

Forschungstätigkeit

Matthias Schütt

Überblick

Meine Interessenschwerpunkte bewegen sich zwischen Zahlentheorie und algebraischer und arithmetischer Geometrie. Wesentlich beruhen sie auf Fragen der Modularität und des Definitionskörpers. Ein ausgezeichnetes Studienobjekt sind dabei Calabi-Yau Varietäten und elliptische Flächen bzw. elliptische Kurven über Funktionskörpern.

Im folgenden stelle ich in aller Kürze meine bisherigen Forschungstätigkeiten dar. Ferner werden einige zukünftige Forschungsvorhaben skizziert. Die einzelnen Themen finden sich in einer logischen (und im wesentlichen zeitlichen) Abfolge. Der momentane Forschungsschwerpunkt liegt auf den Themen 3, 5 und 6.

- 1 Modularität von Calabi-Yau Varietäten
- 2 Hecke Eigenformen mit komplexer Multiplikation
- 3 Singuläre K3 Flächen
- 4 Singuläre Fasern elliptischer Flächen
- 5 Modularität elliptischer Kurven über Funktionskörpern
- 6 Supersinguläre Flächen

1 Modularität von Calabi-Yau Varietäten

Die Modularität von Calabi-Yau Varietäten hat ungemein an Aufmerksamkeit gewonnen, seitdem Wiles et al [Wi] die Taniyama-Shimura-Weil-Vermutung bewiesen haben, also die Modularität elliptischer Kurven über \mathbb{Q} . Inzwischen ist dank der Arbeiten von Khare-Wintenberger und Kisin zu Serre's Vermutung die Modularität fast aller zwei-dimensionalen Galoisdarstellungen über \mathbb{Q} bekannt. Konkrete geometrische Beispiele sind jedoch limitiert.

Die Modularität von Calabi-Yau Varietäten der Dimension ≥ 2 wird in einem gemeinsamen Übersichtsartikel mit K. Hulek und R. Kloosterman behandelt [HKS]. (Singuläre) K3 Flächen werden separat in Abschnitt 3 gewürdigt. Die Modularitätsergebnisse für Calabi-Yau Dreivarietäten über \mathbb{Q} betreffen starre Varietäten oder solche mit spaltenden Galoisdarstellungen. Obwohl es mittlerweile umfangreiche Beispiele gibt (vgl. [M] für eine extensive Sammlung), ist die Liste der assoziierten Neufurmen recht begrenzt.

In [S1] und [S2] habe ich einige interessante Calabi-Yau Dreivarietäten über \mathbb{Q} gefunden, deren Galoisdarstellungen in zwei dimensionale Darstellungen spalten. Ich bewies die Modularität, indem ich explizit die assoziierte Neuform bestimmte. Nach einer Konstruktion von Schoen [Sc] gingen die Varietäten als Faserprodukte aus semi-stabilen rationalen elliptischen Flächen mit Schnitt hervor.

Um Varietäten zu anderen Neuformen des Gewichts 4 zu finden, kann dieselbe Konstruktion auf rationale elliptische Flächen mit additiven singulären Fasern angewandt werden. Herfurtners Klassifikation rationaler elliptischer Flächen mit vier Spitzen [H] liefert eine Fülle an möglichen elliptischen Flächen, die zu vielen neuen Beispielen modularer Calabi-Yau Dreivarietäten führen wird. Auf diesem Wege lassen sich viele neue Modulformen in einer Calabi-Yau Varietät geometrisch realisieren.

Desweiteren will ich Faserprodukte über reell-quadratischen Körpern konstruieren. Im starren oder spaltenden Fall werden diese zu interessanten Hilbertschen Modulformen korrespondieren.

