义的少。如亏损、卖物。“正于多”即是实际意义的多。如盈余、买物等。由“两算得失相反，要令正负以名之”可知，正负是得失相反的两种相对的数。注文“言负者未必负于少，言正者未必正于多”。即是：正负不必一定表示在实际意义中的多少。负，不必一定表示亏损，正，不必一定表示盈余。

每一方程各项系数虽有正负，若全部变号，则与算无伤。既然无伤，则可常使两方程首项系数异号。正负数加法法则可以兼通加减两法则。即“每一行之中虽复赤黑异算无伤。然则可使得头位常相与异名。此条之实兼通矣”。

[33] 遂以二条反复一率，……，犹一术也

因正负数加法，减法既然可以互相转化，故可将此二条视为一条法则。

若两方程首项系数同号，两式可用减法消元；当首项与次项互换后，若新方程首项系数异号，两式可用加法消元。由于所得结果一样，可见加法消元与减法消元实为一种方法。即“犹一术也”。

[34] 又本设诸行……，令上下相命而已

方程组中，不拘有多少个方程，消元时应消到“上下相命”为止。“上”是法，“下”乃实，“上下相命”即以法命实；也即一元一次方程。

[35] 若以正负相减如数，……，不但数物左右之也

李潢于《九章算术细草图说》称：“云若以正负相减如数，……，不但数物左右之也者。即卷末方程新术之第一术说详术。”

[四] 今有上禾五秉，损实一斗一升，当下禾七秉。上禾七秉，损实二斗五升，当下禾五秉。问上、下禾实一秉各几何。

答曰：

上禾一秉五升，

下禾一秉二升。

术曰：如方程。置上禾五秉正，下禾七秉负，损实一斗一升正。言上禾五秉之实多，减其一斗一升，余，是与下禾七秉相当数也。故互其算，令相折除，以一斗一升为差。为差者上禾之余实也。次置上禾七秉正，下禾五秉负，损实二斗五升正[36]。以正负术入之。按正负之术，本设列行物程之数不限多少，必令与实上、下相次，而以每行各自为率。然而或减或益，同行异位殊为二品，各自并减之差见于下也[37]。

[36] 术曰：如方程，……，损实二斗五升正

设上禾、下禾一秉之实各为 x,y，依术得"方程"：

$$\begin{cases}5x-7y=11\\7x-5y=25\end{cases}$$

因"上禾五秉之实多，减其一斗一升，余，是与下禾七秉相当数也"。故得 $5x-11=7y$。由注文"互其算，令相折除，以一斗一升为差。为差者上禾之余实也"。乃得：$5x-7y=11$。仿此，可得 $7x-5y=25$。

"互其算"，"相折除"是古算中一句术语，相当于现今所说移项变号。

[37] 按正负之术，……，各自并减之差见于下也

在布列方程时，不拘未知数多少，需按上下一定次序排列各项，而且使每行各项系数都是一组成比例的数。

方程的各项系数或正或负只有两种情形，而各行的差实即常数项应列于下。即"各自并减之差见于下也"。

[五] 今有上禾六秉，损实一斗八升，当下禾一十秉。下禾十五秉，损实五升，当上禾五秉。问上、下禾实一秉

各几何。

答曰：

上禾一秉实八升，

下禾一秉实三升。

术曰：如方程。置上禾六秉正，下禾一十秉负，损实一斗八升正。次置上禾五秉负，下禾一十五秉正，损实五升正。以正负术入之。言上禾六秉之实多，减损其一斗八升，余是与下禾十秉相当之数。故亦互其算而以一斗八升为差实。差实者上禾之余实。

[六] 今有上禾三秉，益实六斗，当下禾十秉。下禾五秉，益实一斗，当上禾二秉。问上、下禾实一秉各几何。

答曰：

上禾一秉实八斗，

下禾一秉实三斗。

术曰：如方程，置上禾三秉正，下禾一十秉负，益实六斗负。次置上禾二秉负，下禾五秉正，益实一斗负。以正负术入之。言上禾三秉之实少，益其六斗，然后与下禾十秉相当也。故亦互其算，而以六斗为差实。差实者，下禾之余实。

[七] 今有牛五、羊二，直金十两。牛二、羊五，直金八两。问牛、羊各直金几何。

答曰：

牛一，直金一两二十一分两之一十三，

羊一，直金二十一分两之二十。

术曰：如方程。假令为同齐，头位为牛，当相乘左右行定。更置右行牛十、羊四，直金二十两；左行牛十、羊二十五，直金四十两。牛数等同，金

多二十两者，羊差二十一使之然也。以少行减多行，则牛数尽，惟羊与直金之数见，可得而知也[38]。以小推大，虽四、五行不异也。

[38] 假令为同齐，……，可得而知也

设牛、羊一头直金各为 x，y，依术得

$$\begin{cases}5x+2y=10\\2x+5y=8\end{cases}。$$

因"头位为牛"，使"相乘左右行定"，即

$$\begin{cases}10x+4y=20\\10x+25y=40\end{cases}。$$

两式相减为 $21y=20$，即"以少行减多行，则牛数尽，惟羊与直金之数见"。

这是刘徽所创的"互乘对减"消元法。此法可以推广，故称"以小推大，虽四、五行不异也。"

[八] 今有卖牛二、羊五，以买十三豕，有余钱一千。卖牛三、豕三，以买九羊，钱适足。卖羊六、豕八，以买五牛，钱不足六百。问牛，羊、豕价各几何。

答曰：

牛价一千二百，

羊价五百，

豕价三百。

术曰：如方程。置牛二，羊五正，豕一十三负，余钱数正；次牛三正，羊九负，豕三正；次牛五负，羊六正，豕八正，不足钱负。以正负术入之。此中行买卖相折，钱适足，但互买卖算而已，故下无钱直也。设欲以此行如方程法，先令牛二徧乘中行，而以右行直除之，是终于下实虚缺矣。故注曰正无实负，负无实正，方为类也[39]。方将以别实加适足之数，与实物作实。盈不足章黄金白银与此相当。假

令黄金九、白银十一，称之重适等。交易其一，金轻十三两。问金、银一枚各重几何。与此同。

[九] 今有五雀、六燕，集称之衡，雀俱重，燕俱轻。一雀一燕交而处，衡适平。并燕、雀重一斤。问燕、雀一枚各重几何。

答曰：

雀重一两一十九分两之十三，

燕重一两一十九分两之五。

术曰：如方程。交易质之，各重八两。此四雀一燕与一雀五燕衡适平。并重一斤，故各八两。列两行程数。左行头位其数有一者，令右行偏除。亦可令于左行而取其法实于右。左行数多，以右行取其数。左头位减尽，中下行算当燕与实，右行不动。左上空，中法下实即每枚当重，宜可知也[40]。按此四雀一燕与一雀五燕其重等，是三雀四燕重相当，雀率重四，燕率重三也。诸再程之率皆可异术求之，即其数也[41]。

[39] 正无实负，负无实正，方为类也

设 x，y，z 分别为牛、羊、豕价，按术乃有

$$\begin{cases} 2x+5y-13z=1000 & (1)\\ 3x-9y+3z=0 & (2)\\ -5x+6y+8z=-600 & (3)\end{cases}$$

以 2 遍乘 (2) 式各项，即"先令牛二徧乘中行"得

$$6x-18y+6z=0 \qquad (4)$$

由 (4) 式累减 (1) 式，即"以右行直除之"，得

$$-33y+45z=-3000 \qquad (5)$$

因 (4) 式右边为零，由 (4) 式累减 (1) 式，右边不够减，即"终于下实虚缺矣"。又按"正无入负之，负无入正之，"得 (5) 式右边为 -3000。

"正无实负，负无实正，方为类也"。即"正无入负之，负无入正之"。前文是"无入"，此处所以为"无实"，是承上文"终于下实虚缺

矣”而言。

[40] 左行头位其数有一者，……，宜可知也

依术计算，得“方程”为

	左	右
雀	1	4
燕	5	1
重	8	8

或 $\begin{cases} 4x + y = 8 \\ x + 5y = 8, \end{cases}$

其中 x，y 各为 1 雀 1 燕的重量。

因“左行头位其数有一”，故可“令右行徧除”。即是由右行连续减左行 4 次。这样可能出现负数。所以，也可用 4 遍乘左行而减右行，即“亦可令于左行而取其法实于右”

	左	右
雀	4	4
燕	20	1
重	32	8

或 $\begin{cases} 4x + y = 8 \\ 4x + 20y = 32。 \end{cases}$

因“左行数多”，即 $4x + 20y = 32$；应“以右行取其数”，即是由左行减右行，因而左行头位为零；中位为法、下位为实各相当于 19 燕而重为 24。即“左头位减尽，中下行算当燕与实，右行不动”。即得

	左	右
雀	0	4
燕	19	1
重	24	8

或 $\begin{cases} 4x + y = 8 \\ \quad 19y = 24。 \end{cases}$

于上式中，欲求 1 燕的重量，乃“左上空，中法下实即每枚当重，宜可知也”。故得 $y = \frac{24}{19} = 1\frac{5}{19}$。仿此得 $x = 1\frac{13}{19}$。

[41] 按此四雀一燕……，即其数也

设 x，y 分别为 1 雀 1 燕的重量，依注则有

$$4x + y = x + 5y,$$

移项得：　$3x = 4y$，　或　$x:y = 4:3$。

即“是三雀四燕重相当，雀率重四，燕率重三也”。再按“衰分术”求之，即得雀、燕的重量。

这是刘徽所提出的另一种解法。这种解法也可以推广，即“诸再程之率皆可异术求之”。“异术”即是章末“方程新术”，也就是消去常数项再按“衰分术”计算的方法。

[一〇] 今有甲乙二人持钱不知其数。甲得乙半而钱五十，乙得甲太半而亦钱五十。问甲、乙持钱各几何。

答曰：

甲持三十七钱半，

乙持二十五钱。

术曰：如方程。损益之。此问者言一甲、半乙而五十，太半甲、一乙亦五十也。各以分母乘其全内子，行定：二甲一乙而钱一百，二甲三乙而钱一百五十，于是乃如方程。诸物有分者仿此。

[一一] 今有二马、一牛价过一万，如半马之价。一马、二牛价不满一万，如半牛之价。问牛、马价各几何。

答曰：

马价五千四百五十四钱一十一分钱之六，

牛价一千八百一十八钱一十一分钱之二。

术曰：如方程。损益之。此一马半与一牛价直一万也，二牛半与一马亦直一万也。一马半与一牛直钱一万，通分内子，右行为三马二牛直钱二万。二牛半与一马直钱一万，通分内子，左行为二马五牛直钱二万也。

[一二] 今有武马一匹，中马二匹，下马三匹，皆载四十石至阪，皆不能上。武马借中马一匹，中马借下马一匹，下马借武马一匹，乃皆上。问武、中、下马一匹各力引几何。

答曰：

武马一匹力引二十二石七分石之六，

中马一匹力引十七石七分石之一，

下马一匹力引五石七分石之五。

术曰：如方程。各置所借，以正负术入之。

[一三] 今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，如丙一绠；丙四绠不足，如丁一绠；丁五绠不足，如戊一绠；戊六绠不足，如甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮。问井深、绠长各几何。

答曰：井深七丈二尺一寸。

甲绠长二丈六尺五寸，

乙绠长一丈九尺一寸，

丙绠长一丈四尺八寸，

丁綆长一丈二尺九寸，

戊綆长七尺六寸。

术曰：如方程。以正负术入之[42]。此率初如方程为之，名各一逮井。其后，法得七百二十一，实七十六，是为七百二十一绠而七十六逮井。而戊一绠逮井之数定，逮七百二十一分之七十六。是故七百二十一为井深，七十六为戊绠之长，举率以言之。

[42] 术曰：如方程。以正负术入之

设 x，y，z，u，v 分别为甲、乙、丙、丁、戊绠长的比率，又取井深的比率为 w，依术得

$$\begin{cases} 2x + y = w \\ 3y + z = w \\ 4z + u = w \\ 5u + v = w \\ 6v + x = w。 \end{cases}$$

解之得：

$$\frac{x}{w}=\frac{265}{721},\ \frac{y}{w}=\frac{191}{721},\ \frac{z}{w}=\frac{148}{721},$$

$$\frac{u}{w}=\frac{129}{721},\ \frac{v}{w}=\frac{76}{721}。$$

因经文未给井深的单位，答案却表示以丈、尺、寸，其实应是$x:y:z:u:v:w=265:191:148:129:76:721$，即各绠长与井深的比率。故注称“举率以言之”。

注文“七百二十一为井深，七十六为戊绠之长，举率以言之”。足见刘徽深知此为不定方程组。

［一四］今有白禾二步、青禾三步、黄禾四步、黑禾五步，实各不满斗。白取青、黄，青取黄、黑，黄取黑、白，黑取白、青，各一步，而实满斗。问白、青、黄、黑禾实一步各几何。

答曰：

白禾一步实一百一十一分斗之三十三，

青禾一步实一百一十一分斗之二十八，

黄禾一步实一百一十一分斗之一十七，

黑禾一步实一百一十一分斗之一十。

术曰：如方程。各置所取，以正负术入之。

［一五］今有甲禾二秉、乙禾三秉、丙禾四秉，重皆过于石。甲二重如乙一，乙三重如丙一，丙四重如甲一。问甲、乙、丙禾一秉各重几何。

答曰：

甲禾一秉重二十三分石之十七，

乙禾一秉重二十三分石之十一，

丙禾一秉重二十三分石之十。

术曰：如方程。置重过于石之物为负。此问者言甲禾二秉之重过于一石也。其过者几何，如乙一秉重矣。互其算，令相折除，而以一石为之差实。差实者，如甲禾余实，故置算相与同也[43]。以正负术入之。此入头位异名相除者，正无入正之，负无入负之也。

[43] 此问者言甲禾二秉之重……，故置算相与同也

设 x，y，z 分别为甲禾、乙禾、丙禾 1 秉的重量，依题意得

$$\begin{cases} 2x - 1 = y \\ 3y - 1 = z \\ 4z - 1 = x \end{cases}$$

也即"甲禾二秉之重过于一石也。其过者几何，如乙一秉重矣"。

移项得 $$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3y - z = 1 \\ 4z - x = 1 \end{cases}$$

每方程第二项系数都是负数，即"重过于石之物为负"。其右边 1 即是"以一石为之差实"。

注文"而以一石为之差实"，不误。杨辉本、大典本都讹作"而一以石为之差实"。钱校本则从之，并说："戴震将'而一'二字连在'令相折除'以下，遂以为是衍文而删去之，是不确当的"。钱校本对戴震的批评是正确的；但以为是"而一以石为之差实"，则承其谬误，难于理解。根据第五、六问的注文"而以一斗八升为差实"。"而以六斗为差实"，可知此处当为"而以一石为之差实"。今为校正。

[一六] 今有令一人、吏五人、从者一十人，食鸡一十；令一十人、吏一人、从者五人，食鸡八；令五人、吏一十

人、从者一人，食鸡六。问令、吏、从者食鸡各几何。

答曰：

令一人食一百二十二分鸡之四十五，

吏一人食一百二十二分鸡之四十一，

从者一人食一百二十二分鸡之九十七。

术曰：如方程。以正负术入之。

[一七] 今有五羊、四犬、三鸡、二兔，直钱一千四百九十六；四羊、二犬、六鸡、三兔，直钱一千一百七十五；三羊、一犬、七鸡、五兔，直钱九百五十八；二羊、三犬、五鸡、一兔，直钱八百六十一。问羊、犬、鸡、兔价各几何。

答曰：

羊价一百七十七，

犬价一百二十一，

鸡价二十三，

兔价二十九。

术曰：如方程。以正负术入之。

[一八] 今有麻九斗、麦七斗、菽三斗、荅二斗、黍五斗，直钱一百四十；麻七斗、麦六斗、菽四斗、荅五斗、黍三斗，直钱一百二十八；麻三斗、麦五斗、菽七斗、荅六斗、黍四斗，直钱一百一十六；麻二斗、麦五斗、菽三斗、荅九斗、黍四斗，直钱一百一十二；麻一斗、麦三斗、菽二斗、荅八斗、黍五斗，直钱九十五。问一斗直几何。

答曰：

麻一斗七钱，

麦一斗四钱，

菽一斗三钱，

荅一斗五钱，

黍一斗六钱。

术曰：如方程。以正负术入之。此"麻麦"与均输、少广章之重衰、积分，皆为大事。其拙于精理徒按本术者，或用算而布毡，方好烦而喜误，曾不知其非，反欲以多为贵。故其算也，莫不闇于设通而专于一端。至于此类，苟务其成，然或失之，不可谓要约。更有异术者，庖丁解牛，游刃理间，故能历久其刃如新。夫数犹刃也，易简用之则动中庖丁之理。故能和神爱刃，速而寡尤。凡《九章》为大事，按法皆不尽一百算也。虽布算不多，然足以算多。世人多以方程为难，或尽布算之象在缀正负而已。未暇以论其设动无方，斯胶柱调瑟之类。聊復恢演为作新术，著之于此，将亦启导疑意，网罗道精，岂传之空言，记其施用之例，著策之数，每举一隅焉。

方程新术曰：以正负术入之。令左右相减，先去下实，又转去物位，求其一行二物正负相借者，易其相当之率。又令二物与他行互相去取，转其二物相借之数，即皆相当之率也。各据二物相当之率，对易其数，即各当之率也[44]。更置减行及其下实，各以其物本率今有之，求其所同，并以为法。其当相并而行中正负杂者，同名相从，异名相消，余以为法。以下实为实。实如法，即合所问也。一物各以本率今有之，即皆合所问也。率不通者齐之[45]。　其一术曰：置群物通率为列衰，更置减行群物之数，各以其率乘之，并以为法。其当相并而行中正负杂者，同名相从，异名相消，余为法。以减行下实乘列衰，各自为实。实如法而一，即得[46]。　以旧术为之，凡应置五行。今欲要约。先置第四行，以减第三行。反减第四行，去其头位。次置第二行，以第三行减第二行，去其头位。次置右行及左行，去其头位。次以第二行减右行[48]。次以右行去左行及第二行头位。又去第四行头位，余，可半。次以第四行减左行[48]。次以左行去第四行及第二行头位。次以第二行去第四行头位。余，约之为法、实，如法而一得六，即黍价。以法减第二行得荅价，左行得菽价，右行得麦价，第三行得麻价。如此凡用七十七算[47]。　以新术为此：先以第四行减第三行。次以第三行去右行及第二行、第四行下位。又以减左行下位，不足减乃止。次以左行减第三行下位，不足减乃止。次以第三行去左行下位。讫，废去第三行。次以第四行去左行下位。又以减右行头位。次以右行去第二行及第四行下位。次以第二行减第四行及左行头位，不足减乃止。次以第四行减左行菽位，不足减乃止。次以左行减第二行头位，余可再半。次以第四行去左行及第二行头位。次以第二行去左行头位。余

约之。上得五，下得三，是菽五当荅三。次以左行去第二行菽位。又以减第四行及右行菽位，不足减，乃止。次以右行减第二行头位，不足减，乃止。次以第二行去右行头位。次以左行去右行头位。余，上得六，下得五，是为荅六当黍五。次以左行去右行荅位，余，约之。上为二，下为一。次以右行去第二行下位。以第二行去第四行下位。又以减左行下位。不足减乃止。次左行去第二行下位。余，上得三，下得四，是为麦三当菽四。次以第二行减第四行下位。不足减乃止。次以第四行去第二行下位。余，上得四，下得七，是为麻四当麦七。是为相当之率举矣[49]。据麻四当麦七即为麻价率七而麦价率四。又麦三当菽四，即为麦价率四而菽价率三。又菽五当荅三，即为菽价率三而荅价率五。又荅六当黍五，即为荅价率五而黍价率六。而率通矣[50]。更置第三行，以第四行减之，余有麻一斗、菽四斗正，荅三斗负，下实四正。求其同为麻之数，以菽率三、荅率五、各乘菽荅斗数，如麻率七而一，菽得一斗七分斗之五正，荅得二斗七分斗之一负。则菽，荅化为麻以并之，令同名相从，异名相消，余为定麻七分斗之四，以为法。置下实四为实。以分母乘之，实得二十八，而分子化为法矣。以法除得七，即麻一斗之价。置麦率四，菽率三、荅率五、黍率六，皆以其斗数乘之，各自为实。以麻率七为法。所得即同为麻之数[51]。亦可使置本行实与物同通之，各以本率今有之，求其所同。所得并以为法，如此则无正负之异矣，择异同而已[52]。又可以其一术为之。置五行通率，为麻七、麦四、菽三、荅五、黍六，以为列衰。减行麻一斗、菽四斗正、荅三斗负，各以其率乘之，讫。令同名相从，异名相消，余为法。又置下实，乘列衰，所得各为实。此可以实约法，则不复乘列衰，各以列衰如所约知其价。如此则凡用一百二十四算也[53]。

[44] 方程新术曰：以正负术入之，……，即各当之率也

本章所用解法一般是“直除”法，即是相减消元法。“方程新术”是消去常数项法。这一方法是先消去常数项，再消去其他项，然后求得含有两未知数的方程。

方程各项系数有正有负，需以正负术入算，故于术端声明“以正负术入之”。

“左右”是所列“方程”的左右行。“下实”即是常数项。于“方程”中，令左右两行相减，可消去某行的常数项。即“先去下实”。

当两行相消时，一直消到某行只有两未知数项，此两项需是一正一负时为止。例如所得为 $4x-7y=0$，即“一行二物正负相借者”。移项得 $4x=7y$，即“易其相当之率”。

假设先求得含有两未知数项的方程为 $ax=by$，再令此方程

与其他方程相加减求得含有另外两未知数项方程为 $cy=dz$，$ez=fu$，…。即“令二物与他行互相去取，转其二物相借之数，即皆相当之率也”。

“各据二物相当之率，对易其数，即各当之率也”。就是根据两未知数相当之率，变换成比例，则得两未知数的比率。即是由 $ax=by$，$cy=dz$，$ez=fu$，…，求得：$x:y=b:a$，$y:z=d:c$，$z:u=f:e$，…。

[45] 更置减行及其下实，……。率不通者齐之

当求得未知数的比率后，将其他未知数皆置换成同一未知数，代入两方程相减之差所谓“减行”中，便可求得这未知数的值。

设“减行”为 $x+4z-3u=4$，又设各当之率为 $x:z=7:3$，$x:u=7:5$。

因 $x:z=7:3$，$x:u=7:5$，于是求得 x，z，u 的本率分别为 7，3，5。“今有之”得：$4z=4\times\frac{3}{7}x$，$-3u=-3\times\frac{5}{7}x$。

将二“物”对应值代入“减行”，则“减行”各“物”皆成同一“物”，即是置换成同一未知数的方程。将各项相加，以未知数的系数作除数。即“求其所同，并以为法”。如以 $4z=4\times\frac{3}{7}x$，$-3u=-3\times\frac{5}{7}x$ 代入“减行” $x+4z-3u=4$，得

$$x+4\times\frac{3}{7}x-3\times\frac{5}{7}x=\frac{4}{7}x=4,$$

其中 $\frac{4}{7}$ 作为“法”。

当“减行”各项置换成同一位知数后，系数有正有负，当以“正负术”入算，仍以各项系数的和作为“法”。即“其当相并而行中正负杂者，同名相从，异名相消，余以为法”。

“以下实为实。实如法，即合所问也”。在方程 $\frac{4}{7}x=4$ 中，4

为实，$\frac{4}{7}$ 为法，其解为 $x=4\div\left(\frac{4}{7}\right)=7$。

“一物各以本率今有之，即皆合所问也”。也就是说类似地用比例可求得其他未知数的解。

若各物“相当之率”或“各当之率”不能写成连比，即是“率不通者”。“率不通者齐之”，即是先通分，后写成连比形式。

[46] 其一术曰：……，实如法而一，即得

刘徽又提出一种解法，即“其一术”。

如前所述，当求得各未知数的比率后，将这比率列成连比，即“置群物通率为列衰”。又将减行各项系数乘以所对应的比率，以这些数的和作为除数。即“更置减行群物之数，各以其率乘之，并以为法”。

设群物通率为$\frac{x}{7}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\frac{u}{5}=\frac{v}{6}$，或写成

$$x:y:z:u:v=7:4:3:5:6。$$

“置减行” $x+4z-3u=4$。

“群物之数”为 $1,\ 4,\ -3$。

“各以其率乘之”为 $1\times7,\ 4\times3,\ -3\times5$，

“并以为法”，即 $1\times7+4\times3-3\times5=4$。

欲求某一未知数的解时，可以“减行”的常数项乘该未知数的比率，分别作为被除数。即“以减行下实乘列衰，各自为实”。

如上引之例，欲求 x, z, u 的解，按术得 $4\times7, 4\times3, 4\times5$ 各作为被除数。被除数除以除数则得

$$x=\frac{4\times7}{4}=7,\ z=\frac{4\times3}{4}=3,\ u=\frac{4\times5}{4}=5。$$

[47] 以旧术为之，……，如此凡用七十七算

今以第十八问为例，按“直除”法推算如下：

设麻、麦、菽、荅、黍 1 斗之价各为 x, y, z, u, v 钱，依题意得“方程”或方程组为：

	(左) (五)	(四)	(三)	(二)	(右) (一)
麻	1	2	3	7	9
麦	3	5	5	6	7
菽	2	3	7	4	3
荅	8	9	6	5	2
黍	5	4	4	3	5
下实	95	112	116	128	140

$$9x+7y+3z+2u+5v=140 \qquad (1)$$
$$7x+6y+4z+5u+3v=128 \qquad (2)$$
$$3x+5y+7z+6u+4v=116 \qquad (3)$$
$$2x+5y+3z+9u+4v=112 \qquad (4)$$
$$1x+3y+2z+8u+5v=95 \qquad (5)$$