In weiterer Vorteil von Schoens Faserprodukten ist, dass sie verschiedene Quotientenkonstruktionen erlauben. Bereits in [Sc] wird der Kummer-Quotient der generischen Faser untersucht. Dieser Ansatz kann manchmal auch zu expliziten Modularitätsbeweisen verwandt werden. In [BD] werden Quotienten nach Torsionsschnitten der elliptischen Flächen behandelt - allerdings nur im allgemeinen Fall, in dem das Faserprodukt glatt ist. Mir erscheinen jedoch gerade die Fälle interessant, in denen wir die Kompatibilität von Desingularisierung und Quotientenbildung prüfen müssen. Auf diesem Wege will ich Calabi-Yau Varietäten mit neuen Paaren $(h^{1,1}, h^{1,2})$ konstruieren. Oftmals lassen sich diese sogar über \mathbb{Q} definieren und mit Modulformen in Verbindung setzen.

Zur Modularität von Calabi-Yau Varietäten der Dimension > 3 ist wenig bekannt; im wesentlichen sind bisher nur sehr spezielle höhere Kummer-Varietäten gefunden worden [CH]. Um diesen Ansatz weiterzuführen, konstruiere ich mit S. Cynk höhere Kummer-Varietäten für Weil-Restriktionen elliptischer CM-Kurven. In Dimension 3 erlauben diese eine Auflösung der Singularitäten, die zugleich Calabi-Yau und über \mathbb{Q} definiert ist. In [CS] bestimmen wir ferner L -Reihe explizit. So zeigen wir, dass sich mit einer Ausnahme alle Hecke Eigenformen des Gewichts 4 mit rationalen Koeffizienten und komplexer Multiplikation durch Calabi-Yau Varietäten realisieren lassen (s. Thm. 1). In höherer Dimension treten Obstruktionen bei der Desingularisierung auf, die wir in einem zukünftigen Projekt untersuchen wollen.

2 Hecke Eigenformen mit komplexer Multiplikation

Eine besondere Klasse der Modulformen sind diejenigen mit komplexer Multiplikation (CM). Auch wenn diese Eigenschaft sehr speziell ist, spielen CM-Neuformen eine wichtige Rolle in der arithmetischen Geometrie, wie im nächsten Abschnitt anhand singulärer K3 Flächen angedeutet.

Laut eines Resultats von Ribet [R] erlauben CM-Neuformen eine explizite Beschreibung durch Hecke-Charaktere. Die Analyse der korrespondierenden Hecke-Charaktere führte mich zur Klassifikation der CM-Formen mit rationalen Koeffizienten.

Theorem 1 ([S5, Thm. II.3.4])

Für festes Gewicht k ergibt die Abbildung

$$\text{CM-Neuform } f \mapsto \text{CM-Körper } K$$

eine bijektive Korrespondenz

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{CM-Neuformen des Gewichts } k \\ \text{mit rationalen Koeffizienten} \\ \text{bis auf Twists} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Imaginär-quadratische Körper } K \\ \text{so dass die Klassengruppe } Cl(K) \\ \text{Exponent } e_K \mid (k-1) \text{ hat} \end{array} \right\}$$

Die Beweismethoden will ich auf den Fall total reeller Koeffizientenkörper F verallgemeinern. Der nächste Abschnitt gibt eine Anwendung von Thm. 1 auf singuläre K3 Flächen. Relationen zu Calabi-Yau Dreivarietäten wurden in [CS] behandelt.

3 Singuläre K3 Flächen

K3 Flächen sind zwei-dimensionale Calabi-Yau Varietäten. Als solche werden sie nicht nur in algebraischer und arithmetischer Geometrie studiert, sondern sind auch für Stringtheoretiker von großem Interesse.

Eine komplexe K3 Fläche S heißt *singulär* (im Sinne von exzeptionell), wenn sie die maximale Picard-Zahl $\rho(S) = 20$ besitzt. Folglich hat das transzendente Gitter T_S Rang 2 und liefert somit eine zwei-dimensionale Galoisdarstellung. Falls S über \mathbb{Q} definiert ist, folgt die Modularität nun aus einem Resultat von Livné [L]. Mein ursprüngliches Interesse an singulären K3 Flächen war durch die folgende Frage motiviert, die unabhängig von B. Mazur und D. van Straten formuliert wurde:

Frage 2 (Mazur, van Straten)

Für welche Neuformen des Gewichts 3 mit rationalen Koeffizienten gibt es eine assoziierte singuläre K3 Fläche über \mathbb{Q} ?

Zunächst habe ich daraufhin eine Reihe von Beispielen singulärer K3 Flächen über \mathbb{Q} konstruiert [S3]. Im nächsten Schritt zeigte ich durch Thm. 1, dass die assoziierte Neuform praktisch durch den korrespondierenden imaginär-quadratische Körper K des Exponenten 1 oder 2 bestimmt ist. Nach einem Resultat von Weinberger [We] gibt es 65 solche Körper und höchstens einen weiteren. Nachdem ich alle extremalen elliptischen K3 Flächen und Kummer-Flächen von Weil-Restriktionen elliptischer Kurven mit CM einbezogen hatte, habe ich begonnen, mit Computerunterstützung in Familien von K3 Flächen von hohem Rang zu suchen. Inzwischen wurden so mit N. Elkies singuläre K3 Flächen über \mathbb{Q} für 62 der 65 CM-Körper gefunden.

Das ultimative Ziel besteht jedoch in der Klassifikation aller singulärer K3 Flächen (bis auf Isomorphie) über Zahlkörpern mit festem Grad über \mathbb{Q} . In Analogie zu elliptischen Kurven mit CM ist die Zahl dieser Varietäten nämlich nach einem Resultat von Šafarevič [Š] endlich. Indem ich obere und untere Schranken für den minimalen Definitionskörper hergeleitet habe, habe ich den ersten Schritt in diese Richtung vollzogen [S7]. Dieser gewährt bereits eine vollständige Lösung für viele Fälle. Der Beweis bedient sich klassischer Resultate über CM und der Theorie singulärer abelscher und K3 Flächen, wie sie von Shioda mit Mitani [SM] bzw. Inose [SI] entwickelt wurde. Für den allgemeinen Fall werde ich weitere Kriterien herleiten.

Ein Projekt mit F. R. Villegas stellt eine Verbindung zwischen speziellen Werten der L -Reihen von singulären K3 Flächen und logarithmischen Mahler-Maßen her. Solche Relationen sind durch Vermutungen von Bloch und Beilinson vorhergesagt. Auch hier studieren wir Familien von K3 Flächen hohen Ranges, um dann zu spezialisieren. Die angewandten Methoden waren bisher nur für einige Beispiele elliptischer Kurven bekannt [V].

4 Singuläre Fasern elliptischer Flächen

Während des Studiums singulärer K3 Flächen stieß ich auf die Frage, was die maximalen Fasern von elliptischen Flächen über \mathbb{P}^1 seien (bei fester Eulerzahl). Für K3 Flächen erzielte ich eine komplette Antwort in [S4]. Im wesentlichen besagt diese, dass auch in positiver Charakteristik keine anderen singulären Fasern auftreten können als über \mathbb{C} .

Elliptische K3 Flächen stellen aber in zweierlei Hinsicht einen Sonderfall dar: Zum einen gibt es für feste Charakteristik gibt es nur endlich viele Eulerzahlen, so dass keine größeren Fasern auftreten als über \mathbb{C} . Dieses Ergebnis steht im Zusammenhang mit Davenport-Stothers-Ungleichungen und wird in einem gemeinsamen Artikel mit A. Schweizer ausführlich behandelt [SS1]. Der einzige Ausnahmefall besteht in additiven Fasern in Charakteristik 2 und soll gesondert behandelt werden.

Zum anderen ist es im K3-Fall möglich, die Eindeutigkeit der elliptischen Flächen mit maximaler Faser zu beweisen. Dies ist der Gegenstand eines weiteren gemeinsamen Artikels mit A. Schweizer [SS2] und beantwortet eine Frage Shiodas.