“先置第四行，以减第三行”。即

	(五)	(四)	(六)	(二)	(一)
麻	1	2	1	7	9
麦	3	5	0	6	7
菽	2	3	4	4	3
荅	8	9	−3	5	2
黍	5	4	0	3	5
下实	95	112	4	128	140

$$(3)-(4):\quad x+4z-3u=4, \qquad (6)$$

“反减第四行，去其头位”。即

	(五)	(七)	(六)	(二)	(一)
麻	1	0	1	7	9
麦	3	5	0	6	7
菽	2	−5	4	4	3
荅	8	15	−3	5	2
黍	5	4	0	3	5
下实	95	104	4	128	140

$(4)-2(6)$: $5y-5z+15u+4v=104$, (7)

“次置第二行,以第三行减第二行,去其头位”。 即

(五)	(七)	(六)	(八)	(一)
1	0	1	0	9
3	5	0	6	7
2	−5	4	−24	3
8	15	−3	26	2
5	4	0	3	5
95	104	4	100	140

$(2)-7(6)$: $6y-24z+26u+3v=100$, (8)

“次置右行及左行,去其头位”。即以左右两行各减第三行。

(十)	(七)	(六)	(八)	(九)
0	0	1	0	0
3	5	0	6	7
−2	−5	4	−24	−33
11	15	−3	26	29
5	4	0	3	5
91	104	4	100	104

$(1)-9(6)$: $7y-33z+29u+5v=104$, (9)

$(5)-(6)$: $3y-2z+11u+5v=91$, (10)

“次以第二行减右行”。即

(十)	(七)	(六)	(八)	(十一)
0	0	1	0	0
3	5	0	6	1
−2	−5	4	−24	−9
11	15	−3	26	3
5	4	0	3	2
91	104	4	100	4

$(9)-(8)$: $y-9z+3u+2v=4$, (11)

“次以右去左行及第二行头位”。以左行、第二行各减第一行消去其第二项：

(十二)	(七)	(六)	(十三)	(十一)
0	0	1	0	0
0	5	0	0	1
25	−5	4	30	−9
2	15	−3	8	3
−1	4	0	−9	2
79	104	4	76	4

$$(10)-3(11):\ 25z+2u-v=79, \tag{12}$$

$$(8)-6(11):\ 30z+8u-9v=76, \tag{13}$$

“又去第四行头位,余,可半”。当消去第四行第二项后,再约分;

(十二)	(十四)	(六)	(十三)	(十一)
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
25	20	4	30	−9
2	0	−3	8	3
1	−3	0	−9	2
79	42	4	76	4

$$(7)-5(11):\ 40z-6v=84,\ 或\ 20z-3v=42, \tag{14}$$

“次以第四行减左行”。即

(十五)	(十四)	(六)	(十三)	(十一)
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
5	20	4	30	−9
2	0	−3	8	3
2	−3	0	−9	2
37	42	4	76	4

$(12)-(14)$: $5z+2u+2v=37$, (15)

“次以左行去第四行及第二行头位”。即

(十五)	(十六)	(六)	(十七)	(十一)
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
5	0	4	0	−9
2	−8	−3	−4	3
2	−11	0	−21	2
37	−106	4	−146	4

$(14)-4(15)$: $-8u-11v=-106$, (16)

$(13)-6(15)$: $-4u-21v=-146$, (17)

“次以第二行去第四行头位”。即

(十五)	(十八)	(六)	(十七)	(十一)
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
5	0	4	0	−9
2	0	−3	−4	3
2	31	0	−21	2
37	186	4	−146	4

$(16)-2(17)$: $31v=186$, (18)

“余，约之为法、实。如法而一得六，即黍价”。即

(十五)	(十九)	(六)	(十七)	(十一)
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
5	0	4	0	−9
2	0	−3	−4	3
2	1	0	−21	2
37	6	4	−146	4

由(18)得:　　$v=\frac{186}{31}=6$。　　(19)

“以法减第二行得荅价”。即

(十五)	(十九)	(六)	(二十)	(十一)
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
5	0	4	0	−9
2	0	−3	1	3
2	1	0	0	2
37	6	4	5	4

$(17)+21(19)$:　$-4u=-20$, 即 $u=5$。　　(20)

“左行得菽价，右行得麦价，第三行得麻价”。以左行减第四行、第二行得菽价，右行减第四行、第二行，再减左行得麦价，第三行减第二行、左行得麻价。

(二十一)	(十九)	(二十三)	(二十)	(二十二)
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
1	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	1	0	0	0
3	6	7	5	4

$(15)-[2(19)+2(20)]$:　　$z=3$。　　(21)

$(11)-[2(19)+3(20)-9(21)]$:　　$y=4$。　　(22)

$(6)+[3(20)-4(21)]$:　　$x=7$。　　(23)

其中共计 77 次运算,即“如此凡用七十七算”。

[48] 次以第二行减右行。次以第四行减左行

注文“次以第二行减右行”及“次以第四行减左行”。皆不误。

钱校本依戴震改为"次以第二行减右行头位"及"次以第四行减左行头位",其中两处各添"头位"二字,显系蛇足,今删。

[49] 以新术为此,……,是为相当之率举矣

仍以第十八问为例注释如下:

设麻、麦、菽、荅、黍1斗之价各为 x, y, z, u, v 钱,故得

	(左) (五)	(四)	(三)	(二)	(右) (一)
麻	1	2	3	7	9
麦	3	5	5	6	7
菽	2	3	7	4	3
荅	8	9	6	5	2
黍	5	4	4	3	5
下实	95	112	116	128	140

$$9x+7y+3z+2u+5v=140 \qquad (1)$$

$$7x+6y+4z+5u+3v=128 \qquad (2)$$

$$3x+5y+7z+6u+4v=116 \qquad (3)$$

$$2x+5y+3z+9u+4v=112 \qquad (4)$$

$$x+3y+2z+8u+5v=95 \qquad (5)$$

"先以第四行减第三行"。即

(五)	(四)	(六)	(二)	(一)
1	2	1	7	9
3	5	0	6	7
2	3	4	4	3
8	9	−3	5	2
5	4	0	3	5
95	112	4	128	140

$$(3)-(4): \quad x+4z-3u=4, \quad (6)$$

次以第三行去右行及第二行、第四行下位。又以减左行下位,不足减乃止"。即:

(十)	(九)	(六)	(八)	(七)
−22	−26	1	−25	−26
3	5	0	6	7
−90	−109	4	−124	−137
77	93	−3	101	107
5	4	0	3	5
3	0	4	0	0

(1)−35(6)：$-26x+7y-137z+107u+5v=0,$ (7)

(2)−32(6)：$-25x+6y-124z+101u+3v=0,$ (8)

(4)−28(6)：$-26x+5y-109z+93u+4v=0,$ (9)

(5)−23(6)：$-22x+3y-90z+77u+5v=3$。 (10)

“次以左行减第三行下位，不足减乃止”。即

(十)	(九)	(十一)	(八)	(七)
−22	−26	23	−25	−26
3	5	−3	6	7
−90	−109	94	−124	−137
77	93	−80	101	107
5	4	−5	3	5
3	0	1	0	0

(6)−(10)：$23x-3y+94z-80u-5v=1,$ (11)

于“减第三行下位”下，脱落“不足减乃止”五字。今补。

“次以第三行去左行下位。讫，废去第三行”。即

(十二)	(九)	(八)	(七)
−91	−26	−25	−26
12	5	6	7
−372	−109	−124	−137
317	93	101	107
20	4	3	5
0	0	0	0

$(10)-3(11)$: $-91x+12y-372z+317u+20v=0$, (12)

“次以第四行去左行下位。又以减右行头位”。即

(十三)	(九)	(八)	(十四)
39	−26	−25	0
−13	5	6	2
173	−109	−124	−28
−148	93	101	14
0	4	3	1
0	0	0	0

$(12)-5(9)$: $39x-13y+173z-148u=0$, (13)

$(7)-(9)$: $2y-28z+14u+v=0$, (14)

“又以减右行头位”。各版本皆误为“下位”,今校正。

“次以右行去第二行及第四行下位”。即

(十三)	(十六)	(十五)	(十四)
39	−26	−25	0
−13	−3	0	2
173	3	−40	−28
−148	37	59	14
0	0	0	1
0	0	0	0

$(8)-3(14)$: $-25x-40z+59u=0$, (15)

$(9)-4(14)$: $-26x-3y+3z+37u=0$, (16)

“次以第二行减第四行及左行头位,不足减乃止”。即

(十八)	(十七)	(十五)	(十四)
14	−1	−25	0
−13	−3	0	2
133	43	−40	−28
−89	−22	59	14
0	0	0	1
0	0	0	0

$$(16)-(15):\ -x-3y+43z-22u=0, \tag{17}$$

$$(13)+(15):\ 14x-13y+133z-89u=0, \tag{18}$$

注文“次以第二行减第四行及左行头位”下，似脱落“不足减乃止”一语，今以意校补。

“次以第四行减左行䓛位，不足减乃止”。即

(十九)	(十七)	(十五)	(十四)
17	−1	−25	0
−4	−3	0	2
4	43	−40	−28
−23	−22	59	14
0	0	0	1
0	0	0	0

$$(18)-3(17):\ 17x-4y+4z-23u=0, \tag{19}$$

“次以左行减第二行头位，余可再半”。即

(十九)	(十七)	(二十)	(十四)
17	−1	−2	0
−4	−3	−1	2
4	43	−9	−28
−23	−22	9	14
0	0	0	1
0	0	0	0

$$(15)+(19):\ -8x-4y-36z+36u=0,$$

即 $$-2x-y-9z+9u=0。 \tag{20}$$

“次以第四行去左行及第二行头位”。即

(二十一)	(十七)	(二十二)	(十四)
0	−1	0	0
−55	−3	5	2
735	43	−95	−28
−397	−22	53	14
0	0	0	1
0	0	0	0

$$(19)+17(17):\quad -55y+735z-397u=0 \tag{21}$$

$$(20)-2(17):\quad 5y-95z+53u=0 \tag{22}$$

“次以第二行去左行头位。余约之。上得五，下得三，是菽五当荅三”。即

(二十三)	(十七)	(二十二)	(十四)
0	−1	0	0
0	−3	5	2
−5	43	−95	−28
3	−22	53	14
0	0	0	1
0	0	0	0

$(21)+11(22):\quad -310z+186u=0,$

即 $-5z+3u=0$，或 $5z=3u$。 (23)

“次以左行去第二行菽位。又以减第四行及右行菽位，不足减乃止”。即

(二十三)	(二十五)	(二十四)	(二十六)
0	−1	0	0
0	−3	5	2
−5	3	0	−3
3	2	−4	−1
0	0	0	1
0	0	0	0

$$(22)-19(23):\ 5y-4u=0, \tag{24}$$

$$17+8(23):\ -x-3y+3z+2u=0, \tag{25}$$

$$(14)-5(23):\ 2y-3z-u+v=0, \tag{26}$$

“次以右行减第二行头位，不足减乃止”。即

(二十三)	(二十五)	(二十七)	(二十六)
0	−1	0	0
0	−3	1	2
−5	3	6	−3
3	2	−2	−1
0	0	−2	1
0	0	0	0

$$(24)-2(26):\ y+6z-2u-2v=0, \tag{27}$$

“次以第二行去右行头位”。即

(二十三)	(二十五)	(二十七)	(二十八)
0	−1	0	0
0	−3	1	0
−5	3	6	−15
3	2	−2	3
0	0	−2	5
0	0	0	0

$$(26)-2(27):\ -15z+3u+5v=0, \qquad (28)$$

“次以左行去右行头位。余，上得六，下得五，是为荅六当黍五”。即

(二十三)	(二十五)	(二十七)	(二十九)
0	−1	0	0
0	−3	1	0
−5	3	6	0
3	2	−2	−6
0	0	−2	5
0	0	0	0

$$(28)-3(23):\ -6u+5v=0, \qquad (29)$$

或
$$6u=5v,$$

“次以左行去右行荅位，余，约之。上为二，下为一”。即

(二十三)	(二十五)	(二十七)	(三十)
0	−1	0	0
0	−3	1	0
−5	3	6	−2
3	2	−2	0
0	0	−2	1
0	0	0	0

$$(29)+2(23):\qquad -10z+5v=0,$$

即
$$-2z+v=0, \qquad (30)$$

“次以右行去第二行下位”。即

$$
\begin{array}{cccc}
(\text{二十三}) & (\text{二十五}) & (\text{三十一}) & (\text{三十}) \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 1 & 0 \\
-5 & 3 & 2 & -2 \\
3 & 2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$(27)+2(30): \qquad y+2z-2u=0, \qquad (31)$$

“以第二行去第四行下位。又以减左行下位。不足减乃止”。即

$$
\begin{array}{cccc}
(\text{三十三}) & (\text{三十二}) & (\text{三十一}) & (\text{三十}) \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 \\
-3 & 5 & 2 & -2 \\
1 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$(25)+(31): \qquad -x-2y+5z=0, \qquad (32)$$

$$(23)+(31): \qquad y-3z+u=0, \qquad (33)$$

“又以减左行下位”下，似脱落“不足减乃止”五字。今补。

“次左行去第二行下位。余，上得三，下得四，是为麦三当菽四”。即

（三十三）	（三十二）	（三十四）	（三十）
0	−1	0	0
1	−2	3	0
−3	5	−4	−2
1	0	0	0
0	0	0	1
0	0	0	0

$$(31)+2(33):\ 3y-4z=0,\ \text{或}\ 3y=4z, \tag{34}$$

“次以第二行减第四行下位。不足减乃止”。即

（三十三）	（三十五）	（三十四）	（三十）
0	−1	0	0
1	1	3	0
−3	1	−4	−2
1	0	0	0
0	0	0	1
0	0	0	0

$$(32)+(34):\quad -x+y+z=0, \tag{35}$$

“减第四行下位”下，似脱落“不足减乃止”五字。今校补。

“次以第四行去第二行下位。余，上得四，下得七，是为麻四当麦七。是为相当之率举矣”。即

（三十三）	（三十五）	（三十六）	（三十）
0	−1	−4	0
1	1	7	0
−3	1	0	−2
1	0	0	0
0	0	0	1
0	0	0	0

$(34)+4(35)$：$-4x+7y=0$ 或 $4x=7y$。 (36)

由 (23)，(29)，(34)，(36) 式得 $5z=3u$，$6u=5v$，$3y=4z$，$4x=7y$，即是求得二物"相当之率"。也就是注文所说"相当之率举矣"。

〔50〕据麻四当麦七即为麻价率七而麦价率四。……，而率通矣

因 $4x=7y$，即"麻四当麦七"，故有 $x:7=y:4$，即"麻价率七而麦价率四"。

又因 $3y=4z$，$5z=3u$，$6u=5v$，故各得 $y:4=z:3$，$z:3=u:5$，$u:5=v:6$，也可表示为连比，即

$$x:y:z:u:v=7:4:3:5:6,$$

即是群物的比率"通矣"。

〔51〕更置第三行，以第四行减之，……，所得即同为麻之数

这是以群物通率推求各物一斗的价格。即

"更置第三行，以第四行减之"。即是重新布置 (3)，(4) 两式，以 (4) 式减去 (3) 式。即

由 $3x+5y+7z+6u+4v=116$， (3)

减去 $2x+5y+3z+9u+4v=112$， (4)

得 $x+4z-3u=4$。 (6)

称为"减行"。

欲求麻一斗的价格，乃"以菽率三、荅率五各乘菽、荅斗数，如麻率七而一"。即

$$4z=4\times\frac{3}{7}x=1\frac{5}{7}x,$$

$$-3u=-3\times\frac{5}{7}x=-2\frac{1}{7}x。$$

所得乃是"菽得一斗七分斗之五正，荅得二斗七分斗之一负"。

以 $4z$，$-3u$，代入上式，并求其和，得

$$x+4\times\frac{3}{7}x-3\times\frac{5}{7}x=4$$

或

$$x + 1\frac{5}{7}x - 2\frac{1}{7}x = 4,$$

即

$$\frac{4}{7}x = 4。$$

就是"菽荅化为麻以并之","余为定麻七分斗之四以为法。置下实四为实"。故 $x = 7$，即"麻一斗之价"。

"置麦率四、菽率三、荅率五、黍率六，皆以其斗数乘之，各自为实，以麻率七为法。所得即同为麻之数"。即

因 $$x:y:z:u:v = 7:4:3:5:6,$$

如注文所述，则得 $y = \frac{4\times7}{7} = 4$，$z = \frac{3\times7}{7} = 3$，

$$u = \frac{5\times7}{7} = 5,\ v = \frac{6\times7}{7} = 6。$$

[52] 亦可使置本行实与物同通之，……，择异同而已

当求得相当之率以后，不必代入减行以求物价，也可代入"本行"计算。"本行"即是原方程。

例如，今欲代入第二行，$7x + 6y + 4z + 5u + 3v = 128$，以求麦一斗之价。

因 $$x:y:z:u:v = 7:4:3:5:6,$$

可得

$$7x = 7\times\frac{7}{4}y = 12\frac{1}{4}y,\quad 4z = 4\times\frac{3}{4}y = 3y,$$

$$5u = 5\times\frac{5}{4}y = 6\frac{1}{4}y,\ 3v = 3\times\frac{6}{4}y = 4\frac{2}{4}y。$$

将以上各式代入第二行，得

$$12\frac{1}{4}y + 6y + 3y + 6\frac{1}{4}y + 4\frac{2}{4}y = 128,$$

或 $$32y = 128。$$

即"所得并以为法"。以下实 128 为实，以 32 为法，得麦一斗之价

为

$$y=\frac{128}{32}=4。$$

因所列原方程各项都为正，所以代入原方程求物价，所得各项也都为正。于是注文评论说"如此则无正负之异矣"。若代入"减行"求物价，所得各项可能正负相互掺杂。若并以为法，则有正负之异。显见，或依前法以求物价，或按后法以求物价，实际是"择异同而已"。

"求其所同"。由前文可知各本皆讹作"求其本率"。今校正。

[53] 又可以其一术为之。……，一百二十四算也

"又可以其一术为之"以下，是"其一术"的算草。

以"五行通率" $x:y:z:u:v=7:4:3:5:6$ 作为"列衰"，以"减行" $x+4z-3u=4$ 各项系数乘其比率，得：

$$1\times7+4\times3-3\times5=4,$$

即"余为法"，作为除数。又以"减行"下实 4 乘列衰，"所得各为实，"即

$$麻(x):\frac{4\times7}{4}=7,\ 麦(y):\frac{4\times4}{4}=4,$$

$$菽(z):\frac{4\times3}{4}=3,\ 荅(u):\frac{4\times5}{4}=5,$$

$$黍(v):\frac{4\times6}{4}=6。$$

因下实为 4，法为 4，运算中需以 4 除 4，即"以实约法"。既是以 4 除 4，则可不必乘列衰，可由列衰直接求得其一斗之价。虽然这样略去一些运算，但总计一百二十四次运算。

注文"又可以"下，似脱落一"其"字，今校补。

九章算术卷第九

句股以御高深广远

［一］今有句三尺，股四尺，问为弦几何。

答曰：五尺。

［二］今有弦五尺，句三尺，问为股几何。

答曰：四尺。

［三］今有股四尺，弦五尺，问为句几何。

答曰：三尺。

句股[1] 短面曰句，长面曰股，相与结角曰弦。句短其股，股短其弦。将以施于诸率，故先具此术以见其源也。术曰：句股各自乘，并而开方除之，即弦[2]。句自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也。合成弦方之幂，开方除之，即弦也。

又股自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即句。臣淳风等谨按：此术以句、股幂合成弦幂。句方于内，则句短于股[3]。令股自乘以减弦自乘，余者即句幂也。故开方除之，即句也。

又句自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即股。句、股幂合以成弦幂。令去其一，则余在者皆可得而知之。

［1］句股

我国古代称直角三角形的短直角边为句，长直角边为股，斜边为弦。如李籍《音义》称："句，短面也；股，长面也"。又如《周髀算经》称："句广三，股修四，径隅五。"

"句股"二字，在这里应理解为直角三角形。"句股术"可理解

为已知直角三角形的两边推求其第三边的方法。如李籍称："短长相推，以求其弦。故曰句股。"

[2] 句股各自乘，并而开方除之，即弦

设 a, b, c, 分别为句、股、弦，依术乃有：$c=\sqrt{a^2+b^2}$。就是所谓句股定理。

刘徽以割补术论证这一定理，他所绘的图，早经散失。今按李锐（1768—1817）之说依注补图注释如下：

如图 1 所示，ABC 为句股形，以句为边的正方形为朱方，以股为边的正方形为青方。用割补术，将朱、青二方拼成弦方。依其面积关系，故得 $a^2+b^2=c^2$，

或 $c=\sqrt{a^2+b^2}$。

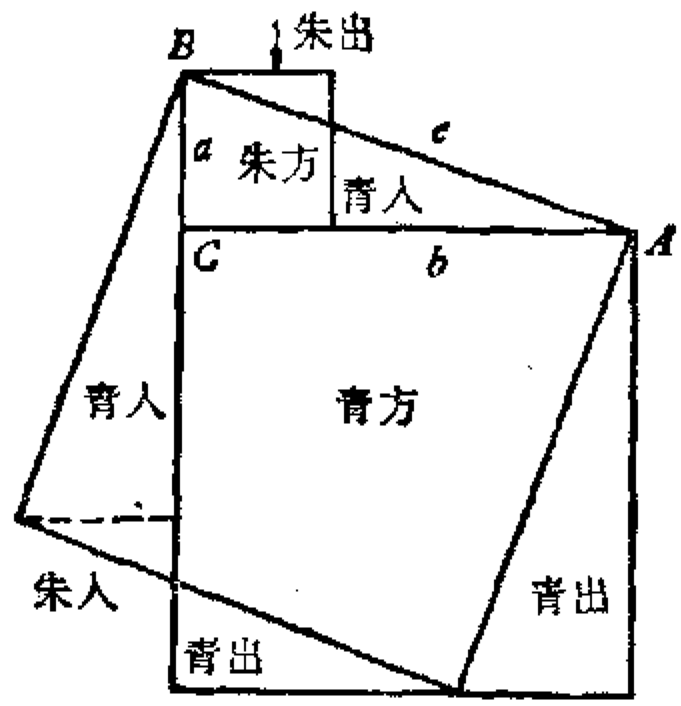


图 1

因朱、青方都有一部分各居于弦方之内、外，故注称："令出入相补，各从其类，因就其余不移动也。"

[3] 句方于内，则句短于股

李注"句方于内，则句短于股"一语，于意欠通，无法注释。如

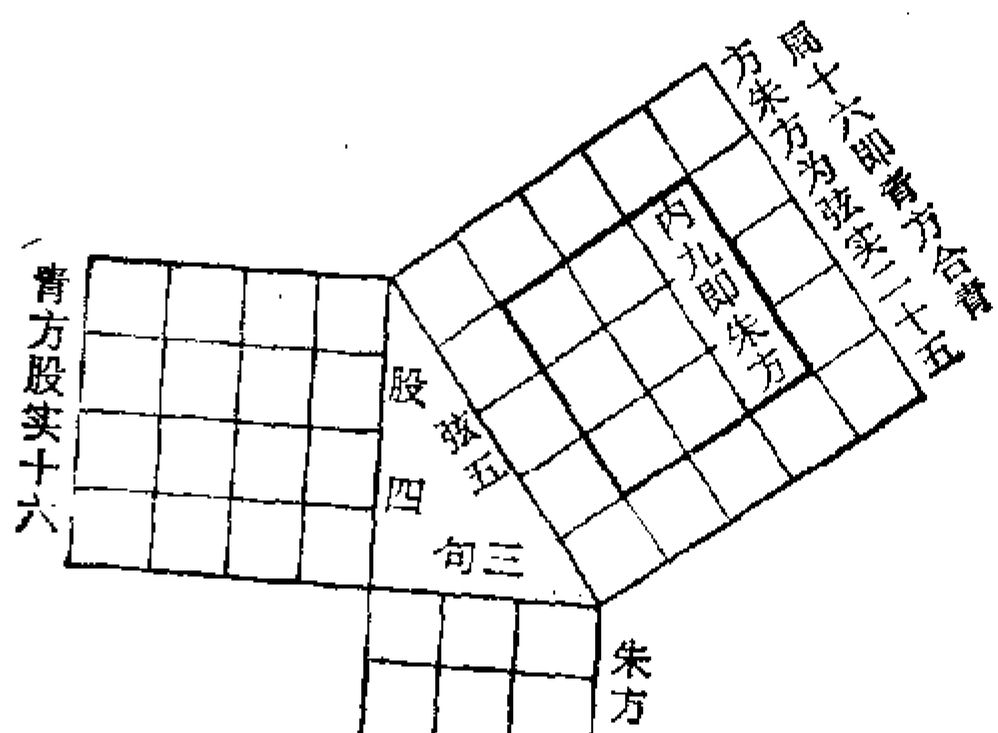


图 2

戴震说："李淳风等所释，有云'句方于内，则句短于股'。据此可推见刘徽旧图之意，原本缺逸。今补。"

由戴图(图 2)来看，也难于理解李之注文。若删去这九字，则前后文词更为连贯。因而疑为衍文。

［四］今有圆材径二尺五寸，欲为方版，令厚七寸。问广几何。

答曰：二尺四寸。

术曰：令径二尺五寸自乘，以七寸自乘减之，其余开方除之，即广。 此以圆径二尺五寸为弦，版厚七寸为句，所求广为股也。

［五］今有木长二丈，围之三尺。葛生其下，缠木七周，上与木齐。问葛长几何。

答曰：二丈九尺。

术曰：以七周乘三尺为股，木长为句，为之求弦。弦者，葛之长。 据围广、木长求葛之长，其形葛卷裹袤。以笔管青线宛转有似葛之缠木，解而观之，则每周之间，自有相间成句股弦。则其间木长为股，围之为句，葛长为弦[4]。七周乘三尺是并合众句以为一句，则句长而股短。故术以木长谓之句，围之谓之股，言之倒互。句与股求弦，亦如前图。句三自乘为朱幂，股四自乘为青幂，合朱、青得二十五，为弦五自乘幂，出上第一图。句股幂合为弦幂，明矣[5]。然二幂之数谓倒在于弦幂之中，而可更相表里。居里者成方幂，其居表者则成矩幂。二幂表里形诡而数均[6]。又按此图句幂之矩，朱卷居表，是其幂以股弦差为广，股弦并为袤，而股幂方其里。股幂之矩青卷居表，是其幂以句弦差为广，句弦并为袤，而句幂方其里。是故差之与并用除之，短长相乘也[7]。

［4］据围广、木长求葛之长，……，葛长为弦

"葛卷裹袤"，有似笔管缠青丝。每解一周，则成一小句股形；解毕遂成一大句股形(图 3)。即是木长为句(AC)，围之为股(BC)，葛长为弦(AB)。

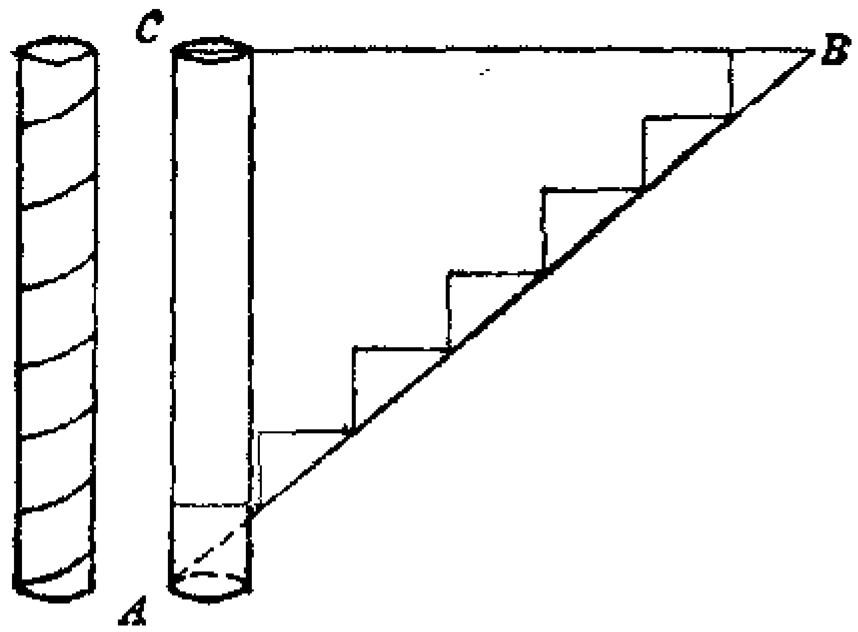


图 3

[5] 七周乘三尺是并合众句以为一句,……, 句股幂合为弦幂,明矣

如图 3,葛缠木七周,一围即一周三尺,以七周乘三尺得股为 $BC = 21$ 尺;木长为 $AC = 20$ 尺即句,按句股定理可得弦长为

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 29 \text{ 尺}。$$

即"句与股求弦"。

因木长二十尺,围广二十一尺;按句股本意"短面曰句,长面曰股"来说,术文"以七周乘三尺为股,木长为句,为之求弦"不误。但注文却说:"木长为股,围之为句,葛长为弦。七周乘三尺是并合众句以为一句,则句长而股短。故术以木长谓之句,围之谓之股,言之倒互。"显见两种说法不同,究竟何者较为正确,读者不无疑窦。

注文"则其间"至"出上第一图"一段,大典本及殿本为:"则其间葛青七弦周乘三围并合众句以为一句木长而股短术云木长谓之股言之倒句五与股求弦亦无围二十五青弦之自乘幂出上第一围。"戴震认为"讹舛不可通"。钱校本则依戴震校改。

一种可能是:戴震所校勘的文字未必符合刘徽的原意。另一种可能是: 在刘徽注解《九章算术》以前,术文误置句股,言之倒互;刘徽已将术文校正过来。但是,由于历史资料所限,究竟何种可能较为正确,很难稽考。如将这段注文改为"则其间葛长为弦,七周乘三尺为股,并合众句以为一句是为木长。故术云木长谓之

句，围之谓之股，为之求弦。句三股四求弦五。合朱、青二十五，为弦自乘幂，出上第一图”。则似较妥当。

戴震所校注文“七周乘三围”，于意欠通。根据术文今校改为“七周乘三尺”。

注文“合朱、青，二十五”的“合朱、青”下钱校本脱落一“得”字，此依戴震校补。

[6] 然二幂之数谓倒在于弦幂之中，……，二幂表里形诡而数均

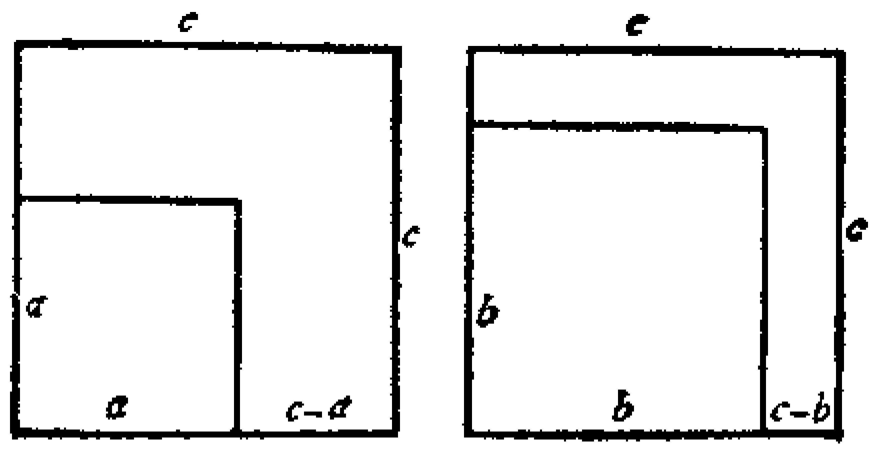


图 4

既然句、股二幂可合成弦幂，则可作等积变形，使句、股二幂“倒在于弦幂之中”，即一为方形，一为“矩”形，合成弦方形。如图4所示，方形居“里”，“矩”形居“表”。不拘句幂居里为方形，还是居表为矩形，其形虽然不同，面积却是相等。股幂也是如此。即注文：“形诡而数均”。

“矩幂”是磬折形的面积。由第十四问注文“股自乘为青幂之矩，令其矩引之直”可知，此处“矩幂”不作长方形面积解释。

[7] 又按此图句幂之矩，……，短长相乘也

若句幂为“矩”形、股幂为方形的面积，则“句幂之矩”可变为等积的长方形。广为股弦差，袤为股弦和(图5)。其面积为

$$(c-b)(c+b)=a^2。$$

若股幂为“矩”形、句幂为方形的面积，则“股幂之矩”可变为等积的长方形。广为句弦差，袤为句弦和(图6)。其面积为

$$(c-a)(c+a)=b^2。$$

若求差(股弦差或句弦差)以及求和(股弦和或句弦和)当用除

法。若求句幂、股幂，当用“短长相乘也”。即

$$c-b=\frac{a^2}{c+b},$$

$$c-a=\frac{b^2}{c+a};$$

$$c+b=\frac{a^2}{c-b},$$

$$c+a=\frac{b^2}{c-a}。$$

$$a^2=(c-b)(c+b),$$

$$b^2=(c-a)(c+a)。$$

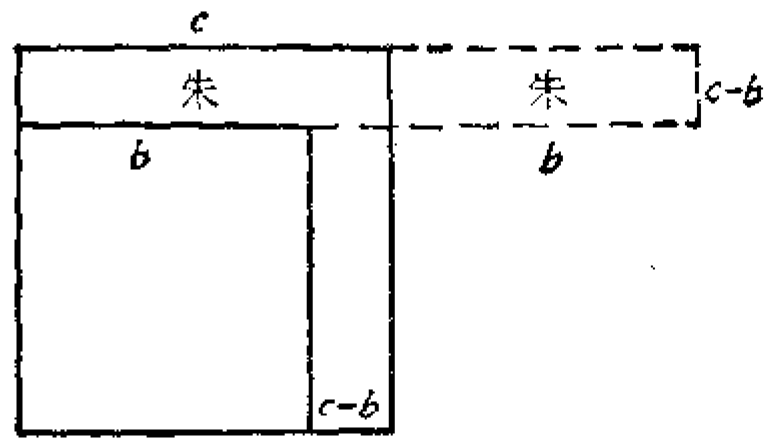


图 5

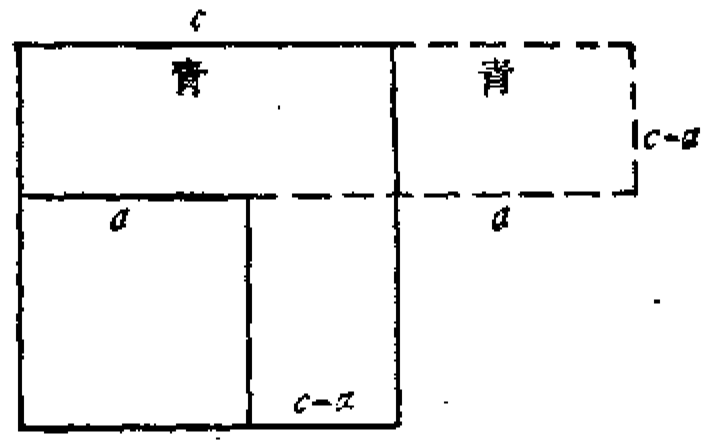


图 6

商功章刍童术注文有“上下广袤差相乘”及“上下广袤互相乘”两句。前者是两数相乘，后者是四数交叉相乘，据此可知“相乘”与“互相乘”含义不同。各本于“短长相乘也”一语中“长”字下衍一“互”字。今以意校删。

[六] 今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问水深、葭长各几何。

答曰：

水深一丈二尺；

葭长一丈三尺。

术曰：半池方自乘，此以池方半之，得五尺为句，水深为股，葭长为弦。以句及股弦差求股、弦。故令句自乘，先见矩幂也。以出水一尺自乘，减之，出水者，股弦差。减此差幂于矩幂则余之。余，倍出水除之，即得水深[8]。倍差为此幂之广，水深是股。令此幂得倍出水二尺为广，故得水深也[9]。加出水数，得葭长。臣淳风等谨按：此葭本出水一尺，既见水深，故加出水尺数而得葭长也。

[8] 术曰：半池方自乘，……，即得水深

设池方为 $2a$，水深为 b，葭长为 c（图 7），按术得：

$$水深：b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}=12,$$

$$葭长：c=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}+(c-b)=13。$$

注文“令句自乘，先见矩幂也”。即句幂为“矩”形面积：

$$a^2=(c-b)(c+b)。$$

注文“此差幂”即术文“出水一尺自乘”，也就是 $(c-b)^2$. “半池方自乘”就是“矩幂”，即 a^2（图 8）。“减此差幂于矩幂”显然是

$$a^2-(c-b)^2。$$

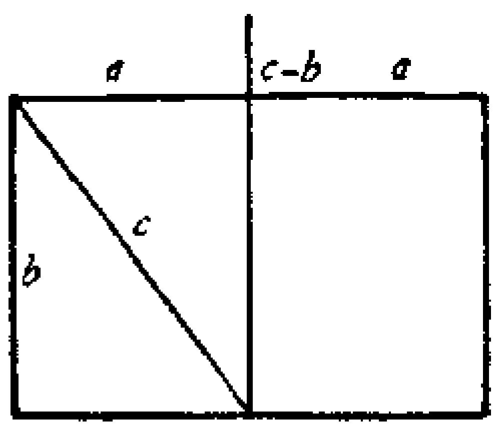


图 7

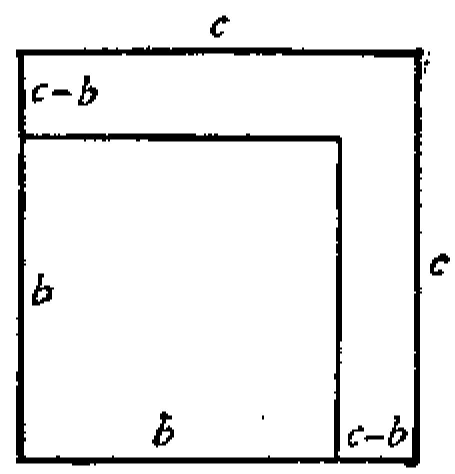


图 8

注文“减此差幂于矩幂则余之”，是解释术文“以出水一尺自乘，减之”。其中应是相减之余。但各本讹作“则除之”，可能“余”“除”二字形近而误。今为校正。

戴震校改“则除之”三字为“余为倍股弦差乘股长之矩幂”。即 $a^2-(c-b)^2=2(c-b)b$，虽然于理得通，由于添字过多，恐非刘注原意。正如钱校本说：“似非必要。”

[9] 倍差为此幂之广，水深是股。……故得水深也

“差”是出水一尺 $(c-b)$，“倍差”即 $2(c-b)$。“此幂”是股弦差幂与矩幂的差，即 $a^2-(c-b)^2$。如图 9 所示，“此幂”也可看作以“倍出水”为广、股为袤的长方形面积。因而“倍差为此幂之广，水深是股”。即“令此幂得倍出水二尺为广，故得水深也”。即

$$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}=12\text{ 尺。}$$

下面术文是“加出水数，得葭长”。即

$$c=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}+(c-b)=13\text{ 尺。}$$

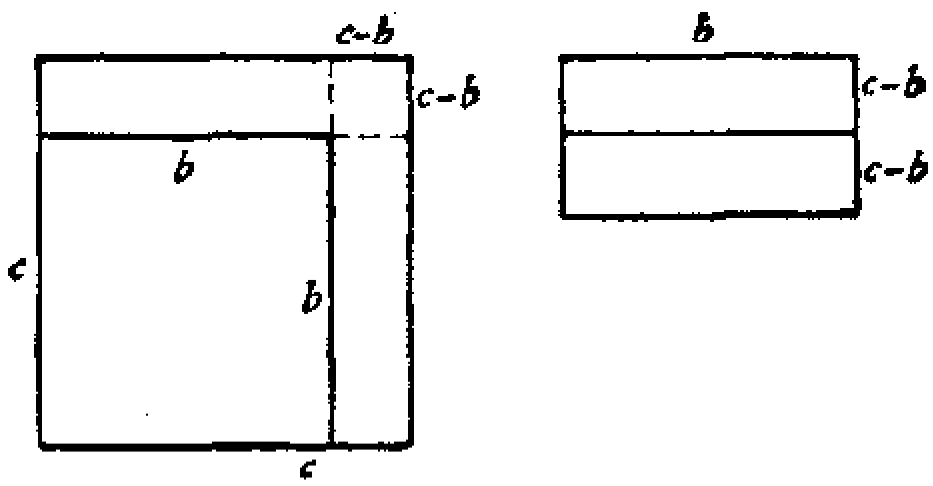


图 9

注文“差为矩幂之广，水深是股”是杨辉本、大典本、殿本的原文，戴震认为“此句有脱误”，故改为“倍差为矩幂之广”。“倍差”是 $2(c-b)$，“矩幂”则是 a^2，“倍差为矩幂之广”即是

$$a^2=2(c-b)\cdot\frac{(c+b)}{2},$$

其袤当为 $\frac{(c+b)}{2}$。可见以此注解术文不够恰当。正如钱校本说：“戴震校本于‘差’字上添一‘倍’字，是难以理解的。”因此，钱校本从杨辉本。但是“差为矩幂之广”，即 $a^2=(c-b)(c+b)$，与本问关系不大。钱校本的用意也是难以理解的。所以今校改为“倍差为此幂之广，水深是股”。或较合理。

注文“令此幂得倍出水二尺为广，故得水深也”。杨辉本、大典本、殿本为“令此幂得出水一尺为长，故为矩而得葭长也”。戴震以为“此二句有脱误。”改为“欲先见葭长者，出水一尺自乘，以加于半池方自乘尺数，倍出水除之，即得。令此幂得出水一尺为袤，故为矩而得葭长也”。戴震改动一字、增加二十九字，钱校本认为：“非杨辉本、大典本原文。刘注求水深不应有求葭长之法，显系蛇足。”戴校本添字过多，且前一句是求水深，后一句不当是求葭长之

法，恐不合刘注原意。钱校本的批评是正确的。可是钱校本改为“令此幂得倍出水二尺为广，故为矩而得水深也”。这虽然是求水深之法，而“为矩而得水深”是难以求得水深的，且“为矩”二字是使人难于理解的。因此，今以意校改。

［七］今有立木，系索其末，委地三尺。引索却行，去本八尺而索尽。问索长几何。

答曰：一丈二尺六分尺之一。

术曰：以去本自乘，此以去本八尺为句，所求索者弦也。引而索尽与“开门去阃”者句及股弦差求股弦同一术。去本自乘者，先张矩幂。令如委数而一，委地者，股弦差也。以除矩幂，即是股弦并也。所得，加委地数而半之，即索长[10]。子不可半者，倍其母，加差于并则成两索长，故又半之。其减差于并而半之，得木长也。

［10］术曰：以去本自乘，……，加委地数而半之，即索长

设 a, b, c 分别为句、股、弦。句自乘 (a^2) 所得的“矩”形面积，是以股弦差 $(c-b)$ 为广，股弦和 $(c+b)$ 为袤的长方形面积。即

$$a^2=(c-b)(c+b)。$$

因此乃有 $\dfrac{a^2}{c-b}=c+b$，即“去本自乘者，先张矩幂”。“委地者，股弦差也。以除矩幂，即是股弦并也”。

由“委地三尺。引索却行，去本八尺”可知，$c-b=3$尺，$a=8$尺。按术计算，可得索长 (c) 及木长 (b) 各为

$$c=\left[\frac{a^2}{c-b}+(c-b)\right]\div 2=12\frac{1}{6}\text{尺},$$

$$b=\left[\frac{a^2}{c-b}-(c-b)\right]\div 2=9\frac{1}{6}\text{尺}。$$

经文“却行”之“却”，是退。“却行”，即是“退行”。

［八］今有垣高一丈。倚木于垣，上与垣齐。引木却行一尺，其木至地。问木几何。

答曰：五丈五寸。

术曰：以垣高十尺自乘，如却行尺数而一，所得，以加却行尺数而半之，即木长数[11]。此以垣高一丈为句，所求倚木者为弦，引却行一尺为股弦差。其为术之意，与“系索”问同也。

［11］术曰：以垣高十尺自乘，……，即木长数

按“垣高一丈”，“却行一尺”可知 $a=10$ 尺，$c-b=1$ 尺。即注文“垣高一丈为句”，“却行一尺为股弦差”。仿前问算法，乃得木长（c）为

$$c=\left[\frac{a^2}{c-b}+(c-b)\right]\div 2=50\frac{1}{2}\text{尺}=5\text{丈}5\text{寸。}$$

［九］今有圆材，埋在壁中，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问径几何。

答曰：材径二尺六寸。

术曰：半锯道自乘，此术以锯道一尺为句，材径为弦，锯深一寸为股弦差之一半，故锯长亦半之也。　臣淳风等谨按：下锯深得一寸为半股弦差，注云为股弦差者锯道也。如深寸而一，以深寸增之，即材径[12]。亦以半增之。如上术去本当半之，今此皆同半，差不复半也。

［12］术曰：半锯道自乘，如深寸而一，以深寸增之，即材径

如图 10，设锯道 AB 为句，材径 BE 为弦，锯深 CD 为股弦差之半。

按术计算，得 $BE=\dfrac{\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}{CD}+CD$

或

$$c=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{c-b}{2}}+\frac{c-b}{2}=26\text{ 寸。}$$

李淳风注文“注云为股弦差者锯道也”。戴震说：“舛误不可通。”钱校本说：“李淳风注文字必有错误。因不知原意所在，无可校改”。据此，李之此注，无法注释。

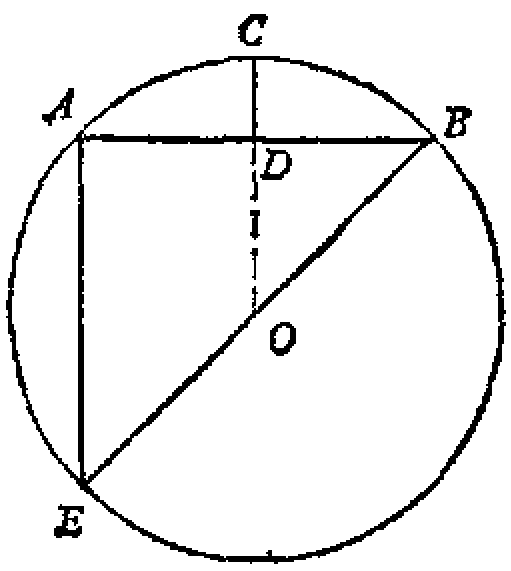


图 10

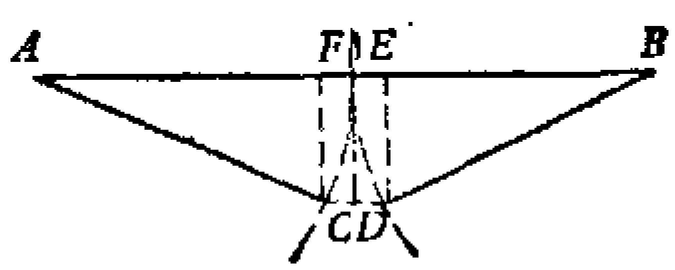


图 11

[一〇] 今有开门去阃一尺，不合二寸。问门广几何。

答曰：一丈一寸。

术曰：以去阃一尺自乘，所得，以不合二寸半之而一，所得，增不合之半，即得门广[13]。此去阃一尺为句，半门广为弦，不合二寸，以半之得一寸为股弦差，求弦。故当半之。今即以两弦为广数，故不复半之也。

[13] 术曰：以去阃一尺自乘，……，即得门广

如图 11，设门广为 AB，“不合”之半为 CD，“去阃”为 DE。若以“去阃”（DE）为句，显见“不合”之半（CD）为股弦差；半门广为弦，门广则相当于倍弦。按术计算，得门广为

$$AB=\frac{DE^2}{CD}+CD=101\text{ 寸。}$$

[一一] 今有户高多于广六尺八寸，两隅相去适一丈。门户高、广各几何。

答曰：

广二尺八寸；

高九尺六寸。

术曰：令一丈自乘为实。半相多，令自乘，倍之，减实，半其余。以开方除之，所得，减相多之半，即户广。加相多之半，即户高[14]。 令户广为句，高为股，两隅相去一丈为弦，高多于广六尺八寸为句股差。按图为位，弦幂适满万寸。倍之，减句股差幂。开方除之，其所得即高广并数。以差减并而半之即户广，加相多之数即户高也[15]。今此术先求其半。一丈自乘为朱幂四，黄幂一。半差自乘，又倍之，为黄幂四分之二。减实，半其余，有朱幂二，黄幂四分之一。其于大方得四分之一。故开方除之，得高广并数之半。减半差得广，加得户高[16]。又按此图幂，句股并自乘，加差幂，为两弦幂。半之，开方得弦。今倍弦幂减差幂，求句股并，盖先见其弦，然后知其句与股也[17]。句股适等者，并而自乘，即为两弦幂。皆各为方，先见其弦然后知其句与股者，倍弦幂即为句股适等者并而自乘之幂。半相多自乘倍之，又半句股并自乘亦倍之，合为弦幂。其无差数者，句股各自乘，并之为实，与句股相乘倍之为实，皆开方得弦。弦幂半之为实，开方即得句、股。及股长句短，同源而分流焉[18]。假令句股各五，弦幂五十。开方除之得七，有余一不尽。假令弦十，其幂有百，半之为句、股二幂，各得五十，当亦不可开。故曰圆三径一，方五斜七，虽不正得尽理，亦可言相近耳[19]。其句股合而自乘之幂，令弦自乘倍之为两弦幂以减之。其余，开方除之，为句股差。加差于合而半之为股，减差于合而半之为句[20]。句股弦即高广衺。其出此图也，其倍弦为广衺合，句自乘为幂，得广即股弦差[21]。其矩句之幂，倍股为从法，开之亦股弦差[22]。以句股差幂减弦幂，半其余，差为从法，开方除之，即句也[23]。

[14] 术曰：令一丈自乘为实。……，即户高

如图 12，设户广为句 (a)，户高为股 (b)，两隅相去为弦 (c)。其“相多”即是句股差 ($b-a$)。由经文可知 $b-a=68$，$c=100$。按术则得

$$a=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}-\frac{(b-a)}{2}=28,$$

$$b=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}+\frac{(b-a)}{2}=96。$$

[15] 令户广为句，……，加相多之数即户高也

设户广为句 (a)，户高为股 (b)，两隅相去为弦 (c)。按注文演算，则得

$$a=\frac{\sqrt{2c^2-(b-a)^2}-(b-a)}{2},$$

$$b=\frac{\sqrt{2c^2-(b-a)^2}+(b-a)}{2}。$$

这是刘徽提出的算法，与术文所论的算法，不尽相同。

[16] 今此术先求其半。……，减半差得广，加得户高

“今此术先求其半”就是说此术先求户高与户广和的一半，然后即“减半差得广。加得户高”。

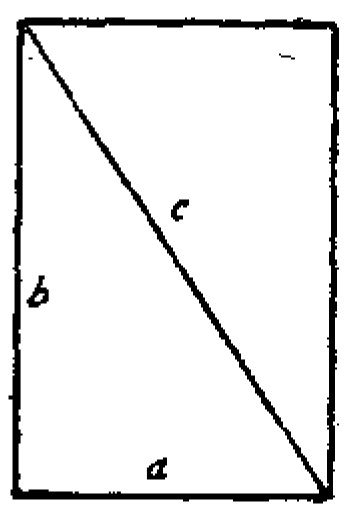


图 12

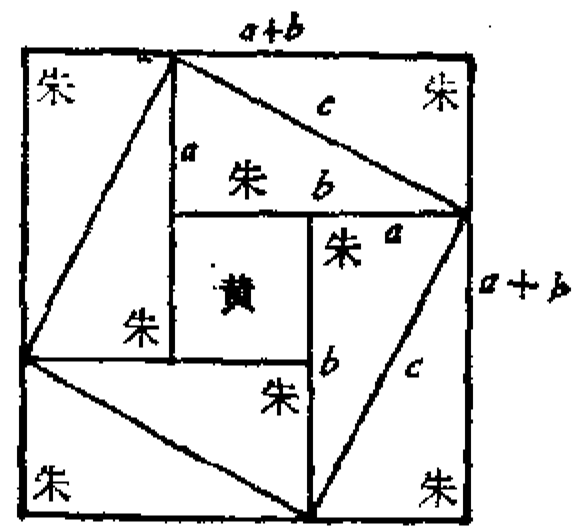


图 13

刘徽用图证明术文，因其图早已亡佚，今按戴震所补的图注释如下(图 13)：

“一丈自乘为朱幂四、黄幂一”。即是弦方面积 c^2。“半差自乘，又倍之，为黄幂四分之二”。即 $2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$。“减实，半其余，有朱幂二，黄幂四分之一”。即 $\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}$。就是弦方外大正方形面积的四分之一。故注文说：“其于大方得四分之一。”开方得

$$\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}=\frac{a+b}{2},$$

即“高广并数之半”。于是“减半差得广，加得户高”。即

$$a=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}-\frac{(b-a)}{2},$$

$$b=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}}+\frac{(b-a)}{2}。$$

[17] 又按此图幂，……，然后知其句与股也

这是用图形(图 13)证明前段刘注所说的算法。按图可得

$$(a+b)^2+(b-a)^2=2c^2,$$

或

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2+(b-a)^2}{2}}=c。$$

即“句股并自乘，加差幂，为两弦幂。半之，开方得弦”。如果已知弦长，则可“倍弦幂减差幂，求句股并”。即是由 $2c^2-(b-a)^2=(a+b)^2$ 得 $\sqrt{2c^2-(b-a)^2}=a+b$。然后可得：

$$a=\frac{\sqrt{2c^2-(b-a)^2}-(b-a)}{2},$$

$$b=\frac{\sqrt{2c^2-(b-a)^2}+(b-a)}{2}。$$

[18] 句股适等者，……，同源而分流焉

若句、股适等，即 $a=b$，则有 $(a+b)^2=4a^2=2c^2$。即“两弦幂”。

若已知句、股适等及其弦长；可按 $2c^2=(a+b)^2=(2a)^2=(2b)^2$，由弦幂求得其句与股。即“倍弦幂即为句股适等者并而自乘之幂”。

若已知句、股差及其和，也可求得其弦幂。即“半相多自乘倍

之，又半句股并自乘亦倍之，合为弦幂”。即

$$2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+2\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=c^2。$$

“其无差数者”即句股适等或其差为零；可由 $\sqrt{a^2+b^2}=c$ 求得其弦。也可由 $\sqrt{2ab}=c$ 求得其弦。即“句股各自乘，并之为实，与句股相乘倍之为实，皆开方得弦”。

已知弦长，又知句、股适等，可由 $\sqrt{\frac{c^2}{2}}=a=b$ 求得句、股。

以上所述，是句股定理的特殊情形。这些情形与句股定理本身乃是“同源而分流焉”。

[19] 假令句股各五，……，亦可言相近耳

若句、股各等于五，即 $a=b=5$，则 $c^2=50$，求得弦长为：

$$c=\sqrt{50}=7\cdots\cdots1,$$

即“得七，有余一不尽”。若 $c=10$，则 $c^2=100$，故 $\frac{c^2}{2}=a^2=b^2=50$。即“句、股二幂，各得五十，当亦不可开”。

“圆三径一”，即是圆周为三时，其直径约等于一。“方五斜七”，即正方形的一边为五时，其对角线约等于七。刘徽指出这些都是近似值。

注文“开方除之得七”下，各本衍一“尺”字。今删。

[20] 其句股合而自乘之幂，……，减差于合而半之为句

前注文是由句股差及弦推求句与股的方法。

这段注文是由句股和及弦推求句与股的方法。其大意为：由于 $\sqrt{2c^2-(a+b)^2}=b-a$，故得

$$\frac{(a+b)+\sqrt{2c^2-(a+b)^2}}{2}=b,$$

$$\frac{(a+b)-\sqrt{2c^2-(a+b)^2}}{2}=a。$$

[21] 句股弦即高广袤。……，得广即股弦差

由图 12 可知，句股弦即是户的高广袤。

于弦方图(图 14）中，若方形面积为股幂，“矩”形面积为句幂。而“句幂之矩”，可变为等积的长方形，其广为股弦差 $(c-b)$，其袤为股弦和 $(c+b)$。因此，“倍弦为广袤合”。即

$$2c=(c-b)+(c+b)。$$

又因 $a^2=(c+b)(c-b)$，故知“句自乘为幂”除以袤便“得广即股弦差”。

$$\frac{a^2}{c+b}=c-b。$$

大典本注文为“其倍弦为广袤合”，又是赵爽注《周髀算经》的成语。但钱校本改为“其倍弦为广袤合”，使人费解。今从大典本。

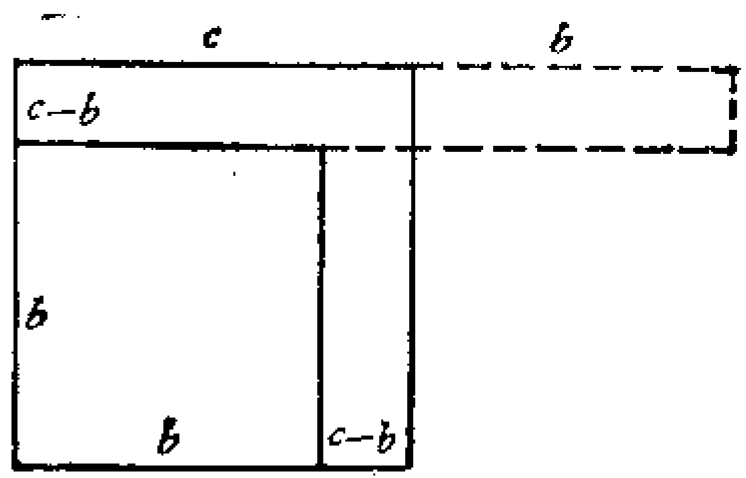


图 14

[22] 其矩句之幂，……，开之亦股弦差

这是以一元二次方程求股弦差的方法。

古代称二次方程常数项为“实”，即注文“矩句之幂 (a^2)”；称一次项系数为“从法”，即“倍股为从法 $(2b)$”；称首项系数为“方法”，一般取之为一。

设股弦差为 x，按注乃有 $x^2+2bx=a^2$。
解之得：$x=c-b$。这就是说，若已知句与股，可以求得股弦差。

刘徽可能分割“矩句之幂”为一正方形与两长方形的面积和，从而导出上述方程。

如图 15，正方形面积为 x^2，两长方形面积为 $2bx$，其面积的和则为句幂，即 a^2。故得 $x^2+2bx=a^2$。

[23] 以句股差幂减弦幂，……，开方除之即句也

这是以二次方程求句的方法。

设句为 x，常数项为 $\frac{c^2-(b-a)^2}{2}=ab$，即“句股差幂减弦

幂，半其余”。一次项系数为 $(b-a)$，即“差为从法”。得

$$x^2+(b-a)x=ab$$

或

$$x^2+(b-a)x=\frac{c^2-(b-a)^2}{2}。$$

今按戴震所补的图（图 16）验证上述方程：由弦幂减去句股

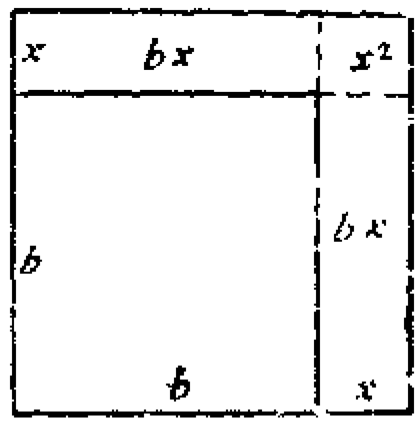


图 15

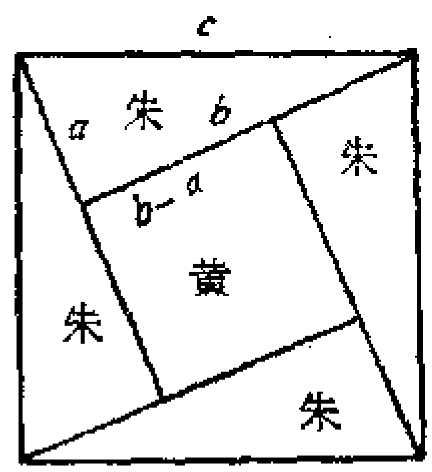


图 16

差幂 $(c^2-(b-a)^2)$ 为四朱幂，取其一半即二朱幂，等于句股乘积。即 $\frac{c^2-(b-a)^2}{2}=ab$。若设句为 x，句股乘积可看作 x^2 及 $(b-a)x$ 二幂之和。故得上述方程。

［一二］今有户不知高广，竿不知长短。横之不出四尺，从之不出二尺，邪之适出。问户高、广、袤各几何。

答曰：

广六尺，

高八尺，

袤一丈。

术曰：从、横不出相乘，倍而开方除之。所得加从不出即户广，此以户广为句，户高为股，户袤为弦。凡句股幂之在弦幂，或矩于表，或方于里。弦幂者举表矩而连之。又从句方里令为青矩之表，未满黄方。满此方则两矩之端重于隅中，各以股弦差为广，句弦差为袤。故两差相乘，又倍之，则成黄方之幂。开方除之，得黄方之面。其外之青矩亦以股弦

差为广，故以股弦差加之，则为句也[24]。加横不出即户高，两不出加之，得户袤。

[24] 此以户广为句，……，故以股弦差加之，则为句也

由第五问注文可知，句幂与股幂合成弦幂；或居于表成"矩"形面积，或居于里成方形面积。如图17所示，户广之句自乘(a^2)为方幂也可为"矩"幂，户高之股自乘(b^2)为"矩"幂也可为方幂。即"或矩于表，或方于里"。

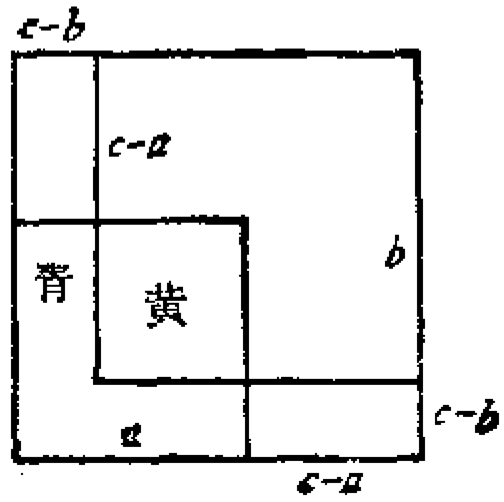


图 17

句方幂之内的"矩"形句幂，刘注称为"青矩之表"。由句方幂减去"青矩之表"，所余称为"黄方"。"黄方"就是句方幂与股方幂的重合部分。也是"矩"形句幂与"矩"形股幂的重合部分。即"两矩之端重于隅中"。这两部分的面积和显然等于黄方面积。即 $2(c-b)(c-a)$。即注文所说："各以股弦差为广，句弦差为袤。故两差相乘，又倍之，则成黄方之幂。"

从另一方面分析，黄方面积又可表示为 $(a+b-c)^2$，故知：

$$2(c-b)(c-a)=(a+b-c)^2。$$

"开方除之，得黄方之面"。即 $\sqrt{2(c-b)(c-a)}=a+b-c$，于是：$\sqrt{2(c-b)(c-a)}+(c-b)=a$，即"其外之青矩亦以股弦差为广，故以股弦差加之，则为句也"。仿此可得

$$\sqrt{2(c-b)(c-a)}+(c-a)=b,$$

$$\sqrt{2(c-b)(c-a)}+(c-b)+(c-a)=c。$$

也就是术文所说："加横不出即户高，两不出加之，得户袤。"

注文"弦幂者举表矩而连之"，不误。钱校本为"连之者举表

---

* 本注曾参考梅荣照：刘徽的勾股理论，科学史集刊，第11期。

矩而连之"，似欠通顺。今校改。又"两矩之端重于隅中"，钱校本为"两端之矩"。戴校本为"两端之廉"。皆欠通顺。今校改。

[一三] 今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺。问折者高几何。

答曰：四尺二十分尺之十一。

术曰：以去本自乘，此去本三尺为句，折之余高为股，末折抵地为弦。以句及股弦并求股，故先令句自乘见矩幂。令如高而一，竹高一丈为股弦并，以除此幂得差。所得，以减竹高而半其余，即折者之高也[25]。此术与"系索"者之类，更相反覆也。亦可如上术，令高自乘为股弦并幂，去本自乘为矩幂，减之，余为实，倍高为法，则得折之高数也[26]。

[25] 以去本自乘，……，即折者之高也

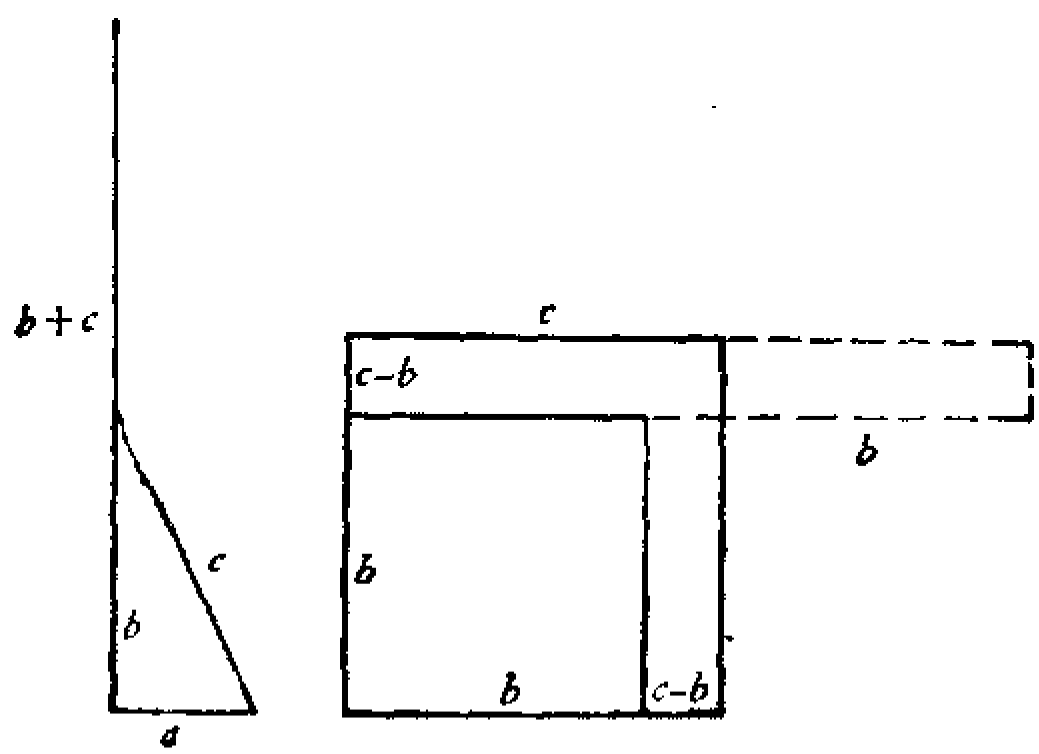


图 18

设去本为句 (a)，竹高为股弦和 $(c+b)$。按术计算，得折高为

$$b=\frac{1}{2}\left[(c+b)-\frac{a^2}{c+b}\right]。$$

注文是论证此术的计算方法。如图 18，a^2 是"矩"幂，即 $a^2=(c-b)(c+b)$。注文说："竹高一丈为股弦并，以除此幂得差"，即是 $\frac{a^2}{c+b}=c-b$，其中"差"就是股弦差 $(c-b)$。故得"折

者之高（b）”为

$$\frac{(c+b)-(c-b)}{2}=b$$

或

$$\frac{(c+b)-\dfrac{a^2}{c+b}}{2}=b。$$

[26] 此术与“系索”者之类，……，则得折之高数也

第七问是以句幂及股弦差推求其弦。即

$$\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{c-b}+(c-b)\right]$$
$$=\frac{1}{2}[(c+b)+(c-b)]=c。$$

本问是以句幂及股弦和推求其股的方法。即

$$\frac{1}{2}\left[(c+b)-\frac{a^2}{c+b}\right]$$
$$=\frac{1}{2}[(c+b)-(c-b)]=b。$$

因与第七问运算相反，故称“此术与‘系索’者之类，更相反覆也”。

刘徽提出了另一种算法，即 $b=\dfrac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}$。

如图19，于“股弦并幂”减去“矩幂”，余为股幂二与二倍股弦乘积的和，即 $(c+b)^2-a^2=2b^2+2bc$，除以“倍高”即得“折之高数”为

$$b=\frac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}。$$

[一四] 今有二人同所立。甲行率七，乙行率三。乙东行。甲南行十步而邪东北与乙会。问甲乙行各几何。

答曰：

乙东行一十步半；

甲邪行一十四步半及之。

术曰：令七自乘，三亦自乘，并而半之，以为甲邪行率。邪行率减于七自乘，余为南行率。以三乘七为乙东行率[27]。此以南行为句，东行为股，邪行为弦。股率三，句弦并率七，欲知弦率者，当以股自乘为幂，如并而一，所得为句弦差。加差于并而半之为弦，以弦减差，余为句。如是或有分，当通而约之乃定。术以句弦并率为分母[28]。故令句弦并自乘为朱、黄相连之方。股自乘为青幂之矩，令其矩引之直，加损同之，以句弦并为袤，差为广。其图大体，以两弦为袤，句弦并为广。引横断其半为弦率，七自乘者句弦并之率，故弦率减之余为句率。同立处，是中停也。列用率皆句弦并为袤，弦与句各为之广，故亦以股率同其袤也[29]。置南行十步，以甲邪行率乘之，副置十步，以乙东行率乘之，各自为实。实如南行率而一，各得行数。南行十步者，所有见句求弦股，以弦、股率乘，如句率而一。

[27] 术曰：令七自乘，……，以三乘七为乙东行率

如图 20，设甲、乙二人同立处为 C，同会处为 A；以 b 为乙东

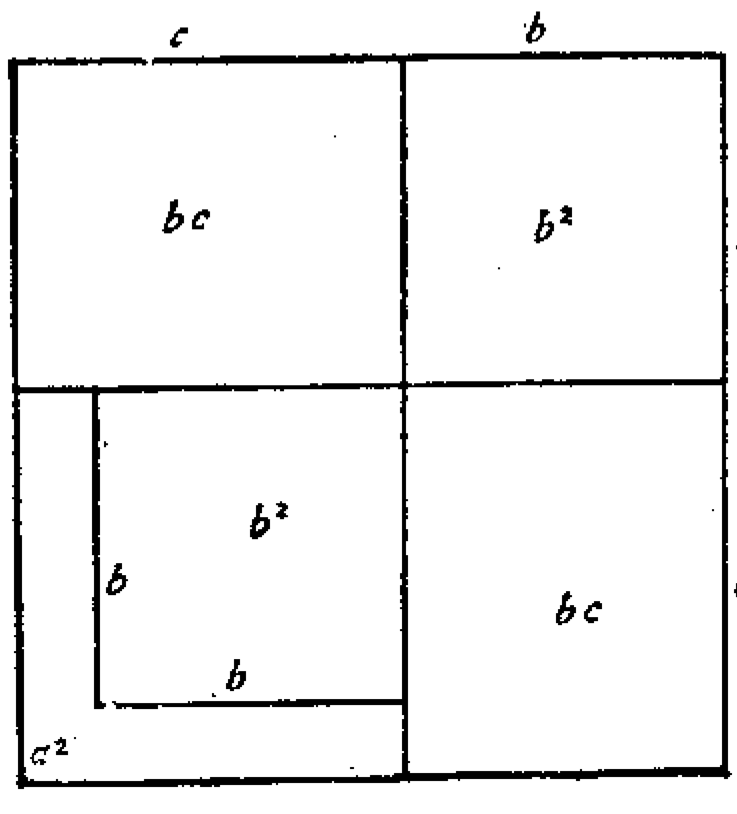


图 19

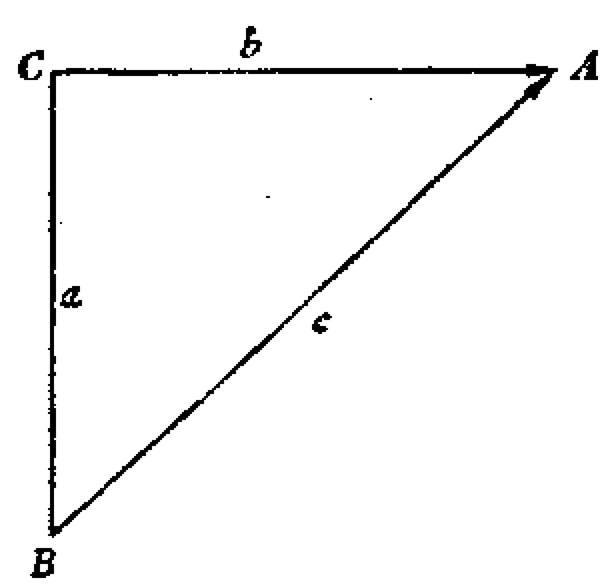


图 20

行，a 为甲南行，c 为邪行。因“甲行率七 (m)，乙行率三 (n)”。故知 $b:(a+c)=n:m=3:7$，或 $(a+c):b=m:n=7:3$。

按术可知，南、东、邪行的比率，就是句股形的句、股、弦三边的比率。即

$$a:b:c=\left(m^2-\frac{n^2+m^2}{2}\right):(nm):\left(\frac{n^2+m^2}{2}\right)$$

$$=\left(7^2-\frac{3^2+7^2}{2}\right):(3\times 7):\left(\frac{3^2+7^2}{2}\right)$$

$$=20:21:29。$$

[28] 此以南行为句，……，术以句弦并率为分母

设南行 a，东行 b，邪行 c 分别为句、股、弦，今按刘注推算三者的比率。

因"以股自乘为幂，如并而一，所得为句弦差。加差于并而半之为弦，以弦减差，余为句"。故有

$$c-a=\frac{b^2}{c+a}=\frac{k^2n^2}{km}=\frac{k}{m}\cdot n^2,$$

及

$$c=\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+(c+a)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{k^2n^2}{km}+km\right]=\frac{k}{m}\left[\frac{n^2+m^2}{2}\right],$$

$$a=c-(c-a)=\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+(c+a)\right]$$

$$-\frac{b^2}{c+a}=\frac{1}{2}\left[\frac{k^2n^2}{km}+km\right]$$

$$-\frac{k^2n^2}{km}=\frac{k}{m}\left[\frac{n^2+m^2}{2}-n^2\right]$$

其比率为

$$a:b:c=\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+(c+a)\right]-\frac{b^2}{c+a}\right\}:b:$$

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+(c+a)\right]\right\}=\frac{k}{m}\left[\frac{n^2+m^2}{2}\right.$$

$$\left.-n^2\right]:kn:\frac{k}{m}\left[\frac{n^2+m^2}{2}\right]。$$

句、股、弦的比率必然出现分数，应当通分约简以求其比率，于是注文说："以句弦并率为分母"。即

$$a:b:c=\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+\frac{(c+a)^2}{c+a}\right]-\frac{b^2}{c+a}\right\}$$

$$:\frac{b(c+a)}{c+a}:\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+\frac{(c+a)^2}{c+a}\right]\right\}$$

$$=\left[(c+a)^2-\frac{b^2+(c+a)^2}{2}\right]:b(c+a)$$

$$:\left[\frac{b^2+(c+a)^2}{2}\right]=\left[m^2-\frac{n^2+m^2}{2}\right]$$

$$:nm:\left[\frac{n^2+m^2}{2}\right]=\left[7^2-\frac{3^2+7^2}{2}\right]$$

$$:(3\times 7):\left[\frac{3^2+7^2}{2}\right]=20:21:29。$$

其中 $m^2-\frac{n^2+m^2}{2}$, nm, $\frac{n^2+m^2}{2}$ 即现今所谓句股数。

[29]* 故令句弦并自乘……，故亦以股率同其衰也

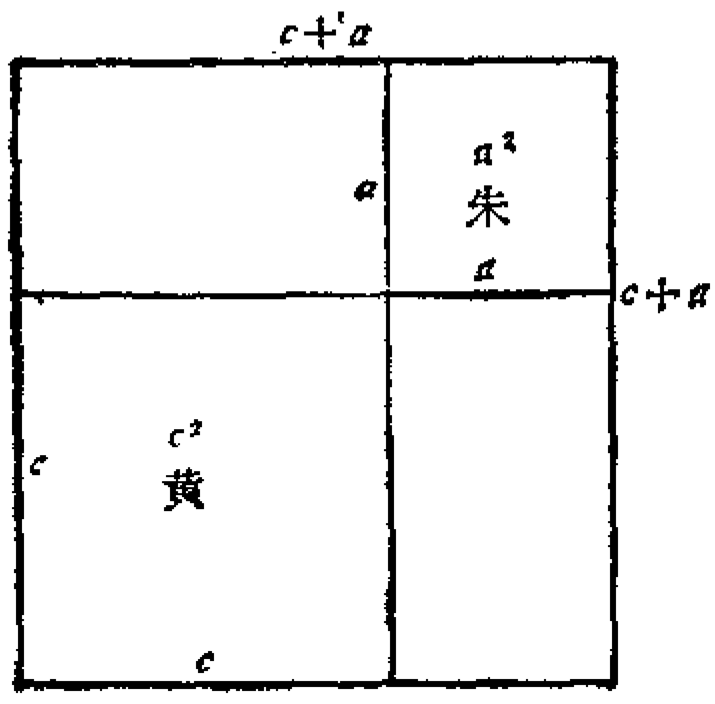


图 21

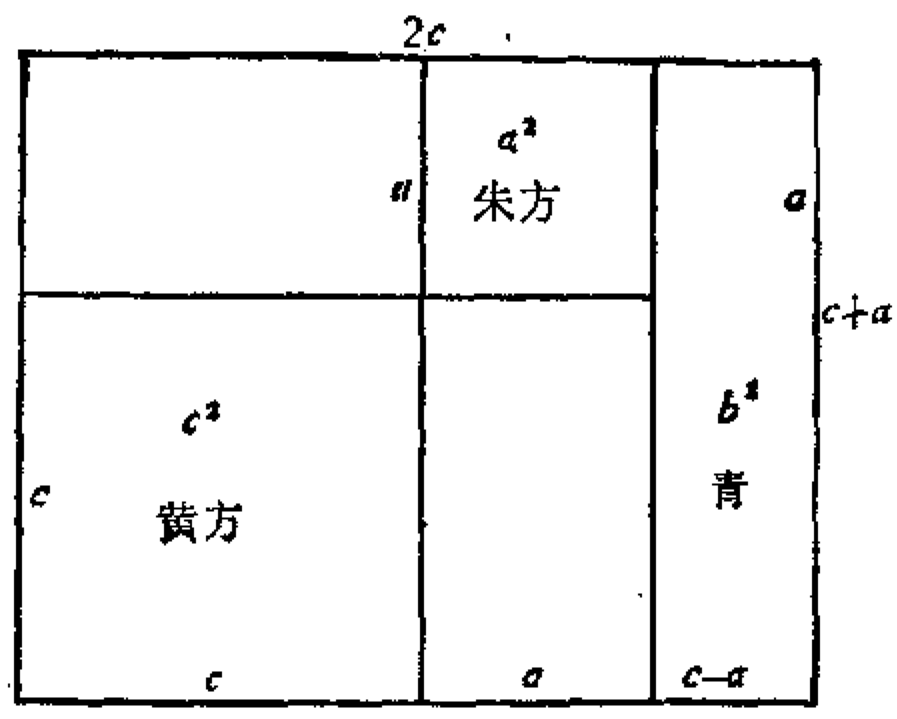


图 22

刘徽利用图形证明句、股、弦三者的比率。

以句弦和 $(c+a)$ 为边作一正方形，称句幂 (a^2) 为"朱方"，

* 本注曾参考梅荣照：刘徽的勾股理论，科学史集刊，第11期。

弦幂 (c^2) 为"黄方"。即"句弦并自乘为朱、黄相连之方"。 如图 21。

又因句幂、股幂可合成弦幂。故有居于表的"矩"形股幂。今变此"矩"形为等积的长方形,使其长为句弦和 $(c+a)$,宽为句弦差 $(c-a)$。将此形与上述正方形合成一大长方形。即"股自乘为青幂之矩,令其矩引之直,加损同之,以句弦并为袤,差为广。其图大体,以两弦为袤,句弦并为广"。如图 22。其面积为

$$(c+a)(c-a)+(c+a)^2=2c(c+a)。$$

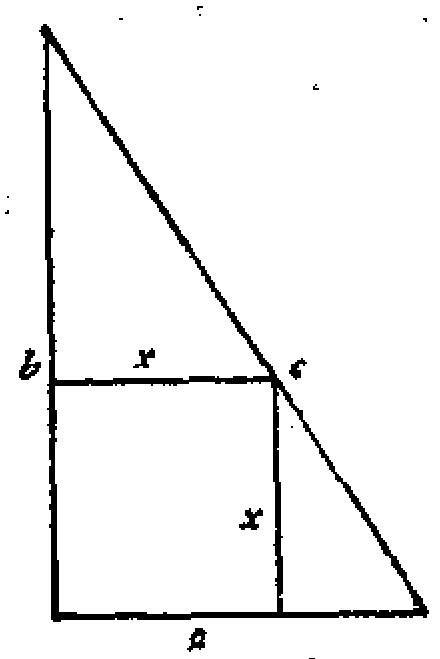


图 23

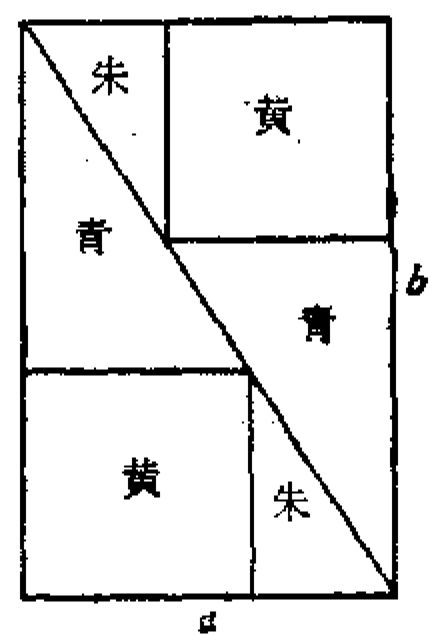


图 24

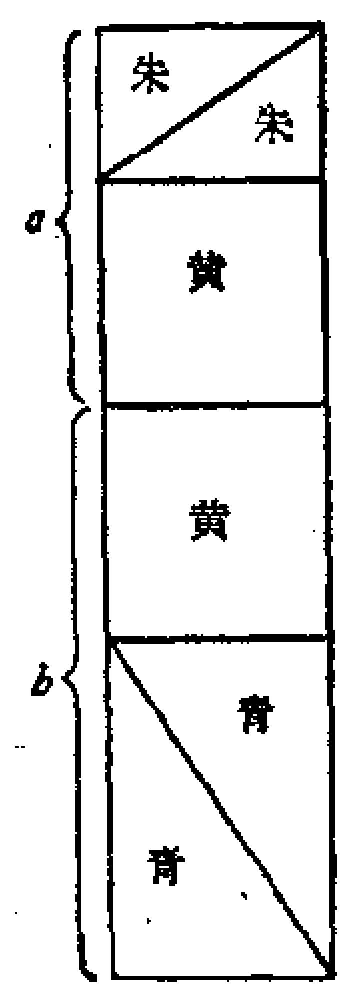


图 25

中分大长方形,则得长为 $c+a$,宽为 c 的长方形。其面积为 $c(c+a)$ 称为"弦率"。 以 $(c+a)$ 为边的正方形面积 $(c+a)^2$ 称为"句弦并率"。上述两形之差,即是以 a,$(c+a)$ 为边的长方形,其面积 $(c+a)^2-c(c+a)=a(c+a)$,称为"句率"。

由上文可知,"弦率"、"句弦并率"、"句率"是分别以 c,$(c+a)$,a 为宽,都以 $(c+a)$ 为长的长方形面积。故知所求"股率"当是以 b 为宽,以 $(c+a)$ 为长的长方形面积。即"亦为股率同其袤也"。据此可得"句率"、"股率"、"弦率"之比为

$$a:b:c=[(c+a)^2-c(c+a)]:b(c+a):c(c+a)$$

$$= \left[(c+a)^2 - \frac{b^2+(c+a)^2}{2}\right] : b(c+a)$$

$$: \left[\frac{b^2+(c+a)^2}{2}\right] = k\left[m^2 - \frac{n^2+m^2}{2}\right]$$

$$: knm : k\left[\frac{n^2+m^2}{2}\right] = \left[m^2 - \frac{n^2+m^2}{2}\right]$$

$$: nm : \left[\frac{n^2+m^2}{2}\right] = \left[7^2 - \frac{3^2+7^2}{2}\right]$$

$$: (3\times 7) : \left[\frac{3^2+7^2}{2}\right] = 20:21:29。$$

注文"同立处"是指甲、乙二人"同所立"的地方。如图 20，即句股形的直角顶点。"中停"即是现今所谓"位似中心"。"同立处，是中停也"就是说，以直角顶作为位似中心，可方便地得到与之相似的句股形。第二十一问注文"半邑者，谓从邑心中停也"。即是以邑心作为位似中心。

注文"故弦率减之余为句率"不误，其中"弦"字下各版本脱落一"率"字。今校补。

[一五] 今有句五步，股十二步。问句中容方几何。

答曰：方三步十七分步之九。

术曰：并句、股为法，句股相乘为实，实如法而一，得方一步[30]。句股相乘为朱、青、黄幂各二。今黄幂连于下隅，朱、青各以类合，共成脩幂。中方黄为广，并句股为袤。故并句股为法。幂图方在句中，则方之两廉各自成小句股，而其相与之势不失本率也。股面之小句股，并为股。令股为中方率，并句股为率，据见句五步而今有之，得中方也。复令句为中方率，以并句股为率，据股十二步而今有之，则中方又可知[31]。此则虽不效，而法实有由生矣。下容圆术以今有衰分言之，可以见之也。

[30] 术曰：并句、股为法，句股相乘为实，实如法而一，得方一步

如图 23，设句为 a，股为 b；按术则得"句中容方"的一边 x 为

$$x=\frac{ab}{a+b}。$$

刘徽注文是以图形论证这一算法（图 24）：以 a，b 为边作一长方形，分割此为两句股形。其中容方为黄，两端小句股形各为朱、青。显见此长方形面积 ab 为"朱、青、黄幂各二"。再将此形变为等积的以"中方黄为广、并句股为袤"的长方形（图 25）。因其面积为 ab，故得"黄方"一边为 $x=\frac{ab}{a+b}$。

[31] 幂图方在句中，……，则中方又可知

"幂图"就是上注"朱、青、黄幂各二"的图（图 24）。

由于黄方容于句中，黄方两旁各有小句股形。显见股面小句股形的小句、小股之和以及句面的小句股形的小句、小股之和分别等于原句股形的股与句（图 26）。

黄方两旁的小句股形与原句股形是相似形，这一句股形两边之比与他一句股形两对应边之比相等，故注文说："其相与之势不

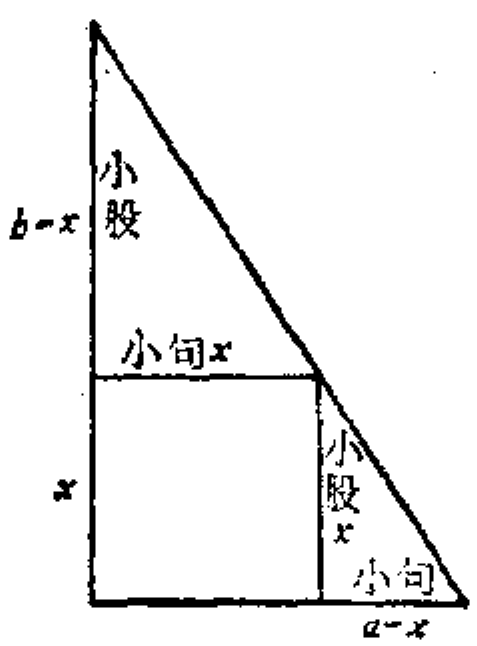


图 26

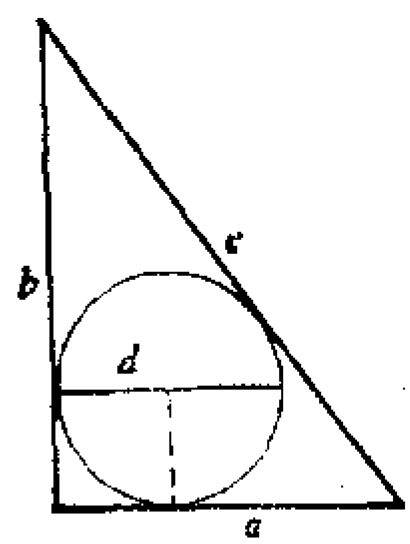


图 27

失本率也。"又因"股面之小句股，并为股"。即

$$(b-x)+x=b。$$

于是得：$(a+b):[(b-x)+x]=a:x$

或 $(a+b):b=a:x$，

得 $$x=\frac{ab}{a+b}=3\frac{9}{17}。$$

仿此可得 $(a+b):[(a-x)+x]=b:x$

或 $(a+b):a=b:x,$

也得 $$x=\frac{ab}{a+b}=3\frac{9}{17}。$$

[一六] 今有句八步,股十五步。问句中容圆径几何。

答曰:六步。

术曰:八步为句,十五步为股,为之求弦。三位并之为法,以句乘股,倍之为实。实如法得径一步[32]。

句股相乘为图之本体,朱青黄幂各二,倍之则为各四。可用画于小纸,分裁邪正之会,令颠倒相补,各以类合,成脩幂。圆径为广,并句股弦为袤。故并句股弦以为法。又以图之大体言之,股中青必合立规于横广句股又邪三径均,而复连规从横量度句股,必合而成小方矣[33]。又画中弦以观其会,则句股之面中央各有小句股弦。句面之小股、股面之小句皆小方之面、皆圆径之半。其数故可衰。以句股弦为列衰,副并为法。以句乘未并者各自为实。实如法而一,则句面之小股可知也。以股乘列衰为实,则股面之小句可知。言虽异矣,及其所以成法实则同归矣[34]。又可以股弦差减句为圆径。句弦差减股为圆径。又弦减句股并,余为圆径。以句弦差乘股弦差而倍之,开方除之,亦圆径也[35]。

[32] 术曰:八步为句,……,实如法得径一步

如图27,设句、股、弦分别为 a, b, c,句中容圆的直径为 d。按术计算,得:

$$d=\frac{2ab}{a+b+c}。$$

刘徽注文是以图形论证这一算法。

过句股形的内心,向各边作垂线,分割此形为三部分,分别称为朱、青、黄幂。以句、股为边的长方形,有"朱青黄幂各二,倍之则为各四(图28)"。刘徽使用割补术,变此形为等积的长方形,其长为句股弦之和 $(a+b+c)$,宽为圆径 (d)(图29)。因其面积为

$2ab$，除以长$(a+b+c)$，则得图径。即

$$d=\frac{2ab}{a+b+c}。$$

[33] 又以图之大体言之，……必合而成小方矣

钱校本说："'又以圆之大体言之'至'而成小方矣'四十二字残缺错误，意义难通"。于是钱校本"悉仍其旧"。

这段注文是刘徽用图形补充上论的不足。因其图早已散失，今补图(图30)试释并校正如下：

就整个图形而论，刘徽把句股形分为朱、青、黄三部分，而股中之青需位于与句、股、弦等距离之处。即是圆心应位于与三边等距离之处。即"股中青必合立规于横广句股又邪三径均"。

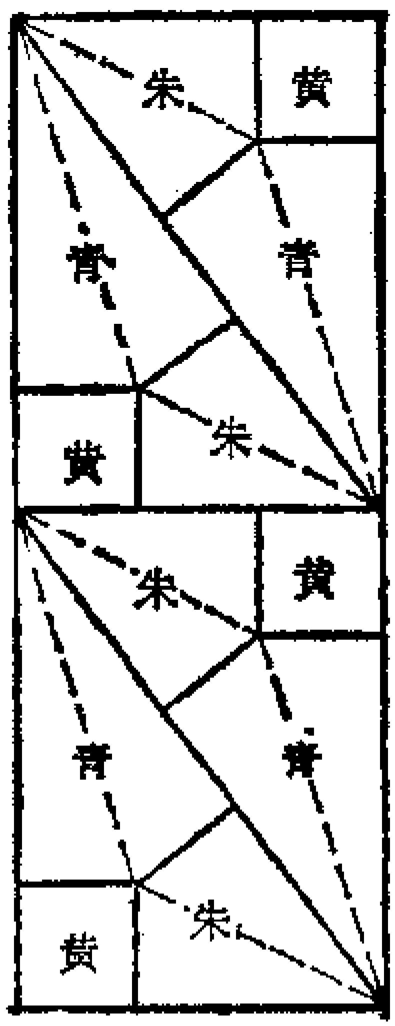


图 28

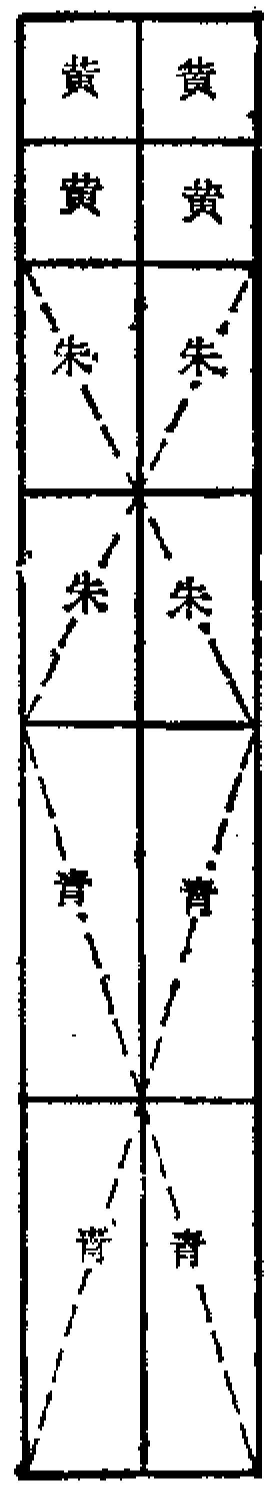


图 29

过圆心作句、股的距离线，则与句、股可组成小正方形，称为黄方。即"而复连规从横量度句股，必合而成小方矣"。

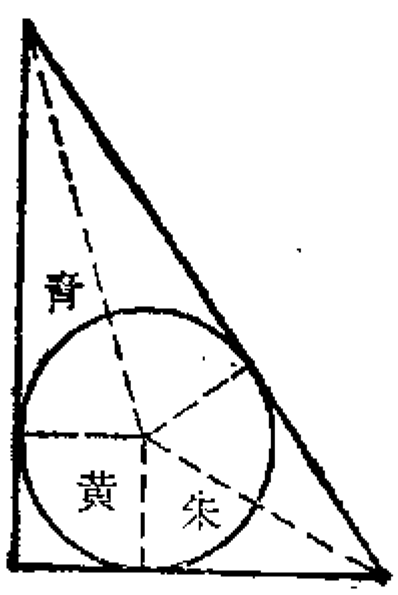


图 30

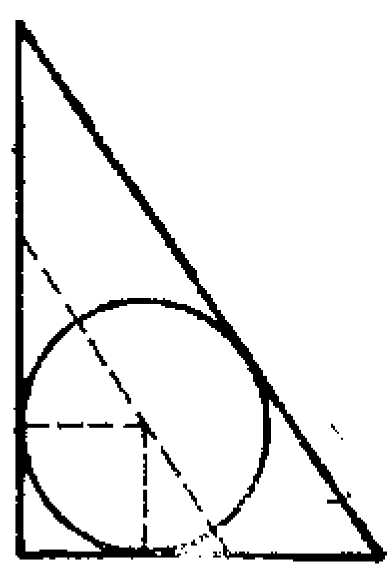


图 31

注文"又以图之大体言之，股中青必合立规于横广句股又邪三径均"一语中的"图"、"合"字，各本分别讹作"圆"、"令"字。今校正。

[34]* 又画中弦以观其会，……，实则同归矣

在这里，刘徽提出另一证法。

过内切圆心作平行于弦的线段，刘徽称为"中弦"，画出"中弦"，则与句、股边各组成小句股形。即"画中弦以观其会，则句股之面中央各有小句股弦(图 31)"。

句边小句股形之小股，股边小句股形之小句，既是小正方形的一边，又是内切圆的半径。即"皆小方之面、皆圆径之半"。

由于句边小句股形及股边小句股形都与原句股形相似，所以刘徽便以衰分术证明这一算法。

句为 $a=8$，股为 $b=15$，而弦为 $c=17$。"以句、股、弦为列衰"，即 $a:b:c=8:15:17$。"副并为法"，即 $a+b+c=40$。"以句乘未并者各自为实"，即 $a\cdot b=8\times 15=120$，于是可得"句面之小股"，即圆半径为

$$r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{120}{40}=3。$$

仿此，可得"股面之小句"为 $r=\dfrac{ba}{a+b+c}=3$。

上述两种证法虽异，而其原理却一。故称："言虽异矣，及其所以成法实则同归矣。"

注文"以句乘未并者各自为实"的"各自"二字，似无实际意义，按理似应删去。

[35] 又可以股弦差减句为圆径。……，亦圆径也

刘徽在这里提出推求句股形内切圆径的四种方法。即：

(1) $d=a-(c-b)$，(股弦差减句为圆径)

(2) $d=b-(c-a)$，(句弦差减股为圆径)

---

* 本注曾参考梅荣照：刘徽的勾股理论，科学史集刊，第 11 期。

(3) $d=(a+b)-c$，(弦减句股并,余为圆径)

(4) $d=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$。(以句弦差乘股弦差而倍之,开方除之,亦圆径也)

如何导出这四种方法,注文不详。今猜测如下:

过句股形 ABC 的内心 O，向三边作垂线 OD，OE，OF，并连接 OA，OB，设内切圆直径为 d 半径为 r (图 32)。

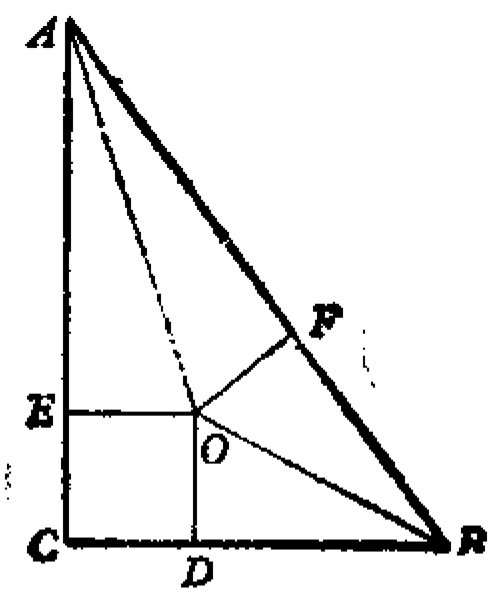


图 32

(1) 因句面小句股形 ODB 的 BD 为股弦差与半径之和,即

$$BD=(c-b)+r,$$

于是 $$a=(c-b)+2r,$$

故得 $$d=a-(c-b)。$$

(2) 因股面小句股形 OEA 的 AE 为句弦差与半径之和，即 $AE=(c-a)+r$，于是 $b=(c-a)+2r$，故得 $d=b-(c-a)$。

(3) 句股形的句股和，即是句面的 BD 与股面的 AE 以及圆径的和。即 $a+b=BD+AE+2r=BF+AF+2r$，故得 $d=(a+b)-c$。

也可由 $$r=BC-BD=BC-BF,$$

$$r=AC-AE=AC-AF$$

相加得 $$d=(a+b)-c。$$

(4) 因 $a^2+b^2=c^2$，$d=(a+b)-c$，故有

$$\begin{aligned} d&=\sqrt{[(a+b)-c]^2}\\ &=\sqrt{a^2+b^2+2ab-2(a+b)c+c^2}\\ &=\sqrt{2[c^2-(a+b)c+ab]}\\ &=\sqrt{2(c-a)(c-b)}。\end{aligned}$$

也可由第十二问注文得：$2(c-a)(c-b)=(a+b-c)^2$，从而导出 $d=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$。

[一七] 今有邑方二百步，各中开门。出东门十五步有木。问出南门几何步而见木。

答曰：六百六十六步太半步。

术曰：出东门步数为法，以句率为法也。半邑方自乘为实，实如法得一步[36]。此以出东门十五步为句率，东门南至隅一百步为股率，南门东至隅一百步为见句步。欲以见句求股，以为出南门数。正合半邑方自乘者，股率当乘见句，此二者数同也。

[36] 术曰：出东门步数为法，半邑方自乘为实，实如法得一步

设出东门步数为 $a=15$（图 33），半邑方为 $b=a_1=100$，按术计算，得出南门步数 x 为

$$x=\frac{b^2}{a}=666\frac{2}{3}\text{步。}$$

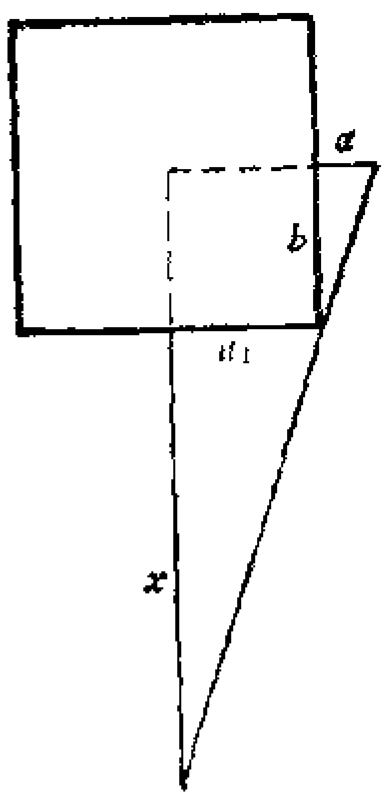


图 33

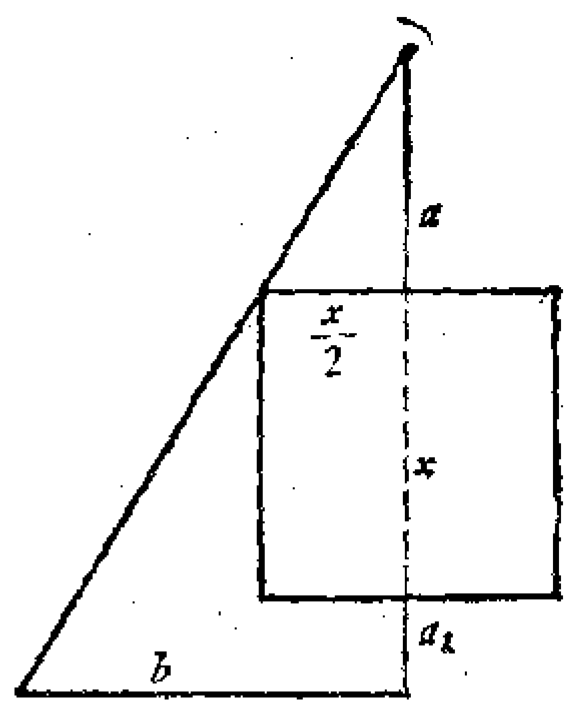


图 34

刘徽用相似句股形论证：以 a 为“句率”，b 为“股率”，a_1 为“见句”，x 为与之对应的股。故得：$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{x}$，或 $x=\frac{a_1 b}{a}=\frac{b^2}{a}$。

[一八] 今有邑，东西七里，南北九里，各中开门。出东门十五里有木。问出南门几何步而见木。

答曰：三百一十五步。

术曰：东门南至隅步数，以乘南门东至隅步数为实。以木去门步数为法。实如法而一。此以东门南至隅四里半为句率，出东门十五里为股率，南门东至隅三里半为见股。所问出南门即见股之句。为术之意，与上同也。

[一九] 今有邑方不知大小，各中开门。出北门三十步有木，出西门七百五十步见木。问邑方几何。

答曰：一里。

术曰：令两出门步数相乘，因而四之，为实。开方除之，即得邑方。按前术，半邑方自乘，出东门步数除之，即出南门步数。今两出门相乘为半邑方自乘，居一隅之积分。因而四之，即得四隅之积分。故以为实。开方除之，即邑方也。

[二〇] 今有邑方不知大小，各中开门。出北门二十步有木。出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木。问邑方几何。

答曰：二百五十步。

术曰：以出北门步数乘西行步数，倍之，为实。此以折而西行为股，自木至邑南十四步为句。以出北门二十步为句率，北门至西隅为股率，即半广数。故以出北门句率乘西行股，得半广股率乘句之幂。然此幂居西半。故又倍之合东半以尽之也。并出南门步数为从法，开方除之，即邑方[37]。此术之幂，东西广如邑方，南北自木尽邑南十四步为袤。合南北步数为广袤差，故并两步数为从法。以为隅外之幂也[38]。

[37] 术曰：以出北门步数乘西行步数，……，开方除之，即邑方

设出北门步数为 $a=20$，出南门步数为 $a_1=14$，西行步数为 $b=1775$，邑方为 x(图 34)。按术则有：

$$x^2+(a+a_1)x=2ab,\ 或\ x^2+34x=71000。$$

解之得：
$$x=\frac{\sqrt{(a+a_1)^2+8ab}-(a+a_1)}{2}=250。$$

按注文，以 b 为股，$(a+x+a_1)$ 为句，以 a，$\frac{x}{2}$ 分别为小句股形的句、股，由相似句股形乃得

$$\frac{a}{\frac{x}{2}}=\frac{a+x+a_1}{b},\ 或\ ab=\frac{x}{2}(a+x+a_1)。$$

根据句中容横等于股中容直原理，易知 $ab=\frac{x}{2}(a+x+a_1)$ 是邑西半幂，取其二倍，即 $2ab=(a+x+a_1)x$ 是邑西、邑东两半幂之和。即“此幂居西半。故又倍之合东半以尽之也”。故得方程为

$$x^2+(a+a_1)x=2ab。$$

[38] 此术之幂，东西广如邑方，……，以为隅外之幂也

刘徽对这一方程的形成，又提出一个看法：

“此术之幂”，即 $2ab=(a+x+a_1)x$，可看作是以邑方为广、南北为袤的长方形面积。即“东西广如邑方，南北自木尽邑南十四步为袤”。

邑南、邑北的步数和即是广袤差，$a+a_1=(a+x+a_1)-x$，于是可以 $(a+a_1)x$ 作为一次项，即得方程为

$$x^2+(a+a_1)x=2ab。$$

[二一] 今有邑方十里，各中开门。甲乙俱从邑中央而出。乙东出，甲南出，出门不知步数，邪向东北磨邑，适与乙会。率甲行五，乙行三。问甲、乙行各几何。

答曰：

甲出南门八百步，邪东北行四千八百八十七步半，及乙。

乙东行四千三百一十二步半。

术曰：令五自乘，三亦自乘，并而半之，为邪行率。邪行率减于五自乘者，余，为南行率。以三乘五，为乙东行率[39]。求三率之意与上甲乙同。置邑方半之，以南行率乘之，如东行率而一，即得出南门步数。邑半方，自南门至东隅五里以为小股。求出南门步数为小股之句。故置邑方半之，以南行句率乘之，如股率而一。以增邑方半，即南行。半邑者，谓从邑心中停也。置南行步求弦者，以邪行率乘之，求东者以东行率乘之，各自为实。实如南行率得一步[40]。此术与上甲乙同。

[39] 术曰：令五自乘，三亦自乘，……，为乙东行率

设 C 为邑中央，A 为甲乙相会处；b 为乙东行步数，a 为甲南行步数，c 为邪行步数（图 35）．因“率甲行五，乙行三”。仿第十四问可得：

$$
\begin{aligned}
a:b:c &= \left\{\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+(c+a)\right]-\frac{b^2}{c+a}\right\}:b \\
&\quad :\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{c+a}+(c+a)\right]\right\} \\
&= \left[(c+a)^2-\frac{b^2+(c+a)^2}{2}\right]:b(c+a) \\
&\quad :\left[\frac{b^2+(c+a)^2}{2}\right]=\left[5^2-\frac{3^2+5^2}{2}\right] \\
&\quad :(3\times 5):\left[\frac{3^2+5^2}{2}\right]=8:15:17。
\end{aligned}
$$

由本问及第十四问可知，刘徽及《九章算术》的作者深知句、股、弦三边之比率为

$$a:b:c=\left[m^2-\frac{n^2+m^2}{2}\right]:(n\cdot m):\left[\frac{n^2+m^2}{2}\right]。$$

[40] 置邑方半之，……，实如南行率得一步

利用相似句股形，按术计算得出南门步数(图 35)为：

$$DB=\frac{\frac{10}{2}\times 300\times 8}{15}=800\text{ 步。}$$

据此，可得南行、邪行、东行步数各为：

$$CB=\frac{\frac{10}{2}\times 300\times 8}{15}+\frac{10}{2}\times 300=2300\text{ 步，}$$

$$AB=\left[\frac{\frac{10}{2}\times 300\times 8}{15}+\frac{10}{2}\times 300\right]\times 17\div 8$$

$$=4887\frac{1}{2}\text{ 步，}$$

$$CA=\left[\frac{\frac{10}{2}\times 300\times 8}{15}+\frac{10}{2}\times 300\right]\times 15\div 8$$

$$=4312\frac{1}{2}\text{ 步。}$$

或 $DB=\frac{DF\cdot a}{b}$， 以及 $CB=\frac{DF\cdot a}{b}+CD$，

$$AB=\left[\frac{DF\cdot a}{b}+CD\right]\cdot\frac{c}{a}=\frac{CB\cdot c}{a},$$

$$CA=\left[\frac{DF\cdot a}{b}+CD\right]\cdot\frac{b}{a}=\frac{CB\cdot b}{a}。$$

［二二］有木去人不知远近。立四表，相去各一丈，令左两表与所望参相直。从后右表望之，入前右表三寸。问木去人几何。

答曰：三十三丈三尺三寸少半寸。

术曰：令一丈自乘为实，以三寸为法，实如法而一[41]。此以入前右表三寸为句率，右两表相去一丈为股率，左右两表相去一丈为见句，所问木去人者见句之股。股率当乘见句，此二率俱一丈，故曰自乘。以三寸为法，实如法得一寸。

[41] 术曰：令一丈自乘为实，以三寸为法，实如法而一

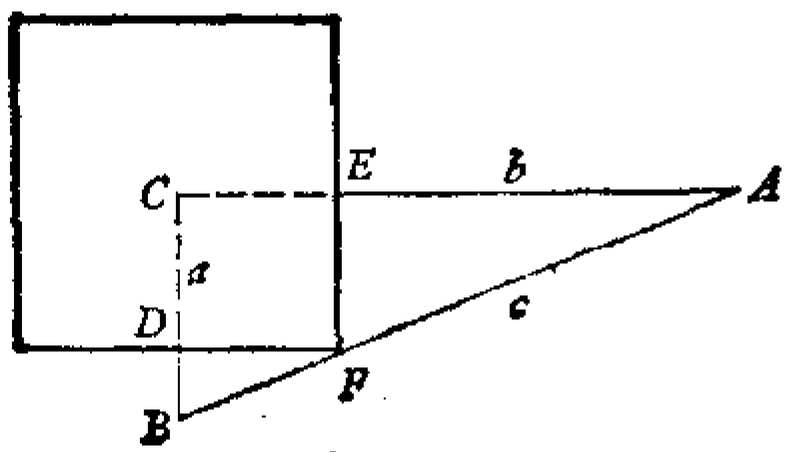


图 35

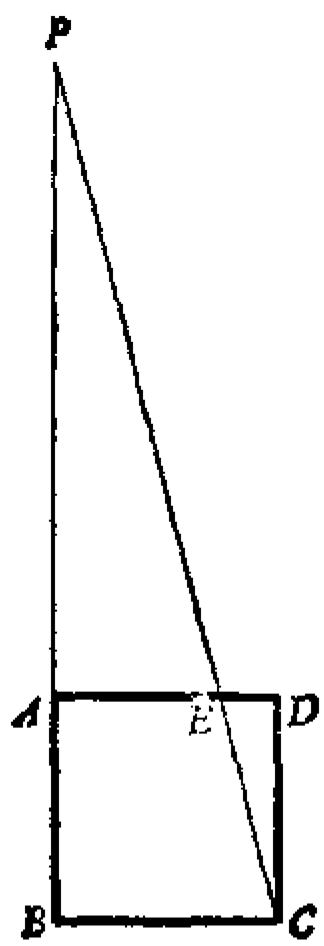


图 36

设 A，B，C，D 为四表，相距各一丈，即 $AB=BC=CD=DA=100$ 寸，$ED=3$ 寸(图 36)。

按术计算，则得：

$$BP=\frac{CD^2}{ED}=\frac{100^2}{3}=3333\frac{1}{3}\text{寸。}$$

由注文可知，刘徽根据相似句股形即$\triangle EDC\sim\triangle CBP$ 得

$$\frac{CD}{DE}=\frac{BP}{BC},\qquad \text{于是}\qquad BP=\frac{BC\cdot CD}{BE}\text{。}$$

注文说“股率 (CD) 当乘见句 (BC)，此二率俱一丈，故曰自乘”。故得

$$BP=\frac{BC\cdot CD}{BE}=\frac{CD^2}{BE}。$$

〔二三〕有山居木西,不知其高。山去木五十三里,木高九丈五尺。人立木东三里,望木末适与山峰斜平。人目高七尺。问山高几何。

答曰：一百六十四丈九尺六寸太半寸。

术曰：置木高减人目高七尺，余，以乘五十三里为实。以人去木三里为法。实如法而一，所得，加木高即山高。此术句股之义：以木高减人目高七尺，余有八丈八尺为句率，人去木三里为股率，山去木五十三里为见股。以句率乘见股，如股率而一，得句，加木之高，故为山高也。

〔二四〕今有井径五尺,不知其深。立五尺木于井上,从木末望水岸,入径四寸。问井深几何。

答曰：五丈七尺五寸。

术曰：置井径五尺,以入径四寸减之,余,以乘立木五尺为实。以入径四寸为法。实如法得一寸。此以入径四寸为句率,立木五尺为股率,井径四尺六寸为见句。问井深者,见句之股也。

附录 海岛算经

[一] 今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直[1]。 从前表却行一百二十三步[2]，人目著地取望岛峰，与表末参合[3]。 从后表却行一百二十七步，人目著地取望岛峰，亦与表末[4]参合。问岛高及去表各几何。

答曰：岛高四里五十五步。

去表一百二里一百五十步。

术曰：以表高乘表间为实。相多为法，除之。所得加表高，即得岛高[5]。臣淳风等谨按此术意，宜云，岛峰谓山之顶上。两表谓立木为表，令之端直。人目与木末望岛参平。人去表一百二十三步，为前表之景。后立表木至人目于木末相望。去表一百二十七步[6]。二去表相减为相多，以为法。前后表相去千步为表间。以表高乘之为实。以法除之，加表高，即是岛高积步，得一千二百五十五步。以里法三百步除之，得四里，余五十五步。是岛高之步数也。求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实。相多为法，除之，得岛去表里数[7]。臣淳风等谨按此术意，宜云，前去表乘表间，得十二万三千步。以相多四步为法，除之，得三万七百五十步。又以里法三百步除之，得一百二里一百五十步，是岛去表里数。

[1] 参相直

《墨经》说"直，参也"。是用三点共线定义了"直"。这里"参相直"可能取意于《墨经》，使三点在一直线上。实际上这里是说明岛峰、前表、后表在一个与地面垂直的平面内。

[2] 从前表却行一百二十三步

“却”是退，“从前表却行一百二十三步”，就是由前表处向后退行一百二十三步。

[3] 与表末参合

当人目测望岛峰时，表的末端正好落在视线内。也就是说人目、岛峰及表末三点在一直线上．即“与表末参合”。

[4] 亦与表末参合

各版本都是“亦与表末参合”。独钱校本是“亦与表木参合”。可能是排印之误。今校正为“亦与表末参合”。

[5] 术曰：以表高乘表间为实。……，即得岛高

如图1所示：海岛 AH，岛峰为 A，两表 BC，DE，前表为 BC，后表为 DE，两表相去即前后表之间的距离，术文称为“表间”，即 BD。前表却行为 BF，后表却行为 DG，两却行之差术文称为“相多”，即 $(DG-BF)$。

按术计算，得岛高为：

$$AH=\frac{BC\cdot BD}{DG-BF}+BC$$

或

$$岛高=\frac{表高\times表间}{后表却行-前表却行}+表高。$$

这就是测高的重差公式。

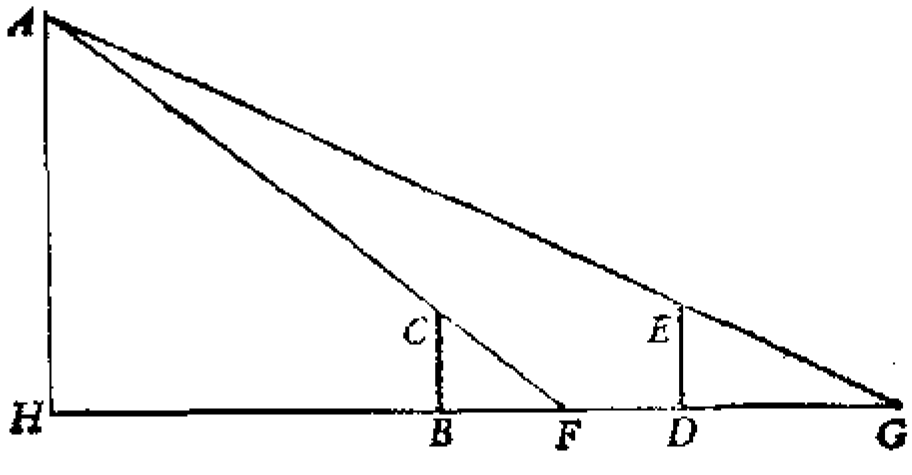


图 1

[6] 岛峰谓山之顶上，……，去表一百二十七步

李注“臣淳风等谨按此术意，宜云”之下，各版本都是：“岛谓

山之顶上两表谓立表木之端直以人目与木末望岛参平人去表一百二十三步为前表之始后立表末至人目于木末相望去表一百二十七步"五十九字。戴校本说："此句讹舛"，可能是"由传写失真，后人妄加改窜，遂不可通"。但戴震未给予校正。

李潢于《海岛算经细草图说》拟将前二十五字校正为"岛峰谓山之顶上。立两表齐谓立表末令端直，以人目于表末望岛参平"。钱校本则说："李注从'岛谓山之顶上'至'去表一百二十七步'五十九字，文理欠通，不能句读，传刻本定有误文夺字。但无法校正，亦难标点，只可缺疑。"

今参照李潢之说及此术意将这五十九字试校为："岛峰谓山之顶上。两表谓立木为表，令之端直。以人目于木末望岛参平，人去表一百二十三步，为前表之景。后立表木至人目于木末相望，去表一百二十七步。"凡改三字，添三字共计六十二字。

[7] 求前表去岛远近者，……，得表去岛里数

如图 1 所示，前表去岛之远近为 BH，前表却行为 BF，表间为 BD，相多为 $DG-BF$。按术计算，即得前表与岛的距离，即"岛去表"

$$BH=\frac{BF\cdot BD}{DG-BF}$$

或

$$\text{前表去岛之远近}=\frac{\text{前表却行}\times\text{表间}}{\text{后表却行}-\text{前表却行}}。$$

这就是测远重差公式。

[二] 今有望松生山上，不知高下。立两表，齐高二丈，前后相去五十步，令后表与前表参相直。从前表却行七步四尺，薄地遥望松末，与表端参合。又望松本，入表二尺八寸。复从后表却行八步五尺，薄地遥望松末，亦与表端参合。问松高及山去表各几何[8]。

答曰：松高十二丈二尺八寸。

山去表一里二十八步七分步之四。

术曰：以入表乘表间为实，相多为法，除之。加入表，即得松高[9]。臣淳风等谨按此术意，宜云，前后去表相减，余七尺是相多，以为法。表间步通之为实，以入表乘之，退位一等以为实。以法除之，更加入表，得一百二十二尺八寸，以为松高。退位一等，得十二丈二尺八寸也[10]。求表去山远近者，置表间，以前表却行乘之为实。相多为法，除之，得山去表[11]。臣淳风等谨按此术意，宜云，表间以步尺法通之得三百尺。以前去表四十六尺乘之为实。以相多七尺为法。实如法而一，得一千九百七十一尺七分尺之三。以里尺法除之，得一里；不尽以步法除之，得二十八步；不尽三还以七因之得数，内子三得二十四。复置步尺法，以分母七乘六，得四十二为步法，俱半之，副置平约等数。即是于山去前表一里二十八步七分步之四也[11]。

[8] 今有望松生山上，……，问松高及山去表各几何

由经文"从前表却行七步四尺，薄地遥望松末，与表端参合。又望松本，入表二尺八寸。复从后表却行八步五尺，薄地遥望松末，亦与表端参合"可知，这是三次测望问题。

本问既不知山高，又不知山之远近，而求山上松高。山上松树就是孤离无着，需要测望三次。假设此问是求山高及松高的和，即与第一问求海岛高一样，只须测望松末两次。此问是求松高，松本不在地面上，故须再测望一次，共须测望三次。即刘徽所说："孤离者三望。"

[9] 以入表乘表间为实，……，即得松高

如图2所示，松高为AB，前表DN，后表EF，前表却行为DG，后表却行为EH，相多为$EH-DG$，前后表相去即表间为DE，入表为MN。

按术计算，得

$$AB=\frac{MN\cdot DE}{EH-DG}+MN$$

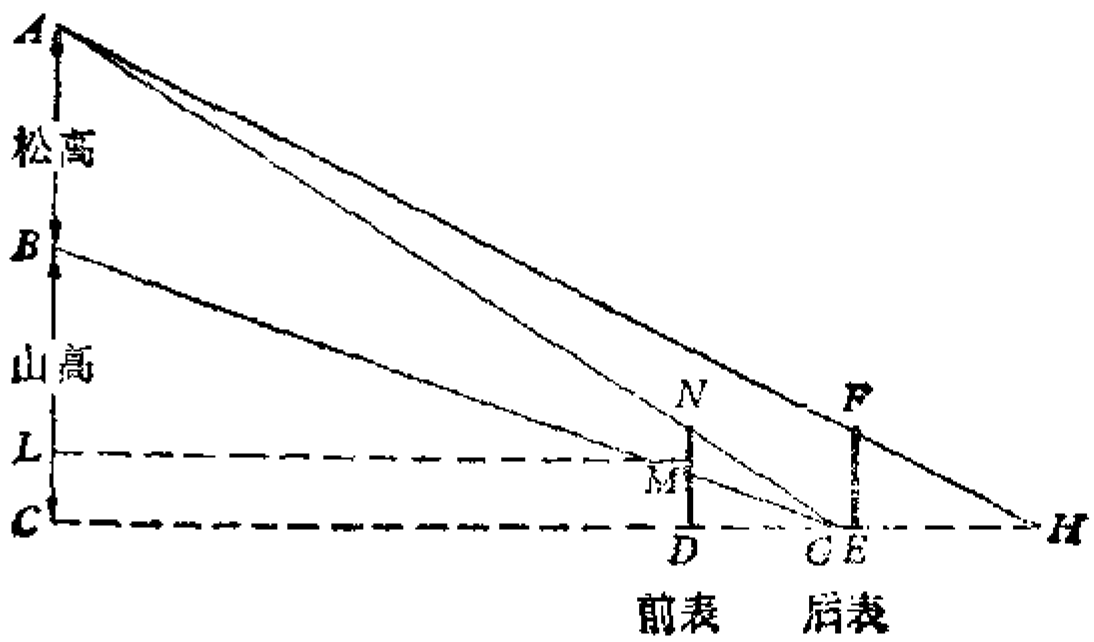


图 2

或

$$\text{松高}=\frac{\text{人表}\times\text{表间}}{\text{后表却行}-\text{前表却行}}+\text{人表}。$$