Ein neues Projekt mit A. Schweizer untersucht elliptische Flächen über elliptischen Kurven mit nur einer oder zwei Ausnahmefasern. Über \mathbb{C} sind diese komplett klassifiziert und unter anderem in einer Arbeit mit T. Shioda [ShS] untersucht worden. In positiver Charakteristik erwarten wir im wesentlichen dieselbe Klassifikation; lediglich in Charakteristik 2 und 3 ergibt sich (nicht zuletzt wegen wilder Verzweigung) ein anderes Bild.

5 Modularität elliptischer Kurven über Funktionskörpern

Die Ergebnisse zu Davenport-Stothers-Ungleichungen in [SS1] ermöglichten uns außerdem, alle ganzen Punkte gewisser elliptischer Kurven über diversen Funktionskörpern zu bestimmen. Diese Kurven E sind allesamt isotrivial, so dass sie im Falle positiver Charakteristik stabil unter Frobenius-Basiswechseln sind. Dann lässt sich die Frobenius-Operation auf den Punkten von E untersuchen.

Ausgehend von E über $\mathbb{Q}(t)$ kann man nun mithilfe der Reduktionen eine Galoisoperation auf den Punkten von E definieren. In allen Beispielen konnte ich zeigen, dass die jeweilige Galoisdarstellung modular ist. Diesen neuartigen Modularitätsbegriff will ich ausweiten und eingehend analysieren.

6 Supersinguläre Flächen

Supersinguläre Flächen wie auch die Néron-Severi-Gruppe im allgemeinen sind verschiedentlich in meinen Arbeiten aufgetaucht, insbesondere zur Verifikation der Tate-Vermutung und anderer arithmetischer Aspekte ([ST], [S6], [ShS]). Diese Arbeiten sollen in zwei Projekten fortgeführt werden:

Mit C. Liedtke möchte ich supersinguläre Horikawa-Flächen untersuchen. In ungerader Charakteristik sind solche Flächen kaum bekannt, geschweige denn systematisch untersucht. In Charakteristik 2 stellt sich hingegen die Frage, ob jede solche Fläche eine inseparable zweifache Überlagerung des \mathbb{P}^2 ist (also insbesondere unirational).

Ein neues Projekt mit T. Shioda widmet sich Fermat-Flächen. Diese sind vielfältig untersucht worden. Etwa ist bekannt, wann das Néron-Severi-Gitter bis auf endli-

chen Index von Geraden erzeugt wird (s. [AS]). Unsere Ausgangsfrage ist nun, ob die Geraden bereits das gesamte Gitter erzeugen.

Mit Hilfe supersingulärer Reduktion konnte ich dies unlängst für die Fermat-Quintik beweisen [S8]. Diese Methode wollen wir gemeinsam verallgemeinern und ausweiten.