这一算法如何形成，读者不无疑问。由于术文没有说明，今则猜测如下：

可能由测高重差公式先求得山高与松高之和，即

$$AB+BC=\frac{DN\cdot DE}{EH-DG}+DN$$

或

$$\text{松高}+\text{山高}=\frac{\text{表高}\times\text{表间}}{\text{后表却行}-\text{前表却行}}+\text{表高}。$$

再由相似句股形求得山高：

$$BL+LC=DM\cdot\frac{LM}{DG}+DM$$

或

$$\text{山高}=(\text{表高}-\text{人表})\cdot\frac{\text{山去表}}{\text{前表却行}}+(\text{表高}-\text{人表})。$$

又由测远重差公式得前表去山之远为

$$CD=\frac{DG\cdot DE}{EH-DG}$$

或

$$\text{山去前表之远}=\frac{\text{前表却行}\times\text{表间}}{\text{后表却行}-\text{前表却行}}。$$

由此两式即得山上松高。

[10] 前后去表相减，……，得十二丈二尺八寸也

后表却行减前表却行则得

$$8\text{步}5\text{尺}-7\text{步}4\text{尺}=1\text{步}1\text{尺}=7\text{尺}。$$

即“余七尺是相多，以为法”。

前后表相去为 50 步 = 50 × 6 = 300 尺，以入表 2 尺 8 寸乘之得

$$300\times 28=8400。$$

在这一乘法中，一乘数是 300 尺，一乘数是 28 寸，所得结果 8400 既不是方尺也不是方寸。李淳风有鉴于此，便说“退位一等以为实”。退位一等就是除以 10，故得：8400 ÷ 10 = 840 方尺。但是，李潢于《海岛算经细草图说》称：“置前后表相去五十步，展为三百尺，以入表二尺八寸乘之，得八千四百寸。退位一等，得八百四十尺为实。”李潢所说“八千四百寸”，显然是错误的。

“以法除之，更加入表”。即

$$840\div 7+2\text{尺}8\text{寸}=122\text{尺}8\text{寸}。$$

即是松高。

为了化为丈，又“退位一等”即得：12 丈 2 尺 8 寸。

[11] 求表去山远近者，……，得山去表

如图 2 所示，表间为 DE，前表却行为 DG，相多为 $EH-DG$。按术计算，即得山去表之远近 CD 为

$$CD=\frac{DG\cdot DE}{EH-DG}$$

或

$$\text{山去表之远}=\frac{\text{前表却行}\times\text{表间}}{\text{后表却行}-\text{前表却行}}。$$

显见这是直接套用测远重差公式计算的。

[12] 表间以步尺法通之得三百尺，……，一里二十八步七分步之四也

以前表却行乘表间，除以相多"得一千九百七十一尺七分尺之三"。即

$$300 \times 46 \div 7 = 1971\frac{3}{7}\text{尺。}$$

因 1800 尺 = 1 里，所以

$$1971\frac{3}{7} \div 1800 = 1\text{里}\cdots\cdots171\frac{3}{7}\text{尺，}$$

即"以里尺法除之，得一里"。余 $171\frac{3}{7}$ 尺。又因 6 尺 = 1 步，所以

$$171\frac{3}{7} \div 6 = 28\text{步}\cdots\cdots3\frac{3}{7}\text{尺，}$$

即"不尽以步法除之，得二十八步"。余 $3\frac{3}{7}$ 尺。化此余数为假分数，需通分内子，得分子为 $3 \times 7 + 3 = 24$，即"不尽三还以七因之得数，内子三，得二十四"。余数 $3\frac{3}{7}$ 尺即是 $\frac{24}{7}$ 尺。欲将余数化为步，得

$$3\frac{3}{7}\text{尺} = \frac{24}{7}\text{尺} = \frac{24}{7 \times 6}\text{步} = \frac{24}{42}\text{步} = \frac{12}{21}\text{步} = \frac{4}{7}\text{步。}$$

即"山去前表一里二十八步七分步之四也"。

[三] 今有南望方邑，不知大小。立两表东西去六丈，齐人目，以索连之。令东表与邑东南隅及东北隅参相直。当东表之北却行五步，遥望邑西北隅，入索东端二丈二尺六寸半。又却北行去表十三步二尺，遥望邑西北隅，适与西表相参合。问邑方及邑去表各几何。

答曰：邑方三里四十三步四分步之三。

邑去表四里四十五步。

术曰：以入索乘后去表，以两表相去除之，所得

为景差。以前去表减之不尽，以为法。置后去表，以前去表减之，余以乘入索为实。实如法而一，得邑方[13]。臣淳风等谨按：此术置入索乘后去表得一千八百一十二尺。以两表相去除之，得三丈二寸为景差。以前去表减之，余二寸以为法。前后去表相减之余以乘入索，得一万一千三百二十五寸为实。以法除之，得五千六百六十二尺，不尽二分尺之一。以里法除之，得三里；不尽尺以步法除之，得四十三步；不尽四以分母乘之，内子一，得九。以分母乘六得十二。以三约母得四，约子得三。即得邑方三里四十三步四分步之三也。求去表远近者，置后去表，以景差减之，余以乘前去表为实。实如法而一，得邑去表[14]。臣淳风等谨按：此术置后去表，以景差尺数减之，余尺以乘前去表，得一千四百九十四尺为实。以法除之，得七千四百七十尺。以步里法除之，得四里；不尽二百七十尺，以步法除之，得四十五步。即是邑去前表四里四十五步也。

[13] 术曰：以入索乘后去表，……，实如法而一，得邑方

如图3所示，东西两表相去六丈(h)，由东表向北却行五步(a)，入索二丈二尺六寸半(k)，又由东表向北却行十三步二尺(b)。设邑方为x，邑去表为y，按术计算，得：

$$x=\frac{(b-a)k}{\frac{kb}{h}-a},\text{ 即 }\quad \text{邑方}=\frac{(\text{后去表}-\text{前去表})\times\text{入索}}{\frac{\text{后去表}\times\text{入索}}{\text{两表相去}}-\text{前去表}}。$$

术文"以入索乘后去表，以两表相去除之，所得为景差"。可能由相似句股形性质 $\frac{e}{k}=\frac{b}{h}$，导出 $e=\frac{kb}{h}$。术文则称之为"景差"。

"景差"应是影差。可能是测高、测远重差公式里后去表与前去表之差，也即"相多"。也可理解为《周髀算经》及刘徽《九章算术注原序》里所说的"景差"。按理术文应是"以入索乘后去表，以两表相去除之，所得以前去表减之不尽为景差"。但传本术文却是"以入索乘后去表，以两表相去除之，所得为景差"。于理似欠通顺。"景差"当是相减之差，绝非相除之商。显见必有误文，应该校

正。如钱宝琮说“求邑方术中‘为景差’三字应移至‘以前去减之不尽’之后”。又因李淳风注文为“以两表相去除之，得三丈二寸为景差”。足证唐代抄本即有误文。为了保持唐抄本的本来面目，今悉仍其旧。

［14］求去表远近者，……，实如法而一，得邑去表

如图3所示，“置后去表，以景差减之余以乘前去表为实”即 $\left(b-\frac{kb}{h}\right)a$，法为 $\left(\frac{kb}{h}-a\right)$。按术则得邑去表为

$$y=\frac{\left(b-\frac{kb}{h}\right)a}{\left(\frac{kb}{h}-a\right)}$$

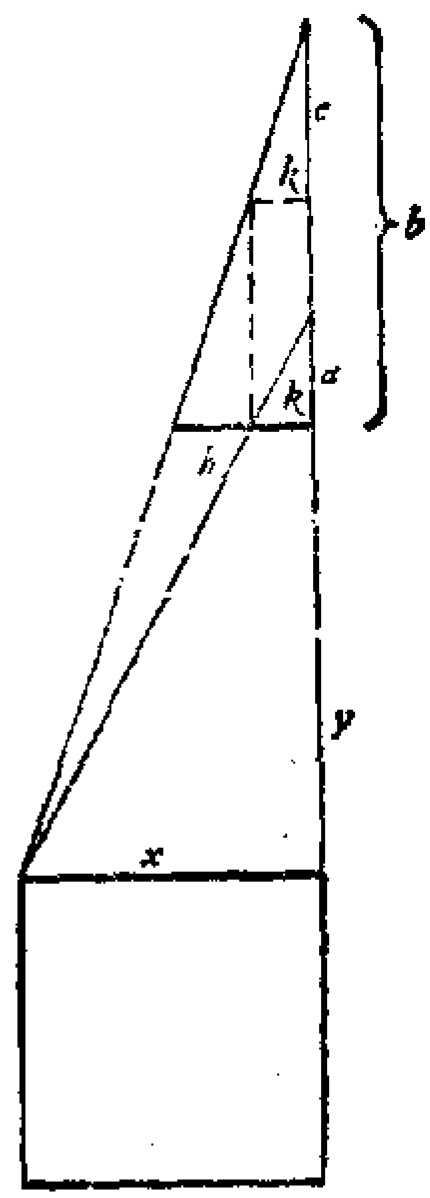


图 3

或

$$\text{邑去表}=\frac{\left(\text{后去表}-\frac{\text{后去表}\times\text{入索}}{\text{两表相去}}\right)\times\text{前去表}}{\frac{\text{后去表}\times\text{入索}}{\text{两表相去}}-\text{前去表}}。$$

因这一问是两次测望问题，可能先求出有关数据后，再套用测高、测远的重差公式。本问的“入索”、“当东表之北却行”、“又却北行”分别相当于“表高”、“前表却行”、“后表却行与表间之和”，先求出“后表却行”及“表间”，再套公式。即由 $\frac{e}{k}=\frac{b}{h}$，得 $e=\frac{kb}{h}$ 代入重差公式，

$$x=\frac{k(b-e)}{e-a}+k,\quad y=\frac{a(b-e)}{e-a}。$$

化简即得

$$x=\frac{k(b-a)}{\frac{kb}{h}-a},\quad y=\frac{\left(b-\frac{kb}{h}\right)a}{\frac{kb}{h}-a}。$$

［四］今有望深谷，偃矩岸上，令句高六尺。从句端望谷底入下股九尺一寸。又设重矩于上，其矩间相去三丈。更从句端望谷底，入上股八尺五寸。问谷深几何。

答曰：四十一丈九尺。

术曰：置矩间，以上股乘之，为实。上下股相减，余为法，除之。所得以句高减之，即得谷深[15]。臣淳风等谨按：此术置矩间，上股乘之为实。又置上、下股尺寸，相减余六寸，以为法。除实得数，退位一等；以句高减之，余四十一丈九尺，即是谷深。又一法，置矩间，以下股乘之为实。置上、下股尺数，相减余六寸，以为法。除之，得四百五十五尺。以句高并矩间得三十六尺，减之余，退位一等，即是谷深也。

［五］今有登山望楼，楼在平地。偃矩山上，令句高六尺，从句端斜望楼足；入下股一丈二尺。又设重矩于上，令其间相去三丈。更从句端斜望楼足，入上股一丈一尺四寸。又立小表于入股之会，复从句端斜望楼岭端，入小表八寸。问楼高几何。

答曰：高八丈。

术曰：上、下股相减，余为法。置矩间，以下股乘之，如句高而一。所得，以入小表乘之，为实。实如法而一，即是楼高[16]。臣淳风等谨按：此术置下股，以上股相减，余六寸以为法。又置矩间，以下股乘之，得三万六千寸。以句高六尺除之，得六百寸。以入小表乘之，得四千八百寸。以法除之，得八百寸。退位二等，即是楼高八丈也。

［15］术曰：置矩间，……，所得以句高减之，即得谷深

如图 4 所示，设矩间为 d，入上股为 k，入下股为 h，句高为 a，谷深为 x。按术计算，得：

$$x=\frac{dk}{h-k}-a。$$

因本问是两次测望，可能先求出有关数据后，再套用测远重差公式。由相似句股形性质 $\frac{e}{a}=\frac{h-k}{k}$，得 $e=\frac{(h-k)a}{k}$，可求得“表间”为 $d-e=d-\frac{a(h-k)}{k}$，“相多”为 $(a+e)-a=$

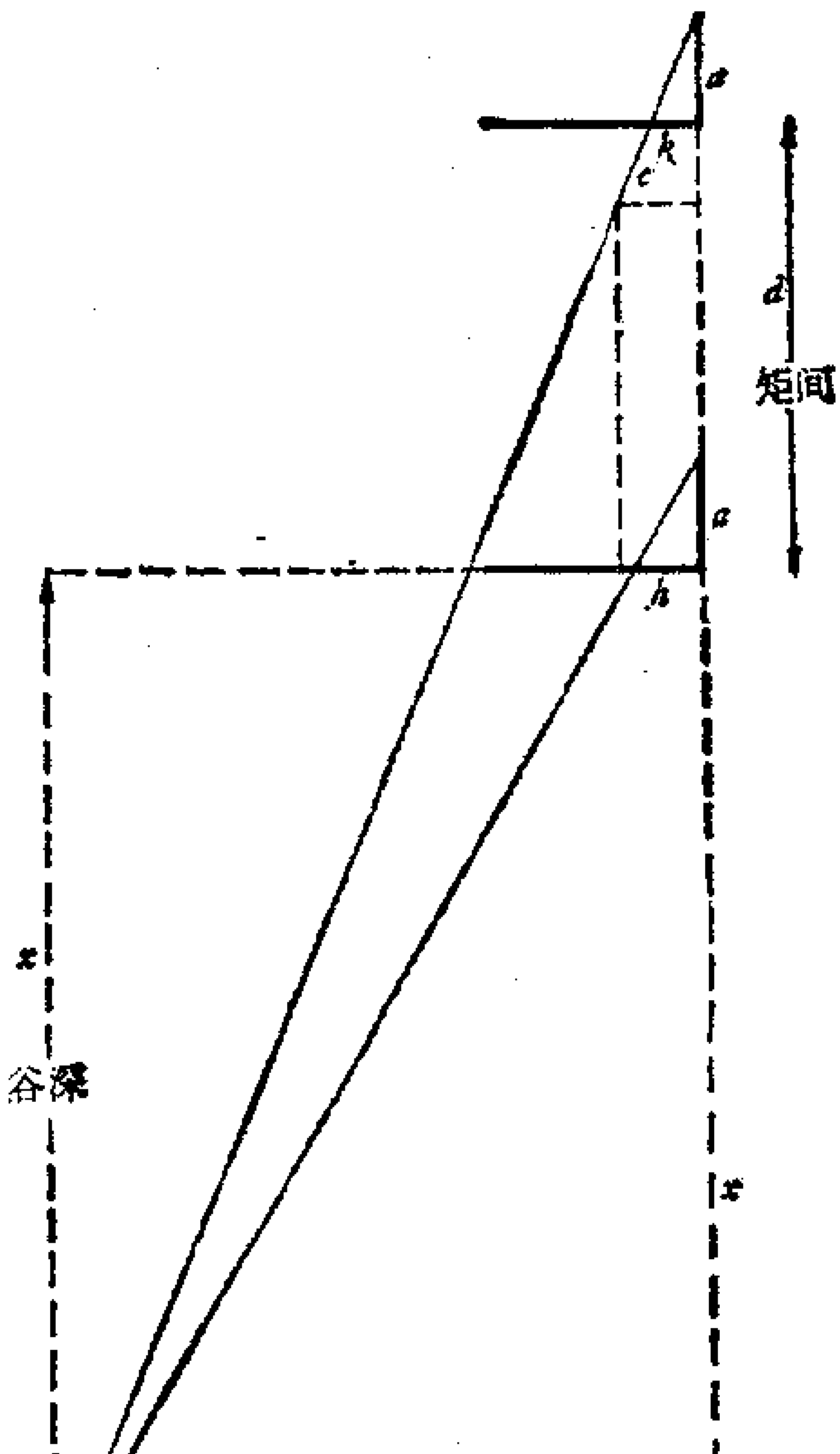


图 4

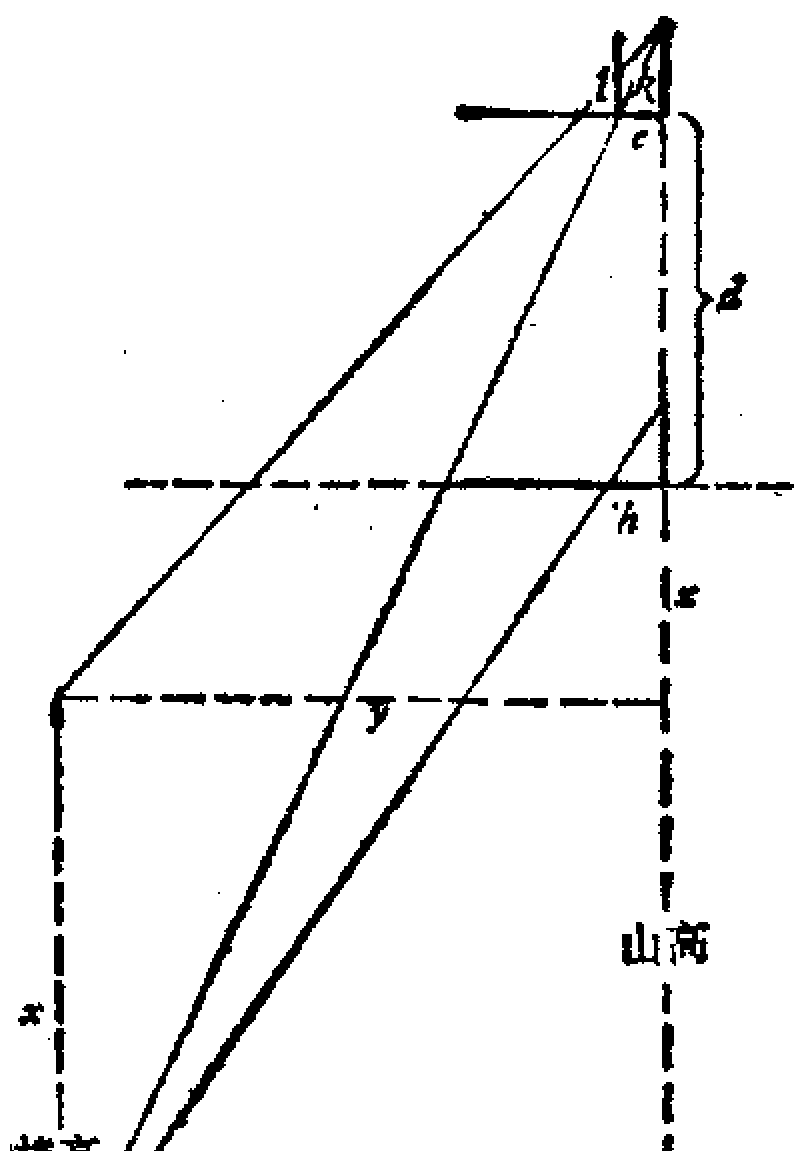


图 5

$e=\frac{a(h-k)}{k}$，经文“句高”、“入下股”分别相当于“前表却行”及“表高”，所求“谷深”即是“岛去表”。按测远重差公式则得

$$x=\frac{a(d-e)}{(a+e)-a}=\frac{dk}{h-k}-a。$$

[16] 术曰：上下股相减，……，即是楼高

如图5所示，设句高为 a，入下股为 h，矩间为 d，入上股为 k，入小表为 l，楼高为 x。按术演算，得 $x=\frac{\frac{dh}{a}\cdot l}{h-k}$。

假令此问只求山高，即与上问累矩测深一样，只需测望楼足两次。因楼顶与山顶不齐，故需再测望楼顶一次，共需测望三次。即是说楼顶无所依旁，则需测望三次以求其高。

本问是三次测望问题，可能先求得山高再推求楼高。也就是说，先求出有关数据后，再套用重差公式推求楼高。根据相似句股形性质 $\frac{e}{a}=\frac{h-k}{k}$，$\frac{a+d+z}{y}=\frac{a-l}{k}$，得 $e=\frac{a(h-k)}{k}$，$a+d+z=\frac{y(a-l)}{k}$，其 h，$d-e$，a，$(a+e)-a$ 分别相当于重差公式里“表高”、“表间”、“前去表”、“相多”，而 y 及 $x+z$ 则相当于“岛高”、“岛去表”。故得

$$x+z=\frac{a(d-e)}{(a+e)-a}=\frac{dk}{h-k}-a,$$

$$y=\frac{h(d-e)}{(a+e)-a}+h=\frac{hdk}{a(h-k)}。$$

因 $a+d+z=\frac{y(a-l)}{k}$，故 $z=\frac{hd(a-l)}{a(h-k)}-a-d$，于是得楼高 x 为

$$x=\frac{hd\cdot l}{a(h-k)}。$$

[六] 今有东南望波口，立两表南、北相去九丈，以索薄地连之。当北表之西却行去表六丈，薄地遥望波口南岸，入索北端四丈二寸。以望北岸，入前所望表里一丈二尺。又却后行去表十三丈五尺，薄地遥望波口南岸，与南表参合。问波口广几何。

答曰：一里二百步。

术曰：以后去表乘入索，如表相去而一。所得，以前去表减之，余以为法。复以前去表减后去表，余以乘入所望表里为实。实如法而一，得波口广[17]。臣淳风等谨按：此术置后去表，以乘入索四百二寸，得五十四万二千七百寸。以两表相去除之，得六百三寸。又以前去表六百寸减之，余有三寸为法。又置前后却行去表寸数相减，余以乘入望表里一百二十寸，得九万寸。以法除之，得三万寸为实。以步里法除之，得一里；余以步法除之，得二百步。即是波口广一里二百步也。

[17] 术曰：以后去表乘入索，……，得波口广

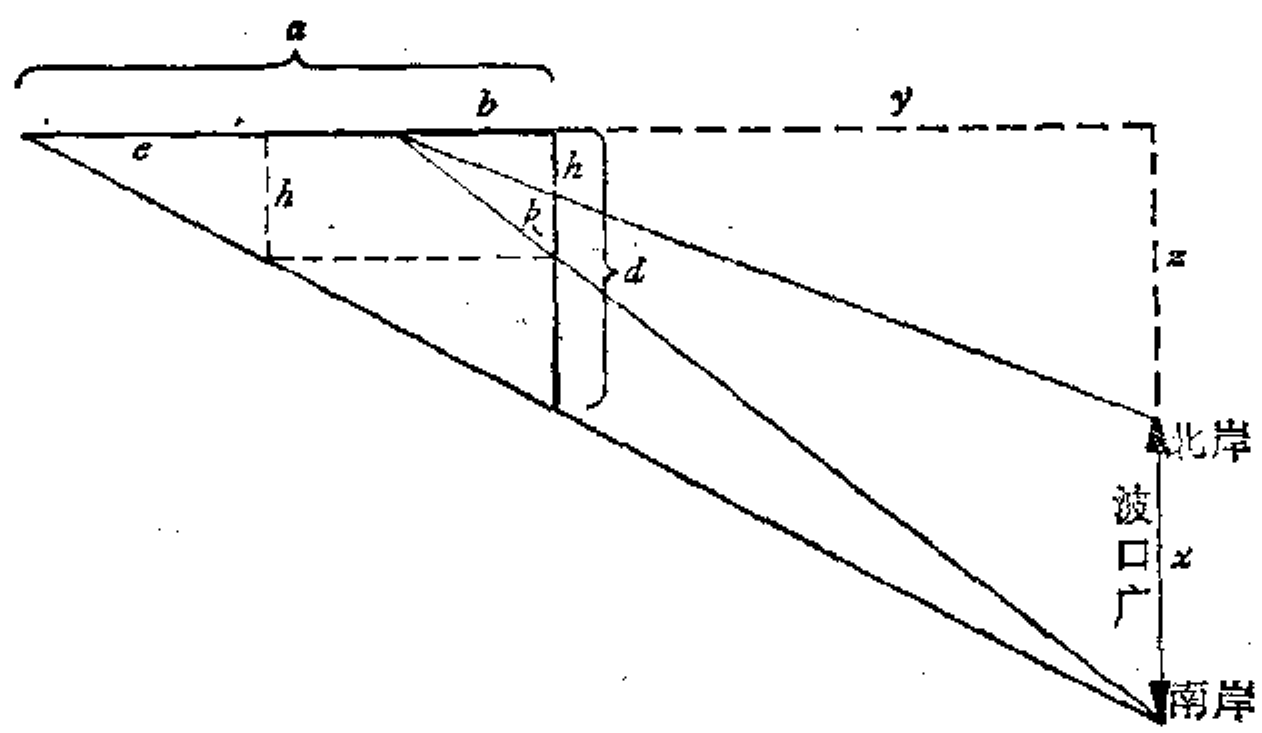


图 6

如图 6 所示，设两表相去为 d，北表之西却行即前去表为 b，入索北端为 h，入前所望表里为 k，又却后行去表即后去表为 a，波口广为 x。按术计算，则得

$$x=\frac{k(a-b)}{\frac{ak}{d}-b}。$$

本问是三次测望问题，可能先求出有关数据后，再套用重差公式推求渡口广。也即是说，根据相似句股形性质

$$\frac{e}{h}=\frac{a}{d},\quad \frac{z}{y+b}=\frac{h-k}{b},$$

得 $$e=\frac{ha}{d},\quad z=\frac{(y+b)(h-k)}{b},$$

其 $h, a-e, b, e-b$ 分别相当于重差公式里"表高"、"表间"、"前表却行"、"相多"，而 y 及 $z+x$ 则相当于"岛去表"及"岛高"。故得

$$y=\frac{b(a-e)}{e-b}=\frac{ab(d-h)}{ha-db},$$

$$z+x=\frac{h(a-e)}{e-b}+h=\frac{hd(a-b)}{ha-db}。$$

又因

$$z=\frac{(y+b)(h-k)}{b}=\frac{d(a-b)(h-k)}{ha-db},$$

故得渡口广为

$$x=\frac{hd(a-b)}{ha-db}。$$

[七] 今有望清渊，渊下有白石。偃矩岸上，令句高三尺，斜望水岸，入下股四尺五寸。望白石，入下股二尺四寸。又设重矩于上，其间相去四尺。更从句端斜望水岸，入上股四尺。以望白石，入上股二尺二寸。问水深几何。

答曰：一丈二尺。

术曰：置望水上、下股，相减，余以乘望石上股为上率。又以望石上、下股相减，余以乘望水上股为下率。两率相减，余以乘矩间为实。以二差相乘为法。实如法而一，得水深[18]。臣淳风等谨按：此术以望水上、下股相减，余五寸，以乘望石上股二十二寸，得一百一十寸，即是上率。又置望石上股减望石下股，余有二寸，以乘望水上股四十寸，得八十寸，即是下率。二率相减，余有三十寸，以乘矩间四十寸，得一千二百寸为实。又以二差二、五相乘，得十为法。除实，退位二等，即是水深一丈二尺也。

又术：列望水上、下股及望石上、下股相减，余并为法。以望石下股减望水下股，余以乘矩间为实。实如法而一，得水深[19]。又术置望水下股，以望水上股减之，余有五寸。置望石下股，以望石上股减之，余有二寸。并之得七寸，以为法。又置望石下股，以望水下股减之，余有二十一寸。以乘矩间四十寸，得八百四十寸，以为实。以七寸为法除之，得一百二十寸。退之，得一丈二尺，即是水深也。

[18] 术曰：置望水上、下股，……，得水深

如图 7 所示，设望水下股为 a，望水上股为 b，望石下股为 h，望石上股为 k，句高为 c，矩间为 d，水深为 x。按术得

$$x=\frac{[(a-b)k-(h-k)b]d}{(a-b)(h-k)}。$$

此问是在岸上以累矩测望水深。假设白石在 C 处，则此问与第五问测望楼高相同，只需测望三次。由经文可知，白石确在 B 处，显见三望不足，必须测望四次。这就是说“水深”孤离无着，又需旁求他处，故需测望四次，即“离而又旁求者四望”。

本问可能先求出有关数据后，再套用测远重差公式求得水岸至水面之远 y。由相似句股形得 $\frac{c}{f}=\frac{b}{a-b}$，其 c，$d-f$，$(c+f)-c$ 分别相当于“前表却行”、“表间”、“相多”，而 y 则相当于“岛去表”，故得

$$y=\frac{c(d-f)}{(c+f)-c}=\frac{c}{f}\cdot d-c=\frac{bd}{a-b}-c。$$

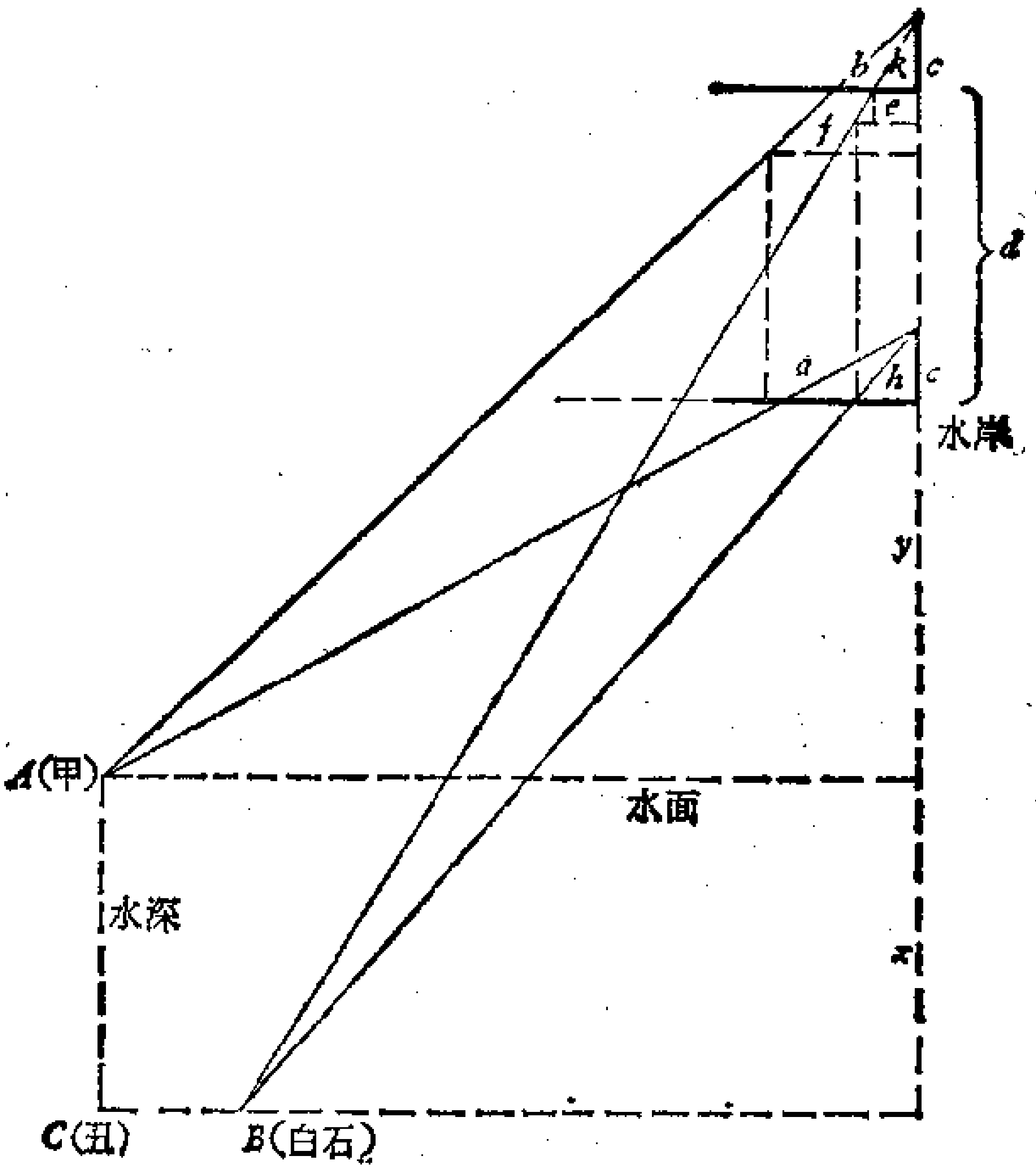


图 7

又由相似句股形得 $\frac{c}{e}=\frac{k}{h-k}$，其 c，$d-e$，$(c+e)-c$ 分别相当于“前表却行”、“表间”、“相多”，而水岸至水底之远，即 $x+y$，则相当于“岛去表”，依测远重差公式，得

$$x+y=\frac{c(d-e)}{(c+e)-c}=\frac{c}{e}\cdot d-c=\frac{kd}{h-k}-c。$$

由以上两式，可得

$$\begin{aligned} x&=\left(\frac{kd}{h-k}-c\right)-\left(\frac{bd}{a-b}-c\right)\\ &=\frac{[k(a-b)-b(h-k)]d}{(h-k)(a-b)}。\end{aligned}$$

李潢《海岛算经细草图说》称：“甲丑为水深，甲为水面，丑为白石。”李潢以为白石在丑处，显系误解。

[19] 又术：列望水上、下股及望石上、下股，……，得水深

李潢说"又术系偶合，非通率也"。如将又术改为"列望水上、下股及望石上、下股，相减余，各为法。以望水下股、望石下股，以乘矩间各为实。实如法而一，减得水深"。或较合理。

[八] 今有登山望津，津在山南。偃矩山上，令句高一丈二尺。从句端斜望津南岸，入下股二丈三尺一寸。又望津北岸，入前望股里一丈八寸。更登高岩，北却行二十二步，上登五十一步，偃矩山上。更从句端斜望津南岸，入上股二丈二尺。问津广几何。

答曰：二里一百二步。

术曰：以句高乘下股，如上股而一。所得以句高减之，余为法。置北行，以句高乘之，如上股而一。所得以减上登，余以乘入股里为实。实如法而一，即得津广[20]。臣淳风等谨按：此术置句高乘下股，得二百七十七尺二寸。以上股除之，得一丈二尺六寸。以句高一丈二尺减之，余有六寸，以为法。又置北行步展为一百三十二尺，以句高乘之，得一千五百八十四尺。以上股除之，得七十二尺。又置上登五十一步，以每步六尺通之，得三百六尺。以前数减之，余二百三十四尺。以乘入股里尺数，得二千五百二十七尺二寸，为实。实如法而一，得四千二百一十二尺。以步里法除之，得二里，余一百二步，即是津广也。

[20] 术曰：以句高乘下股，……，即得津广

如图 8 所示，设句高为 a，入下股为 h，入前望股里为 b，向北却行为 c，上登为 d，入上股为 k，津广为 x。按术计算，得：

$$x=\frac{b\left(d-\dfrac{ca}{k}\right)}{\dfrac{ah}{k}-a}。$$

本问是三次测望问题，可能先求出有关数据后，再套用重差公

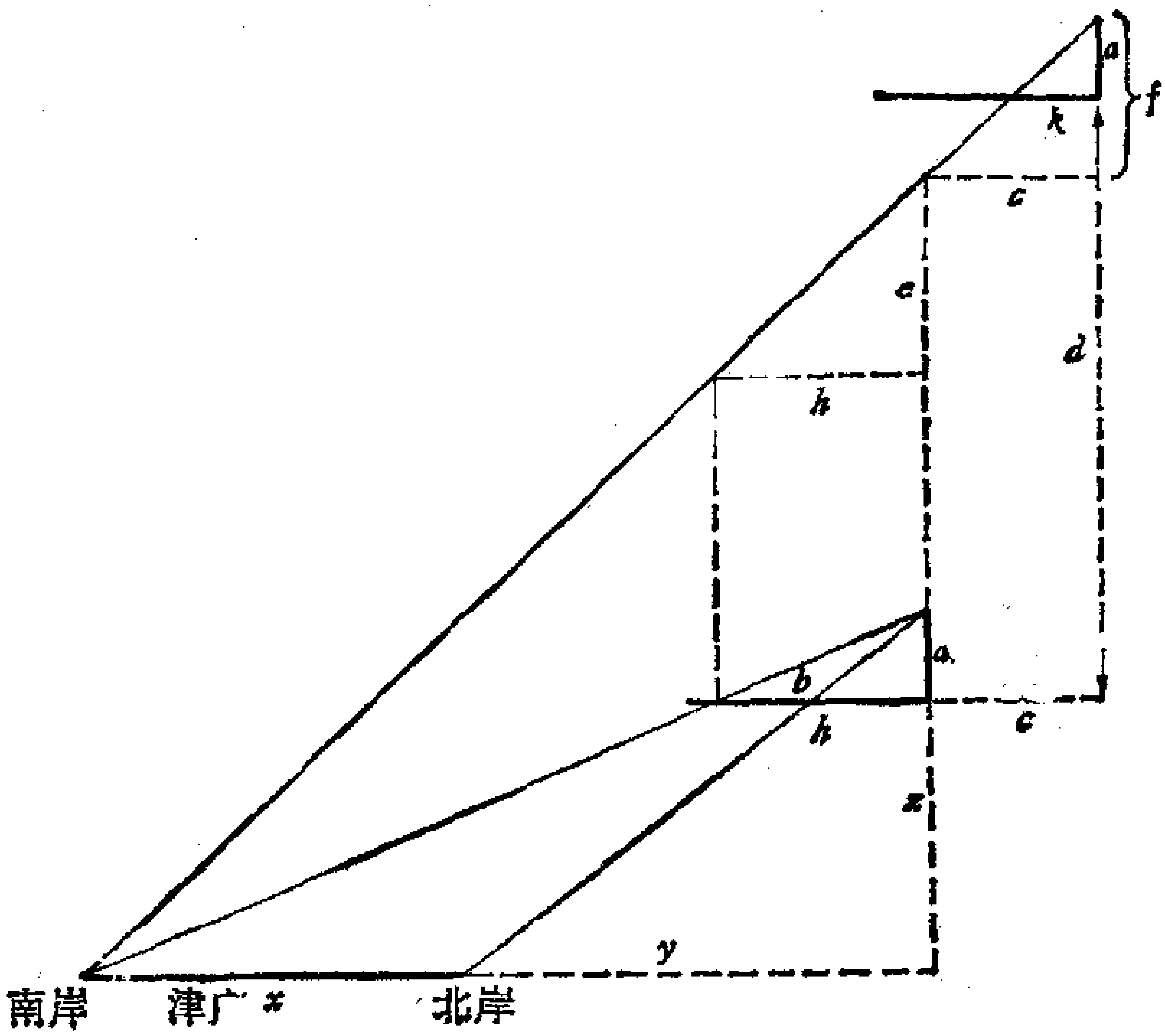


图 8

式以求津广。也就是说，由相似句股形性质 $\frac{e}{h}=\frac{a}{k}$，$\frac{f}{c}=\frac{a}{k}$，$\frac{a}{h-b}=\frac{a+z}{y}$，得 $e=\frac{ah}{k}$，$f=\frac{ac}{k}$，$y=\frac{(h-b)(a+z)}{a}$，其 h，a，$c=\frac{ah}{k}$，$(a+d)-e-f=a+d-\frac{ah}{k}-\frac{ac}{k}$，$e-a=\frac{ah}{k}-a$ 分别相当于重差公式的"表高"、"前表却行"、"后表却行"、"表间"、"相多"，而 $x+y$ 及 z 则相当于"岛高"及"岛去表"。于是可得

$$x+y=\frac{h\left(a+d-\frac{ah}{k}-\frac{ac}{k}\right)}{\frac{ah}{k}-a}+h=\frac{h\left(d-\frac{ac}{k}\right)}{\frac{ah}{k}-a},$$

$$z=\frac{a\left(a+d-\frac{ah}{k}-\frac{ac}{k}\right)}{\frac{ah}{k}-a}。$$

其中

$$z+a=\frac{a\left(d-\frac{ac}{k}\right)}{\frac{ah}{k}-a},\ y=\frac{(h-b)\left(d-\frac{ac}{k}\right)}{\frac{ah}{k}-a},$$

所以可求得津广 x 为：

$$x=\frac{h\left(d-\frac{ac}{k}\right)}{\frac{ah}{k}-a}-\frac{(h-b)\left(d-\frac{ac}{k}\right)}{\frac{ah}{k}-a}=\frac{b\left(d-\frac{ac}{k}\right)}{\frac{ah}{k}-a}。$$

[九] 今有登山临邑，邑在山南。偃矩山上，令句高三尺五寸。令句端与邑东南隅及东北隅参相直。从句端遥望东北隅，入下股一丈二尺。又施横句于入股之会，从立句端望西北隅，入横句五尺。望东南隅，入下股一丈八尺。又设重矩于上，令矩间相去四丈。更从立句端望东南隅，入上股一丈七尺五寸。问邑广、长各几何。

答曰：南北长一里一百步。

东西广一里三十三步少半步。

术曰：以句高乘东南隅入下股，如上股而一。所得减句高，余为法。以东北隅下股减东南隅下股，余以乘矩间为实。实如法而一，得邑南北长也。求邑广，以入横句乘矩间为实。实如法而一，即得邑东西

广[21]。臣淳风等谨按：此术以句高乘东南隅下股，得六千三百寸。又以东南隅上股一百七十五寸除之，得三十六寸，以句高减之，余有一寸，以为法。又置东北隅下股以减东南隅下股，余有六十寸。以乘矩间，得二万四千寸为实。实如法而一，即不盈不缩。以寸里法除之，得一里；不尽以寸步法除之，得一百步。即是邑南北长一里一百步也。求东西广步者，置人横句之数，以乘矩间，得二万寸为实。实如法而一，即得不盈不缩。以里法除之，得一里；余以步法除之，得三十三步；不尽二十，与法俱退半之，即是三分步之一也。

[21] 术曰：以句高乘东南隅人下股，……，即得邑东西广

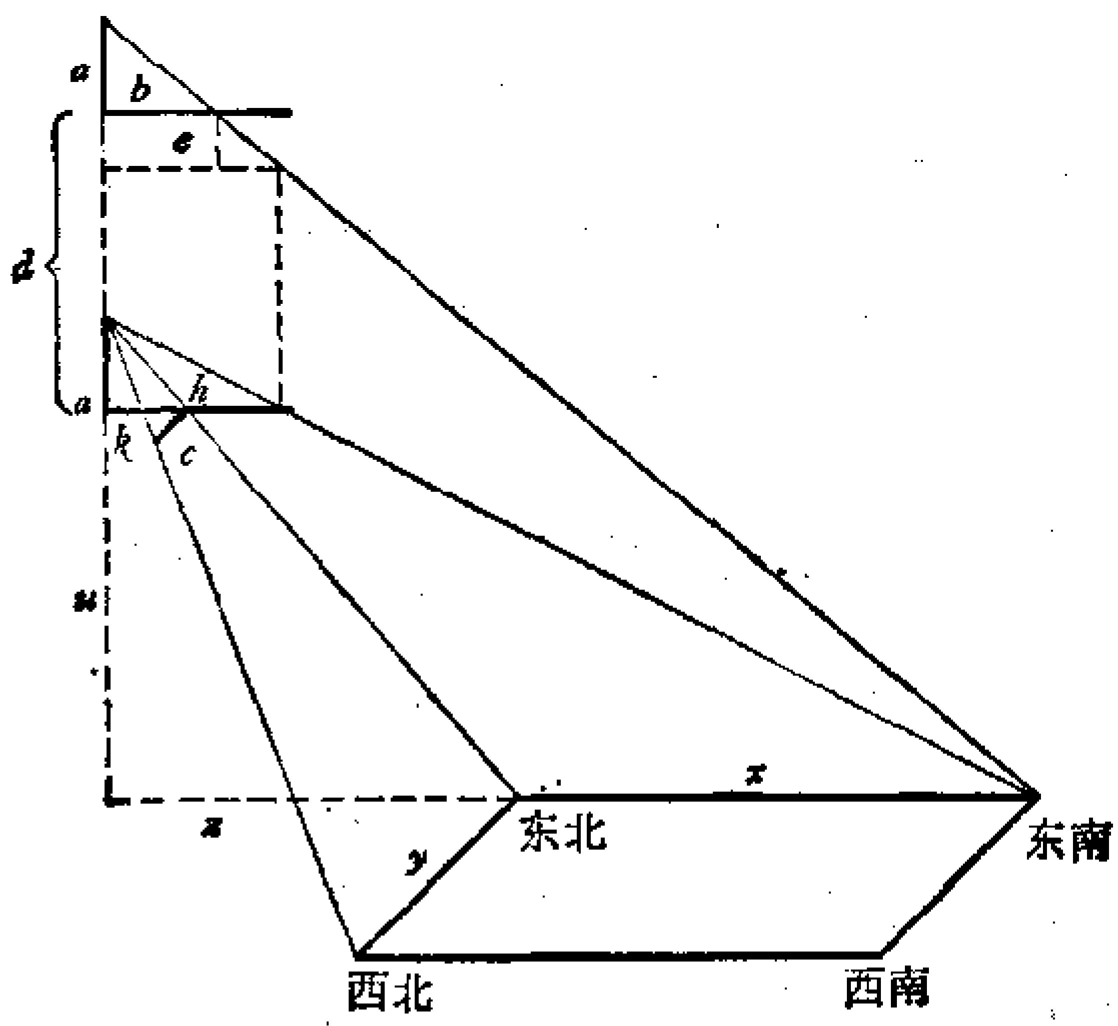


图 9

如图 9 所示，设句高为 a，望东北隅人下股为 k，望西北隅人横句为 c，望东南隅人下股为 h，矩间相去为 d，望东南隅人上股为 b，南北邑长为 x，东西邑广为 y。按术计算，得

$$x=\frac{d(h-k)}{\frac{ha}{b}-a},\quad y=\frac{dc}{\frac{ha}{b}-a}。$$

本问是四次测望问题，可能先求有关数据后，再套用重差公式推求邑长及邑广。也就是由相似句股形性质

$$\frac{e}{h-b}=\frac{a}{b},\ \frac{z}{u+a}=\frac{k}{a},\ \frac{y}{x}=\frac{c}{h-k},$$

得

$$e=\frac{a(h-b)}{b},\ a=\frac{k(u+a)}{a},\ y=\frac{cx}{h-k}。$$

其 h，$(d-e)$，a，$(a+e)$，$(a+e)-a$ 分别相当于测高、测远重差公式的"表高"、"表间"、"前表却行"、"后表却行"、"相多"，而 $x+z$ 及 u 则相当于"岛高"及"岛去表"。于是得

$$x+z=\frac{h(d-e)}{(a+e)-a}+h=\frac{hd}{\frac{ha}{b}-a},$$

$$u=\frac{a(d-e)}{(a+e)-a}=\frac{bd}{h-b}-a。$$

所以，

$$z=\frac{k(u+a)}{a}=\frac{kd}{\frac{ha}{b}-a},$$

故得邑长、邑广各为

$$x=\frac{hd}{\frac{ha}{b}-a}-\frac{kd}{\frac{ha}{b}-a}=\frac{d(h-k)}{\frac{ha}{b}-a},$$

$$y=\frac{cx}{h-k}=\frac{cd}{\frac{ha}{b}-a}。$$

主要参考文献

[1] 九章算术
[2] 杨辉，详解九章算法
[3] 李潢，九章算术细草图说
[4] 钱宝琮校点，算经十书，中华书局，1963年
[5] 李俨，中国古代数学史料，上海科学技术出版社，1954年
[6] 李俨，中国数学大纲，科学出版社，1955年
[7] 钱宝琮，中国数学史话，中国青年出版社，1957年
[8] 杜石然，古代数学家刘徽的极限观念，数学通报，第2期，1954年
[9] 钱宝琮，中国古代分数算法的发展，数学通报，第9期，1954年
[10] 钱宝琮，圆周率$=\frac{3927}{1250}$的作者究竟是谁？它是怎样得来的？数学通报，第5期，1955年
[11] 钱宝琮，九章算术方程术校勘记，数学通报，第6期，1955年
[12] 钱宝琮，盈不足术发展史，数学教学，第1期，1955年
[13] 李迪，中国古代数学家对面积的研究，数学通报，第7期，1956年
[14] 杜石然，"九章算术"中关于"方程"解法的成就，数学通报，第11期，1956年
[15] 励乃骥，九章算经圆田题和刘徽注的今释，数学教学，第6期，1957年
[16] 李迪，中国古代的体积算法，数学教学，第8期，1957年
[17] 杜石然，我国古代的体积计算，数学通报，第5期，1959年
[18] 沈康身，纪念刘徽注"九章算术"1700周年（263—1963），数学通报，第5期，1963年
[19] 程廷熙，刘徽弧田术及其进展，数学通报，第7期，1963年
[20] 李迪，我国历史上伟大的数学家刘徽，光明日报，1978年3月31日
[21] 吴文俊，出入相补原理，中国古代科技成就，中国青年出版社，1978年
[22] 白尚恕，我国古代数学名著《九章算术》及其注释者刘徽，数学通报，第6期，1979年
[23] 吴文俊，我国古代测望之学重差理论评介兼评数学史研究中的某些方法问题，科技史文集，第8辑，上海科学技术出版社，1982年
[24] 李继闵，刘徽对整句股数的研究，科技史文集，第8辑，上海科学技术出版社，1982年
[25] 李迪，刘徽的数学思想，科技史文集，第8辑，上海科学技术出版社，1982年
[26] 白尚恕，刘徽《海岛算经》造术的探讨，科技史文集，第8辑，上海科学技术出版社，1982年
[27] 李继闵，从句股比率论到重差术，科学史集刊，第11期
[28] 三上義夫，関孝和の業績と京坂の算家並に支那の算法との関係及び比較，東洋学報，第20,21,22卷，1932—1935年
[29] 川原秀城，九章算術解読，科学の名著(2)，朝日出版社，1980年
[30] 川原秀城，劉徽註九章算術，科学の名著(2)，朝日出版社，1980年
[31] D. B. Wagner, An Early Chinese Derivation of the Volume of a Pyramid: Liu Hui, Third Century A. D., *Historia Mathematica*, 1979, **6**

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝《九章算术》注释
作者＝白尚恕
页数＝３６４
ＳＳ号＝１０５２５８５０
出版日期＝１９８３年１２月第１版