Literatur

- [AS] Aoki, N., Shioda, T.: *Generators of the Néron-Severi group of a Fermat surface*, in: *Arithmetic and geometry*, Vol. I, Progr. Math. **35**, 1-12.
- [BD] Bouchard, V., Donagi, R.: *On a class of non-simply connected Calabi-Yau threefolds*, preprint(2007), arXiv: [math.AG/0704.3096](https://arxiv.org/abs/math/0704.3096).
- [CH] Cynk, S., Hulek, K.: *Construction and examples of higher-dimensional modular Calabi-Yau manifolds*, preprint (2005), arXiv: [math.AG/0509424](https://arxiv.org/abs/math/0509424).
- [CS] Cynk, S., Schütt, M.: *Generalised Kummer constructions and Weil restrictions*, preprint (2007), arXiv: [math.AG/0710.4565](https://arxiv.org/abs/math/0710.4565).
- [H] Herfurtnner, S.: *Elliptic surfaces with four singular fibres*, Math. Ann. **291** (1991), 319-342.
- [HKS] Hulek, K., Kloosterman, R., Schütt, M.: *Modularity of Calabi-Yau Varieties*, in: Catanese et al. (Hrsg.): *Global Aspects of Complex Geometry*, Springer (2006).
- [L] Livné, R.: *Motivic Orthogonal Two-dimensional Representations of $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Israel J. of Math. **92** (1995), 149-156.
- [M] Meyer, C.: *Modular Calabi-Yau threefolds*, Fields Institute Monographs **22**, American Mathematical Society, Providence (2005).
- [R] Ribet, K.: *Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus*, in: J.-P. Serre, D. B. Zagier (eds.), *Modular Functions of one Variable V* (Bonn 1976), Lect. Notes in Math. **601**, Springer (1977), 17-52.
- [Š] Šafarevič, I. R.: *On the arithmetic of singular K3-surfaces*, in: *Algebra and analysis* (Kazan 1994), de Gruyter (1996), 103-108.
- [Sc] Schoen, C.: *On Fiber Products of Rational Elliptic Surfaces with Section*, Math. Z. **197** (1988), 177-199.
- [S1] Schütt, M.: *New examples of modular rigid Calabi-Yau threefolds*, Collect. Math. **55**, 2 (2004), 219-228.
- [S2] Schütt, M.: *On the modularity of three Calabi-Yau threefolds with bad reduction at 11*, Canad. Math. Bull. **49** (2006), 296-312.
- [S3] Schütt, M.: *Elliptic fibrations of some extremal K3 surfaces*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **37**, 2 (2007), 609-652.
- [S4] Schütt, M.: *The maximal singular fibres of elliptic K3 surfaces*, Arch. Math. **87**, Nr. 4 (2006), 309-319.
- [S5] Schütt, M.: *Hecke eigenforms with rational coefficients and complex multiplication*, eingereicht, preprint (2005), arXiv: [math.AG/0511228](https://arxiv.org/abs/math/0511228).
- [S6] Schütt, M.: *Arithmetic of a singular K3 surface*, erscheint in Michigan J. of Math., preprint (2006), arXiv: [math.AG/0605660](https://arxiv.org/abs/math/0605660).
- [S7] Schütt, M.: *Fields of definition of singular K3 surfaces*, Communications in Number Theory and Physics **1**, 2 (2007), 307-321.
- [S8] Schütt, M.: *Lines on the Fermat quintic surface*, preprint (2007).
- [SS1] Schütt, M., Schweizer, A.: *Davenport-Stothers inequalities and elliptic surfaces in positive characteristic*, erscheint in Quarterly J. Math., preprint (2006), arXiv: [math.NT/0608427](https://arxiv.org/abs/math.NT/0608427).

- [SS2] Schütt, M., Schweizer, A.: *On the uniqueness of elliptic K3 surfaces with maximal singular fibre*, preprint (2007).
- [ST] Schütt, M., Top, J.: *Arithmetic of the $[19,1,1,1,1,1]$ fibration*, *Comm. Math. Univ. St. Pauli* **55**, 1 (2006), 9-16.
- [SI] Shioda, T., Inose, H.: *On Singular K3 Surfaces*, in: W. L. Baily Jr., T. Shioda (Hrsg.), *Complex analysis and algebraic geometry*, Iwanami Shoten, Tokyo (1977), 119-136.
- [SM] Shioda, T., Mitani, N.: *Singular abelian surfaces and binary quadratic forms*, in: *Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds*, SLN **412** (1974), 259-287.
- [ShS] Shioda, T., Schütt, M.: *An interesting elliptic surface over an elliptic curve*, *Proc. Jap. Acad.* **83**, 3 (2007), 40-45.
- [V] Villegas, F. R.: *Modular Mahler measures I*, in *Topics in number theory* (University Park, PA, 1997), *Math. Appl.* **467**, 17-48.
- [We] Weinberger, P. J.: *Exponents of the class groups of complex quadratic fields*, *Acta Arith.* **22** (1973), 117-124.
- [Wi] Wiles, A.: *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, *Ann. Math. (2)* **141**, No. 3 (1995), 443-551.

Matthias Schütt, mschuett@math.harvard.edu,
Mathematics Department, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA